

317 471

Alkalmazott matematikai lapok

12.

2004/1

21/2004

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
MATEMATIKAI TUDOMÁNYOK
OSZTÁLYÁNAK KÖZLEMÉNYEI

21.

KÖTET

ALKALMAZOTT MATEMATIKAI LAPOK

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA MATEMATIKAI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK KÖZLEMÉNYEI

ALAPÍTOTTÁK

KALMÁR LÁSZLÓ, TANDORI KÁROLY, PRÉKOPA ANDRÁS, ARATÓ MÁTYÁS

FŐSZERKESZTŐ

PÁLES ZSOLT

FŐSZERKESZTŐ-HELYETTESEK

BENCZÜR ANDRÁS, SZÁNTAI TAMÁS

FELELŐS SZERKESZTŐ

VIZVÁRI BÉLA

TECHNIKAI SZERKESZTŐ

KOVÁCS GERGELY

A SZERKESZTŐBIZOTTSÁG TAGJAI

Arató Mátyás, Csirik János, Csiszár Imre, Csörgő Sándor, Demetrovics János, Ésik Zoltán, Farkas Miklós, Frank András, Fritz József, Galántai Aurél, Garay Barna, Gécseg Ferenc, Gerencsér László, Györfi László, Györi István, Harnos Zsolt, Hatvani László, Heppes Aladár, Iványi Antal, Járai Antal, Kátai Imre, Katona Gyula, Klafszy Emil, Komáromi Éva, Komlósi Sándor, Kovács Margit, Krisztin Tibor, Lovász László, Maros István, Michaletzky György, Pap Gyula, Prékopa András, Rapcsák Tamás, Recski András, Rónyai Lajos, Schipp Ferenc, Stoyan Gisbert, Szeidl László, Tandori Károly, Tusnády Gábor, Varga László

KÜLSŐ TAGOK:

Balla Katalin, Csendes Tibor, Fazekas Gábor, Fazekas István, Forgó Ferenc, Friedler Ferenc, Fülöp Zoltán, Imreh Balázs, Kormos János, Kuba Attila, Maksa Gyula, Racskó Péter, Tallos Péter, Temesi József

21. kötet

Szerkesztőség és kiadóhivatal: 1027 Budapest, Fő u. 68.

Az Alkalmazott Matematikai Lapok változó terjedelmű füzetekben jelenik meg, és olyan eredeti tudományos cikkeket publikál, amelyek a gyakorlatban, vagy más tudományokban közvetlenül felhasználható új matematikai eredményt tartalmaznak, illetve már ismert, de színvonalas matematikai apparátus újszerű és jelentős alkalmazását mutatják be. A folyóirat közöl cikk formájában megírt, új tudományos eredménynek számító programokat, és olyan, külföldi folyóiratban már publikált dolgozatokat, amelyek magyar nyelven történő megjelentetése elősegítheti az elért eredmények minél előbbi, széles körű hazai felhasználását. A szerkesztőbizottság bizonyos időnként lehetővé kívánja tenni, hogy a legjobb cikkek nemzetközi folyóiratok különszámaként angol nyelven is megjelenhessenek.

A folyóirat feladata a Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai) Osztályának munkájára vonatkozó közlemények, könyvismertetések stb. publikálása is.

A kéziratok a főszerkesztőhöz, vagy a szerkesztőbizottság bármely tagjához beküldhetők. A főszerkesztő címe:

Páles Zsolt, főszerkesztő

1027 Budapest, Fő u. 68.

A folyóirat e-mail címe: aml@math.elte.hu

Közlésre el nem fogadott kéziratokat a szerkesztőség lehetőleg visszajuttat a szerzőhöz, de a beküldött kéziratok megőrzéséért vagy továbbításáért felelősséget nem vállal.

Az Alkalmazott Matematikai Lapok előfizetési ára kötetenként 850 forint. Megrendelések a szerkesztőség címen lehetségesek.

A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai) Osztálya a következő idegen nyelvű folyóiratokat adja ki:

1. Acta Mathematica Hungarica,
2. Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica.

KEDVES OLVASÓ!

Az Alkalmazott Matematikai Lapok újabb számát tartja kezében, mely hosszabb szünet után új szerkesztők munkájának eredményeként jelent meg.

Lapunknál természetesen jogfolytonosság van, az eddig benyújtott cikkeket mind elbíraltatjuk. A jelen szám is ilyenekből áll. Fontos feladatunknak tekintjük, hogy mielőbb minden lemaradásunkat ledolgozzuk.

A lap azonban csak akkor fog élni, ha az a tudományos közösség, akinek szól, aktívan támogatja cikkeikkel, fordításokkal és benyújtott dolgozatok lektorálásával.

Szívesen közöljük PhD disszertációk önállóan megálló részleteit, fontos idegennyelvű dolgozatok fordításait és valamely terület új eredményeinek összefoglalását. Nyitni kívánunk a számítástudomány irányába is.

Reméljük, hogy lapunk a magyar alkalmazott matematikusok örömeire fog szolgálni.

Budapest, 2003. szeptember

A szerkesztők

NAGYMÉRTÉKBEN NEMLINEÁRIS FÜGGVÉNYEK VIZSGÁLATA

LICSKÓ ILDIKÓ

Budapest

A nagymértékben nemlineáris Boole-függvényeket számos helyen alkalmazzák, többek között a kriptográfiában is. A lineáris függvényektől legnagyobb távolságra lévő differenciálisan egyenletes függvények kriptográfiai alkalmazások számára nem megfelelők, ezért több kutatás irányul egyéb nagymértékben nemlineáris függvényosztályok kutatására és szerkesztésére. A jelen dolgozatban ilyen függvények szerkesztésének szuperpozíciós alapon történő megfogalmazásával foglalkozunk. Vizsgáljuk továbbá néhány jellegzetes tulajdonsággal rendelkező függvénytípusra a függvényhez tartozó nem zérus lineáris struktúrákat. Felső korlátot adunk ezen függvények nem zérus lineáris struktúráinak számára.

Bevezetés

A kriptográfiai alkalmazásokban használt rejtjelezési függvények alapvetően meghatározzák a rejtjel erősségét. Többnyire nemlineáris Boole-függvényeket alkalmaznak, hiszen a rejtendő információt általában bináris formában tárolják. A klasszikus (titkos kulcsú), blokkos típusú rejtjelező algoritmusokat sok helyen ma is előnyben részesítik a nyilvános kulcsú rejtjelező eljárásokkal szemben. Ezt az állítást bizonyítja, hogy az 1997-ben meghirdetett AES pályázaton, amelyet a rejtjelező szabvány megújítására szántak, követelmény volt a klasszikus, blokkos módszer. A Boole-függvények mellett gyakran alkalmaznak más véges test feletti függvényeket. A klasszikus rejtjelezési eljárások két területén van jelentőségük a nemlineáris függvényeknek.

1. Nagy mennyiségű adat átvitelekor a rejtjelezésre megfelelő bonyolultságú álvéletlen kulcsfolyamot generálnak. A leggyakrabban használt algoritmusok visszacsatolt shiftregiszterekkel dolgoznak, amelyek kimenetét egy memória mentes nemlineáris függvény segítségével egyesítik. Az illetéktelen rejtjelfejtő-

nek az jelent nehézséget, hogy a függvény nemlineáris, így a kulcsra vonatkozó következtetés aránytalanul nagy energiabefektetést igényel.

2. A Feistel típusú rejtjelezés a rejtendő szöveg és a kulcs egyesítésére alkalmaz nemlineáris függvényeket. Ebben az esetben szintén az illetéktelen rejtjelfejtő dolgát, hogy az alkalmazott függvény nemlineáris.

A rejtjelező algoritmusok készítőinek komoly problémát jelent megfelelő nemlineáris függvények szerkesztése.

A modern rejtjelfejtési eljárásokkal (differenciális- és lineáris kriptanalízis) szemben a rejtjelező algoritmusnak ellenállónak kell lennie. Az illetéktelen rejtjelfejtő számára egyéb tulajdonságok mellett a nem-linearitás jelent nehézséget. További „nehéztést” jelent az alkalmazott függvények néhány egyéb tulajdonsága: balansz¹ tulajdonság, terjedési kritériumok teljesítése, korreláció-immunitás, differenciális egyenletesség stb.

1. Előzetes ismeretek

Ha n változó értékét a $\{0, 1\}$ halmazból veszi, akkor a lehetséges permutációk száma 2^n . Ezen elemek halmazát jelöljük $\{0, 1\}^n$ -nel. A $\{0, 1\}^n$ halmaz elemei vektorteret alkotnak, amelyet n -dimenziós Boole-térnek szokás nevezni. Boole-függvénynek nevezzük az $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ leképezést, amelyet gyakran írunk le igazságtábla segítségével. Az f függvény igazságtáblája egy 2^n elemű $\{0, 1\}$ sorozat, amely megadja a $\{0, 1\}^n$ elemein felvett függvényértékeket. Gyakran használjuk egy Boole-függvény helyett az általa generált, $\{-1, 1\}$ értékkészletű, 2^n elemű sorozatot, amelyet \bar{f} -fel jelölünk $\bar{f} : \{0, 1\}^n \rightarrow \{-1, 1\}$. Az f és \bar{f} közötti kapcsolat:

$$\bar{f}(x) = (-1)^{f(x)}$$

vagy

$$\bar{f}(x) = 1 - 2f(x).$$

A továbbiakban az $\bar{f}(x)$ jelölés mindig az f által generált 2^n elemű $\{-1, 1\}$ sorozatot jelenti.

A Boole-tér egyes vektorait megadhatjuk koordinátáikkal, hivatkozhatunk rájuk egy egész számmal, ekkor a vektor koordinátái az illető egész szám bináris előállítását mutatják. Jelölhetjük a vektort egy egész számmal, ekkor azt mondjuk meg, hogy a vektor hányadik eleme a Boole-térnek, és ebben az esetben a vektor koordinátái ennek az egész számnak a bináris előállítását szolgáltatják. Hivatkozhatunk a vektorokra egy indexelt névvel, ez esetben a vektor neve mellé írt érték jelzi a vektor által képviselt egész szám bináris előállítását.

¹A továbbiakban ezt a tulajdonságot magyar kifejezéssel kiegyensúlyozottnak nevezzük.

Az $f(x)$ függvény súlya az igazságtáblájában lévő 1-ek számát jelenti:

$$w(f) = \sum_{x \in \{0,1\}^n} f(x).$$

Az $f(x)$ függvényről azt mondjuk, hogy kiegyensúlyozott, ha igazságtáblájában az 1-ek és a 0-ák száma megegyezik, vagyis $f(x) = 1$ pontosan ugyanannyi helyen, mint $f(x) = 0$. Ekkor

$$\sum_{x \in \{0,1\}^n} \bar{f}(x) = 0,$$

és az $f(x)$ súlya: $w(f) = 2^{n-1}$.

A Boole-tér elemei között a szokásos műveleteket értelmezhetjük: $a, b \in \{0, 1\}^n$,

$$a = (a_0, a_1, \dots, a_{n-1}), \quad b = (b_0, b_1, \dots, b_{n-1})$$

esetén az összeadást

$$a \oplus b = (a_0 \oplus b_0, a_1 \oplus b_1, \dots, a_{n-1} \oplus b_{n-1})$$

és a skaláris szorzást az

$$ab = \bigoplus_{i=0}^{n-1} a_i b_i$$

formában értelmezzük.

Az f függvényt akkor nevezzük affin függvénynek, ha Zsegalkin-polinomja felírható

$$f(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) = a_0 x_0 \oplus a_1 x_1 \oplus \dots \oplus a_{n-1} x_{n-1} \oplus c$$

alakban, ahol $a_i, c \in \{0, 1\}$, $0 \leq i \leq n-1$. Amennyiben $c = 0$, akkor a függvényt lineárisnak nevezzük. Az ax lineáris függvényt tekinthetjük az a konstans vektor és az x változó skaláris szorzataként.

Az f függvényről azt mondjuk, hogy egy $a \in \{0, 1\}^n$, $a \neq 0$ elemet tekintve kielégíti a terjedési kritériumot, ha az $f(x) \oplus f(x \oplus a)$ függvény kiegyensúlyozott. Az f és g függvények távolságát a

$$d(f, g) = w(f \oplus g) = \sum_{x \in \{0,1\}^n} (f(x) \oplus g(x)),$$

összefüggéssel, a két függvény korrelációját pedig a

$$c(f, g) = \sum_{x \in \{0,1\}^n} (-1)^{f(x) \oplus g(x)} = 2^n - 2d(f, g)$$

menyiséggel adjuk meg.

Az f autokorrelációs függvényét $r_f(a)$ -val jelöljük és az

$$r_f(a) = \sum_{x \in \{0,1\}^n} \bar{f}(x) \bar{f}(x \oplus a)$$

összefüggéssel definiáljuk. Az autokorrelációs függvényt skalárszorozatként is felfoghatjuk. Jelöljük ugyanis $\xi(a)$ -val az $f(x+a)$ által generált $\{-1, 1\}$ sorozatot, ekkor $\xi(0)$ jelöli az $f(x)$ által generált $\{-1, 1\}$ sorozatot, és

$$r_f(a) = \sum_{x \in \{0,1\}^n} \bar{f}(x) \bar{f}(x \oplus a) = \xi(0) \xi(a).$$

Az m -edrendű H mátrixot

$$H = (h_{i,j}) \quad h_{i,j} \in \{-1, 1\} \quad i, j = 0, 1, \dots, m$$

Hadamard-mátrixnak nevezzük, ha teljesül, hogy $HH^T = mI$, ahol H^T a H mátrix transzponáltja, I pedig az m -edrendű egységmátrix. A 2^n -edrendű Hadamard-mátrixot H_n jelöli, és a következő rekurzív eljárás segítségével állítható elő:

$$H_0 = 1, H_n = \begin{bmatrix} H_{n-1} & H_{n-1} \\ H_{n-1} & -H_{n-1} \end{bmatrix}, \quad n = 1, 2, \dots$$

A H_n mátrix sorait l_i -vel jelöljük, $i = 0, 1, \dots, 2^n - 1$. Az l_i sor felfogható mint egy lineáris függvény a $g_i(x) = ix$ által generált $\bar{g}_i(x)$ $\{-1, 1\}$ sorozat. Így a H_n mátrix sorai előállítják a $\{0, 1\}^n$ Boole-tér összes lineáris függvénye által generált $\{-1, 1\}$ sorozatot.

Az f függvény Walsh-transzformáltja az $a \in \{0, 1\}^n$, $a = (a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$ helyen:

$$F(a) = \sum_{x \in \{0,1\}^n} f(x) (-1)^{ax},$$

az f által generált \bar{f} Walsh-transzformáltja pedig

$$\bar{F}(a) = \sum_{x \in \{0,1\}^n} (-1)^{f(x) \oplus ax}.$$

Az $\bar{F}(a)$ mennyiség tulajdonképpen az f függvénynek az ax lineáris függvénnyel vett korrelációja.

Egy $a \in \{0, 1\}^n$ vektort az f függvény lineáris struktúrájának nevezünk, ha az $f(x) \oplus f(x \oplus a)$ függvény konstans, vagyis

$$\bar{f}(x) \bar{f}(x \oplus a) = \sum_{x \in \{0,1\}^n} (-1)^{f(x) \oplus f(x \oplus a)} = \pm 2^n.$$

Az f függvényt differenciálisan egyenletesnek nevezzük², ha minden $a \in \{0, 1\}^n$ -re teljesül, hogy a generált függvény Walsh-transzformáltja konstans, és

$$|\bar{F}(a)| = \left| \sum_{x \in \{0, 1\}^n} (-1)^{f(x) \oplus ax} \right| = 2^{\frac{n}{2}}.$$

A Wiener–Khintchine tétel a H_n Hadamard-mátrix, az f autokorrelációs függvénye valamint az f függvény lineáris függvényekkel vett korrelációja közötti kapcsolatot mutatja:

$$(\bar{f}(x)\bar{f}(x \oplus a_0), \dots, \bar{f}(x)\bar{f}(x \oplus a_{2^n-1}))H_n = ((\bar{f}(x)l_0)^2, \dots, (\bar{f}(x)l_{2^n-1})^2),$$

ahol l_i a H_n sorait jelenti (lásd [8]).

Egy f függvény nem-linearitásán az f -nek az affin függvények halmazától számított távolságát értjük, és N_f -fel jelöljük:

$$N_f = 2^{n-1} - \frac{1}{2} \max_{i \in \{0, 1\}^n} (|\bar{f}(x)l_i|).$$

A nem-linearitás legkisebb értéke 0, ez az affin függvények nem-linearitása. Az affin függvényektől azok a függvények vannak legtávolabb amelyekre $|\bar{f}(x)l_i|$ konstans, és értéke: $2^{\frac{n}{2}}$. A differenciálisan egyenletes függvények rendelkeznek ezzel a tulajdonsággal, nem-linearitásuk mértéke $N_f = 2^{n-1} - 2^{\frac{n}{2}-1}$, és csak páros dimenziójú térben léteznek, hiszen $2^{\frac{n}{2}}$ egész szám kell legyen. Annak ellenére, hogy a linearitást tekintve kedvező tulajdonságuk kriptográfiai célokra nem alkalmazzák ezeket, tekintettel arra, hogy nem kiegyensúlyozottak és nem korreláció-immunisak.

Célszerűnek tűnik ezért más olyan függvényeket keresni, amelyek a lehetséges legnagyobb mértékben nemlineárisak, kiegyensúlyozottak, vagy legalább könnyen illyenné tehetők.

Az említett szempontokat figyelembe véve a [8] dolgozat szerzői olyan függvényosztályokat kerestek amelyek nem-linearitása nagy, megközelíti a maximális értéket, és könnyen kiegyensúlyozottá tehetők. A differenciálisan egyenletes függvényekre jellemző, hogy a $(0, 0, \dots, 0)$ vektor kivételével a Boole-tér minden elemét tekintve kielégítik a terjedési kritériumot. A vizsgálat tárgyát az képezte, hogyan befolyásolja a függvény nem-linearitását, ha azokról a vektorokról, amelyekre a függvény nem elégíti ki a terjedési kritériumot, speciális tulajdonságok állapíthatók meg.

A [6] dolgozat 2. Lemmája megad egy szerkesztési módot, amelynek segítségével konkatenált $\{-1, 1\}$ sorozatok által meghatározott függvények explicit alakban felírhatók. A lemma a következő jelölést alkalmazza: legyen $a = (i_1, i_2, \dots, i_p)$, $a \in \{0, 1\}^p$, $D_a : \{0, 1\}^p \rightarrow \{0, 1\}$ olyan függvény, amely a következő alakú:

$$D_a(y_1, y_2, \dots, y_p) = (y_1 \oplus i_1 \oplus 1) \cdots (y_p \oplus i_p \oplus 1).$$

²Az angol nyelvű irodalomban szokásos megnevezésük: Bent functions.

Legyenek $f_0, f_1, \dots, f_{2^r-1} : \{0, 1\}^q \rightarrow \{0, 1\}$ függvények q dimenziós térben és az általuk generált $\{-1, 1\}$ sorozatok $\xi_i = (-1)^{f_i}$. Jelölje ξ azt a $\{-1, 1\}$ sorozatot, amelyet $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{2^r-1}$ sorozatok összefűzése eredményez. Ekkor ξ egy olyan $f : \{0, 1\}^{p+q} \rightarrow \{0, 1\}$ függvény által generált $\{-1, 1\}$ sorozat, amelynek előállítására a következő:

$$f(y, x) = \bigoplus_{i=0}^{2^r-1} D_{a_i}(y) f_i(x),$$

ahol $y = (y_1, y_2, \dots, y_p)$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_q)$ és a_i olyan $\{0, 1\}^p$ -beli vektor, amely az i egész szám bináris reprezentációja.

Felsoroljuk a [8] dolgozat néhány érdekes megállapítását.

[8] 9. LEMMA.

Legyen $n \geq 2$ és $p, q \geq 0$ pozitív egész számok. Ekkor a $2^n = p^2 + q^2$ egyenletnek páros n esetén két megoldása van $p = \pm 2^{\frac{1}{2}n}$ és $q = 0$, vagy $q = \pm 2^{\frac{1}{2}n}$ és $p = 0$. Páratlan n esetén az egyenletnek egyetlen megoldása $p = q = \pm 2^{\frac{1}{2}(n-1)}$.

[8] 11. KÖVETKEZMÉNY.

Legyen $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$, \mathfrak{R} a terjedési kritériumot nem teljesítő vektorok halmaza, $|\mathfrak{R}| > 1$. Tegyük fel, hogy bármely páros t -re, $0 \leq t \leq |\mathfrak{R}|$ igaz, hogy $a_1 \oplus a_2 \oplus \dots \oplus a_t = 0$ a_1, a_2, \dots, a_t nem zérus, \mathfrak{R} -beli vektorok esetén, akkor

1. n -nek páratlannak kell lennie
2. az f nem-linearitása $N_f = 2^{n-1} - 2^{\frac{1}{2}(n-1)}$.

[8] 15. KÖVETKEZMÉNY.

Egy $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ függvényről, amely által generált \bar{f} Walsh-transzformáltjára teljesül, hogy

$$|\bar{F}(a)| = \left| \sum_{x \in \{0, 1\}^n} (-1)^{f(x) \oplus ax} \right| = 2^{\frac{n+1}{2}},$$

vagy

$$|\bar{F}(a)| = \left| \sum_{x \in \{0, 1\}^n} (-1)^{f(x) \oplus ax} \right| = 0,$$

bármely $a \in \{0, 1\}^n$ -re, a következő tulajdonságokat lehet elmondani.

1. Csak páratlan dimenzióban léteznek.
2. A H_n Hadamard-mátrix $l_i, i = 0, 1, \dots, 2^n - 1$ sorainak pontosan felére igaz, hogy $\bar{f}(x)l_i = 0$, illetve $\bar{f}(x)l_i = \pm 2^{\frac{(n+1)}{2}}$
3. A nem-linearitás értéke $N_f = 2^{n-1} - 2^{\frac{1}{2}(n-1)}$
4. Tetszőleges A $n \times n$ -es nonszinguláris, $GF(2)$ feletti mátrix, és $b \in \{0, 1\}^n$ esetén a $g(x) = f(Ax \oplus b)$ függvény által generált $\bar{g}(x)$ függvény Walsh-transzformáltja ugyancsak a 0 vagy $\pm 2^{\frac{(n+1)}{2}}$ értéket veszi fel.

5. Bármely lineáris $\varphi(x)$ függvény esetén az $\overline{f(x) \oplus \varphi(x)}$ által generált függvény Walsh-transzformáltja ugyancsak a fenti értékeket veszi fel.

A fenti tulajdonságok biztosítják, hogy páratlan dimenziójú Boole-térben szerkeszthetők nagymértékben nemlineáris függvények³, és ezek az 5. tulajdonság alapján könnyen kiegyensúlyozottá tehetők.

Differenciálisan egyenletes függvények generálása egyszerű módon kivitelezhető, [4] általános megoldást ad ezen függvények Boole-polinom segítségével történő generálására, [6]-ban peddig arra találunk módszert, hogyan lehet differenciálisan egyenletes függvényeket lineáris függvények által generált $\{-1, 1\}$ sorozatok katenálásával előállítani.

2. Szuperpozíciós elven történő függvényyszerkesztés

A [8]-ban található, a páratlan dimenziójú, nagymértékben nemlineáris Boole-függvényekre vonatkozó eredmények és az ott közölt példák elemzése vezetett a következő megfontolásokhoz. Legyen n páros és $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ differenciálisan egyenletes függvény. Tekintsük azt a h függvényt, amelynek igazságtábláját az f függvény igazságtáblájának kétszer egymásután másolásával nyerjük. Az igazságtábla sorait úgy másoljuk, hogy az első esetben az f sorainak mindegyikébe $x_n = 0$ értéket írunk, majd alája ismét leírjuk az igazságtáblát úgy, hogy a sorokba $x_n = 1$ értéket teszünk. Vizsgáljuk az eredményül kapott $h : \{0, 1\}^{n+1} \rightarrow \{0, 1\}$ függvényt. Mivel az f függvény differenciálisan egyenletes, ezért teljesül minden $a \in \{0, 1\}^n$ -re, hogy

$$|\overline{F}(a)| = \left| \sum_{x \in \{0, 1\}^n} (-1)^{f(x) \oplus ax} \right| = 2^{\frac{n}{2}}.$$

Nézzük, hogyan viselkedik a h , illetve az általa generált $\overline{h} : \{0, 1\}^{n+1} \rightarrow \{-1, 1\}$. Legyen $a = (a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$, $x = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$, $a, x \in \{0, 1\}^n$. Jelölje $b = (a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, b_n)$, $y = (x, x_n)$, $b, y \in \{0, 1\}^{n+1}$,

$$\begin{aligned} \overline{H}(b) &= \sum_{y \in \{0, 1\}^{n+1}} (-1)^{h(y) \oplus by} = \sum_{x \in \{0, 1\}^n, x_n=0} (-1)^{f(x) \oplus ax \oplus x_n b_n} + \\ &+ \sum_{x \in \{0, 1\}^n, x_n=1} (-1)^{f(x) \oplus ax \oplus x_n b_n}, \end{aligned}$$

és a lehetséges átalakítások után

$$\overline{H}(b) = \sum_{x \in \{0, 1\}^n, x_n=0} (-1)^{f(x) \oplus ax} + \sum_{x \in \{0, 1\}^n, x_n=1} (-1)^{f(x) \oplus ax \oplus b_n}.$$

³Az angol nyelvű irodalomban szokásos megnevezésük: Highly nonlinear functions.

Ebből következik, hogy

$$\overline{H}(b) = \begin{cases} 0 & \text{ha } b_n = 1, \\ 2^{\frac{n}{2}+1} & \text{ha } b_n = 0. \end{cases}$$

Ez a függvény a 15. következmény feltételeit kielégíti, tehát a h függvény nem-linearitása:

$$N_h = 2^{n+1-1} - 2^{\frac{1}{2}(n+1-1)}.$$

A fenti konstrukció annyiban hátrányos, hogy alkalmazása esetén még külön kell gondoskodni arról, hogy a függvényt kiegyensúlyozottá tegyük.

A fenti eljárást szuperpozíció segítségével is megfogalmazhatjuk. Legyen n páros és $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ differenciálisan egyenletes függvény. Legyen

$$g_i : \{0, 1\}^{n+1} \rightarrow \{0, 1\} \quad i = 0, 1, \dots, n$$

az i -edik projekció, vagyis $g_i(x_0, x_1, \dots, x_n) = x_i$. Tekintsük a $h : \{0, 1\}^{n+1} \rightarrow \{0, 1\}$ függvényt, amelyet a következőképpen definiálunk:

$$h(g_0, g_1, \dots, g_n) = g_n f(x_0, \dots, x_{n-1}) \oplus (g_n \oplus 1) f(x_0, \dots, x_{n-1}).$$

Egyszerű konstrukció az $f(x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$ alapján egy $h(x_0, x_1, \dots, x_n)$ kiegyensúlyozott függvény előállítására:

$$h(g_0, g_1, \dots, g_n) = g_n f(x_0, \dots, x_{n-1}) \oplus (g_n \oplus 1)(f(x_0, \dots, x_{n-1}) \oplus 1).$$

A $h(x_0, x_1, \dots, x_n)$ igazságtáblája az f és a negált f igazságtáblájának egymásután másolásával adódik úgy, hogy x_n oszlopába f esetén 0-t, a negált f esetén 1-et írunk. Mivel a negálás a differenciális egyenletességet és a terjedési kritériumot nem befolyásolja, ezért a függvény az előzőekben ismertetett tulajdonságok mellett kiegyensúlyozott is. A [8] cikkben megadott 2. példa megegyezik ezzel. Az elmondottak lehetővé teszik, hogy differenciálisan egyenletes függvény és enyhe feltételt kielégítő függvény segítségével nagymértékben nemlineáris függvényeket szerkesszünk.

1. LEMMA. Legyen $f : \{0, 1\}^2 \rightarrow \{0, 1\}$ és $f(x, y) = x \oplus y$; $g_1 : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ differenciálisan egyenletes függvény n páros; $g_2 : \{0, 1\}^m \rightarrow \{0, 1\}$ kiegyensúlyozott függvény m páratlan. Az $f(g_1(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}), g_2(y_0, y_1, \dots, y_{m-1})) = g_1(x) \oplus g_2(y)$ függvény nem-linearitása: $N_f = 2^{n+m-1} - 2^{\frac{1}{2}(n+m-1)}$.

Bizonyítás. A fenti konstrukció páratlan dimenziójú függvényt eredményez. A kiegyensúlyozottság nyilván fennáll, hiszen a g_2 függvény kiegyensúlyozott volta miatt pontosan annyiszor használjuk a g_1 függvény igazságtábláját, mint annak negáltját, és ezzel az f kiegyensúlyozott volta már adódik. Vizsgáljuk meg, hogy az előállt f mely vektorokra nem teljesíti a terjedési kritériumot.

Tekintsük az $x \in \{0, 1\}^n$, $x = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$ és az $y \in \{0, 1\}^m$, $y = (y_0, y_1, \dots, y_{m-1})$ elemekre a szuperpozícióval előállított függvényt. Az

$$\begin{aligned} f(g_1(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}), g_2(y_0, y_1, \dots, y_{m-1})) &= \\ &= g_1(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) \oplus g_2(y_0, y_1, \dots, y_{m-1}) \end{aligned}$$

függvény a $\{0, 1\}^{n+m}$ téren értelmezett, és valójában a következőképpen írható:

$$\begin{aligned} f(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, y_0, y_1, \dots, y_{m-1}) &= \\ &= g_1(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) \oplus g_2(y_0, y_1, \dots, y_{m-1}) = g_1(x) \oplus g_2(y). \end{aligned}$$

Legyen $a \in \{0, 1\}^{n+m}$, jelölje $a = (a_{x_0}, a_{x_1}, \dots, a_{x_{n-1}}, a_{y_0}, a_{y_1}, \dots, a_{y_{m-1}})$ valamint $a_x = (a_{x_0}, a_{x_1}, \dots, a_{x_{n-1}})$ és $a_y = (a_{y_0}, a_{y_1}, \dots, a_{y_{m-1}})$, ekkor $f(a) = f(a_x, a_y) = f(g_1(a_x), g_2(a_y)) = g_1(a_x) \oplus g_2(a_y)$. A $z \in \{0, 1\}^{n+m}$, $z = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, y_0, y_1, \dots, y_{m-1})$ jelöléssel

$$\begin{aligned} f(z \oplus a) &= f((x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, y_0, y_1, \dots, y_{m-1}) \oplus \\ &\oplus (a_{x_0}, a_{x_1}, \dots, a_{x_{n-1}}, a_{y_0}, a_{y_1}, \dots, a_{y_{m-1}})) = \\ &= g_1(x \oplus a_x) \oplus g_2(y \oplus a_y). \end{aligned}$$

A terjedési kritérium teljesítése azt jelenti, hogy az $f(z) \oplus f(z \oplus a)$ függvény ki-egyensúlyozott. Vizsgáljuk meg, hogy mely vektorokra nem teljesül:

$$\sum_{z \in \{0, 1\}^{n+m}} (-1)^{f(z) \oplus f(z \oplus a)} = 0.$$

Az előző megfontolások miatt

$$\sum_{z \in \{0, 1\}^{n+m}} (-1)^{f(z) \oplus f(z \oplus a)} = \sum_{x \in \{0, 1\}^n} \sum_{y \in \{0, 1\}^m} (-1)^{g_1(x) \oplus g_2(y) \oplus g_1(x \oplus a_x) \oplus g_2(y \oplus a_y)}.$$

A szummázás sorrendje felcserélhető, a szummázásbeli konstansok kiemelhetők és így kapjuk, hogy:

$$\begin{aligned} &\sum_{z \in \{0, 1\}^{n+m}} (-1)^{f(z) \oplus f(z \oplus a)} = \\ &= \sum_{y \in \{0, 1\}^m} (-1)^{g_2(y) \oplus g_2(y \oplus a_y)} \left(\sum_{x \in \{0, 1\}^n} (-1)^{g_1(x) \oplus g_1(x \oplus a_x)} \right). \end{aligned}$$

Mivel a g_1 függvény differenciálisan egyenletes, ezért az $a_x = (0, 0, \dots, 0)$ vektor kivételével mindenütt kielégíti a terjedési kritériumot, vagyis az x -re való szumma

az $a_x = (0, 0, \dots, 0)$ kivételével mindenütt zérus, az $a_x = (0, 0, \dots, 0)$ helyen pedig 2^n értéket ad. A 11. következmény jelölését alkalmazva az \mathfrak{R} halmaz elemei legfeljebb a $\{0, 1\}^m$ tér vektorai a $(0, 0, \dots, 0) \in \{0, 1\}^n$ ponttal összefűzve, ezek viszont kielégítik a 11. következmény feltételeit $t = 0$ értékkel. Ezzel tehát az f függvény nem-linearitására adódó érték:

$$N_f = 2^{n+m-1} - 2^{\frac{1}{2}(n+m-1)}. \quad \square$$

A [8]-ban, illetve a jelen leírásban található példák az 1. Lemma stílusában a következő adatokkal adhatók meg.

1. Ha $g_2(x_0) \equiv 0$, akkor $f(g_1, g_2) : \{0, 1\}^{n+1} \rightarrow \{0, 1\}$ és visszkapjuk az elsőként említett függvényt, vagyis a differenciálisan egyenletes igazságtábla másolását.
2. Ha $m = 1$, és $g_2(x_0) = x_0$ akkor $f(g_1, g_2) : \{0, 1\}^{n+1} \rightarrow \{0, 1\}$ megkapjuk a differenciálisan egyenletes igazságtábla negáltjának másolását, és ezzel a [8] második példáját.
3. Ha $m = 5$ és $g_2 = (1 \oplus x_0)(1 \oplus x_1)x_2 \oplus (1 \oplus x_0)x_1x_3 \oplus x_0(1 \oplus x_1)(x_2 \oplus x_3) \oplus x_0x_1(x_3 \oplus x_4)$ akkor a [8]-ban tárgyalt 1. példát kapjuk.

A [8] 3. példát a [6] 2. lemma motiválja. Ezt a lemmát g_i -t tekintve konstrukciós nézőpontból fogalmazzuk.

2. LEMMA. Legyen $m \leq n$,

1. $g_i : \{0, 1\}^m \rightarrow \{0, 1\}$ $i = 0, 1, \dots, 2^m - 1$, $x \in \{0, 1\}^m$ -re

$$g_i(x) = \begin{cases} 1 & \text{ha } x = i, \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

2. $f_{a_i} : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$, $a_i \in \{0, 1\}^n$ $a_i = 0, 1, \dots, 2^m - 1$ olyan lineáris függvény, amelynek együtthatói az a_i egész szám bináris alakját adják, vagyis $y \in \{0, 1\}^n$ -re $f_{a_i} = a_i y$, és a kiegyensúlyozottság megtartása érdekében vehető $a_i = 1, \dots, 2m$.

Ekkor az $f : \{0, 1\}^{n+m} \rightarrow \{0, 1\}$, amelyet az f_{a_i} és g_i függvényekből a [6] cikk 2. lemmája alapján a következő módon képezünk

$$f = \bigoplus_{i=0}^{2^m-1} g_i f_{a_i}$$

olyan függvény, hogy nem-linearitásának értéke:

$$m = n \text{ esetén } N_f = 2^{n+m-1} - 2^{\frac{1}{2}(n+m)}$$

és

$$m = n - 1 \quad \text{esetén} \quad N_f = 2^{n+m-1} - 2^{\frac{1}{2}(n+m-1)}.$$

Bizonyítás. Legyen

$$x \in \{0, 1\}^m, \quad x = (x_0, x_1, \dots, x_{m-1}),$$

$$y \in \{0, 1\}^n, \quad y = (y_0, y_1, \dots, y_{n-1}),$$

$$z \in \{0, 1\}^{m+n}, \quad z = (x_0, x_1, \dots, x_{m-1}, y_0, y_1, \dots, y_{n-1}) = (x, y),$$

és

$$a \in \{0, 1\}^n, \quad a = (a_{x_0}, \dots, a_{x_{m-1}}, a_{y_0}, \dots, a_{y_{n-1}}) = (a_x, a_y), \quad a_x \in \{0, 1\}^n$$

pedig az $x = i$ értéknek megfelelő lineáris függvény együtthatóinak vektora. Az f által generált függvény:

$$\bar{f}(z) = (-1)^{\bigoplus_{i=0}^{2^n-1} f_{a_i}(y)g_i(x)}.$$

Vizsgáljuk, hogy mely $a \in \{0, 1\}^{n+m}$ vektorok esetében nem elégíti ki az f függvény a terjedési kritériumot. A terjedési kritérium teljesítése azt jelenti, hogy

$$\begin{aligned} \sum_{z \in \{0,1\}^{n+m}} (-1)^{f(z) \oplus f(z \oplus a)} &= 0. \\ \sum_{z \in \{0,1\}^{n+m}} (-1)^{f(z) \oplus f(z \oplus a)} &= \\ &= \sum_{x \in \{0,1\}^m, y \in \{0,1\}^n} (-1)^{f(x,y) \oplus f((x,y) \oplus (a_x, a_y))} = \\ &= \sum_{x=0}^{2^m-1} \left(\sum_{y=0}^{2^n-1} (-1)^{f(x,y) \oplus f((x,y) \oplus (a_x, a_y))} \right) = \\ &= \sum_{x=0}^{2^m-1} \left(\sum_{y=0}^{2^n-1} (-1)^{\left(\bigoplus_{i=0}^{2^m-1} g_i(x) f_{a_i}(y) \right) \oplus \left(\bigoplus_{i=0}^{2^m-1} g_i(x \oplus a_x) f_{a_i}(y \oplus a_y) \right)} \right) = \\ &= \sum_x \sum_y (-1)^{f_{a_x}(y)} (-1)^{f_{a_x \oplus a_x}(y \oplus a_y)} = \sum_x \sum_y (-1)^{a_x y} (-1)^{a_x \oplus a_x y \oplus a_x \oplus a_x a_y}. \end{aligned}$$

A szumma konstansait kiemelve kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \sum_{z \in \{0,1\}^{n+m}} (-1)^{f(z) \oplus f(z \oplus a)} &= \sum_x (-1)^{a_x \oplus a_x a_y} \sum_y (-1)^{(a_x \oplus a_x \oplus a_x) y} \\ \sum_y (-1)^{(a_x \oplus a_x \oplus a_x) y} &= \begin{cases} \pm 2^n & \text{ha } (a_x \oplus a_x \oplus a_x) = 0, \\ 0 & \text{különben} \end{cases} \end{aligned}$$

és

$$\sum_x (-1)^{a_x \oplus a_x a_y} = \begin{cases} \pm 2^m & \text{ha } a_y = 0, \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

Ekkor azonban azok a vektorok, amelyekre az f nem elégíti ki a terjedési kritériumot:

1. $m = n$ esetén a $(0, \dots, 0)$ vektor, és az eredmény f függvény differenciálisan egyenletes,
2. $m = n - 1$ esetén azok a $z \in \{0, 1\}^{2^{n-1}}$ vektorok, amelyekre $a_x = (0, \dots, 0)$ és $a_y = (0, \dots, 0)$ illetve $a_x = (0, \dots, 0)$ és $a_y = (1, 0, \dots, 0)$ teljesül, ezen vektorok viszont kielégítik a 11. következmény feltételeit, és így a tétel állítása igaz,
3. $m < n - 1$ esetében annyit mondhatunk, hogy $a_x = (0, \dots, 0)$ és $a_y = (y_0, \dots, y_{n-m-1}, 0, \dots, 0)$. Ilyen vektor pedig pontosan 2^{n-m} darab van. \square

Megjegyezzük, hogy az $m = n - 1$ eset felel meg a [8]-beli 3. példának.

3. Speciális tulajdonságú függvények vizsgálata

Ha meg akarjuk állapítani, hogy egy függvény milyen messze van az affin függvények halmazától, vagyis keressük nem-linearitásának mértékét, akkor általában az alábbiakat vizsgáljuk:

1. a terjedési kritérium teljesülését,
2. az adott f függvény által generált \bar{f} függvény Walsh-transzformáltját.

Az első esetben a Boole-derivált viselkedését, a második esetben pedig azt vizsgáljuk, hogy az illető függvénynek a lineáris függvényekkel való korrelációja hogyan alakul. Az előbbieken már említettük, hogy a $\{0, 1\}^n$ tér pontjainak segítségével előállítható az adott tér összes lineáris függvénye, hiszen a lineáris függvényt egy skaláris szorzatnak tekinthetjük, mégpedig egy adott a vektor és az x változó skaláris szorzataként. Ekkor a lineáris függvény együtthatói az adott a vektor komponensei az a szám bináris előállítását adják. Az Hadamard-mátrix sorai pedig megjelenítik az adott Boole-tér összes lineáris függvénye által generált $\{-1, 1\}$ sorozatokat. Érdemes megvizsgálni, hogy egy függvény a Boole-tér mely pontjai által képviselt lineáris függvényekkel nem korrelál, illetve melyek azok a lineáris függvények, amelyekkel számított korreláció nem zérus. A következő 3. Lemma a függvények viselkedését ilyen szempontból vizsgálja.

3. LEMMA. Legyen $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$, amelynek korrelációja a lineáris függvényekkel csak a 0 illetve $\pm C$ értékeket veszi fel, és azon lineáris függvények száma, amelyekkel a korreláció nem zérus 2^{2m} . Ekkor $C = \pm 2^{\frac{2n-2m}{2}} = \pm 2^{n-m}$.

Bizonyítás. A Parseval egyenlőség alkalmazásával:

$$\sum_{a \in \{0,1\}^n} \overline{f}(a)^2 = 2^n \sum_{x \in \{0,1\}^n} \overline{f}(x)^2 \Rightarrow \sum_{a, \overline{f}(a) \neq 0} C^2 + \sum_{a, \overline{f}(a)=0} 0 = 2^{2n}$$

$$2^{2m} C^2 = 2^{2n} \Rightarrow C = \pm 2^{\frac{2n-2m}{2}} = \pm 2^{n-m},$$

és ezzel az állítást bizonyítottuk. \square

Az eddigiekben tárgyalt függvényekre a 3. Lemma a következőképpen alkalmazható:

1. a differenciálisan egyenletes függvények esetében $2m = n$, és $c(f, ax) = \pm 2^{\frac{n}{2}}$ minden a -ra;
2. nagymértékben nemlineáris páratlan dimenziójú függvényekre $2m = n - 1$, és

$$c(f, ax) = \begin{cases} \pm 2^{\frac{n+1}{2}}, \\ 0; \end{cases}$$

3. affin függvények esetén $2m = 0$, és $c(f, ax) = \pm 2^n$ ha $f = ax$ és 0 különben.

A 3. Lemma feltételeit teljesítő függvények nem zérus lineáris struktúráinak számára ad felső korlátot a

4. LEMMA. Legyen $f : \{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}$ olyan, hogy a lineáris függvényekkel vett korrelációja csak a 0 vagy $\pm C$ értéket veszi fel, és azon lineáris függvények száma, amelyekkel a korreláció értéke nem zérus 2^{2m} . Ekkor az f nem zérus lineáris struktúráinak száma legfeljebb $L = 2^{n-2m} - 1$.

Bizonyítás. Induljunk ki a Wiener-Khintchine összefüggésből:

$$(\overline{f}(x)\overline{f}(x \oplus a_0), \dots, \overline{f}(x)\overline{f}(x \oplus a_{2^n-1}))H_n = ((\overline{f}(x)l_0)^2, \dots, (\overline{f}(x)l_{2^n-1})^2),$$

Az egyenlőség baloldalán a beszorzás eredménye:

$$\begin{aligned} & (\overline{f}(x)\overline{f}(x \oplus a_0), \dots, \overline{f}(x)\overline{f}(x \oplus a_{2^n-1}))H_n = \\ & = \left(\sum_{a=0}^{2^n-1} \overline{f}(x)\overline{f}(x \oplus a)(-1)^{aa_0}, \dots, \sum_{a=0}^{2^n-1} \overline{f}(x)\overline{f}(x \oplus a)(-1)^{aa_{2^n-1}} \right). \end{aligned}$$

Emeljük négyzetre a kiindulási egyenlőség mindkét oldalát:

$$\sum_{y=0}^{2^n-1} \left(\sum_{a=0}^{2^n-1} \overline{f}(x)\overline{f}(x \oplus a)(-1)^{ay} \right) \left(\sum_{b=0}^{2^n-1} \overline{f}(x)\overline{f}(x \oplus b)(-1)^{by} \right) = \sum_{i=0}^{2^n-1} (\overline{f}(x)l_i)^4,$$

az egyenlőség baloldalát tovább alakítva kapjuk:

$$2^n \sum_{a=0}^{2^n-1} \bar{f}(x) \bar{f}(x \oplus a)^2 = \sum_{i=0}^{2^n-1} (\bar{f}(x) l_i)^4.$$

A baloldali szumma két részre bontható, $a = 0$ esetén a zárójelben lévő kifejezés értéke $\pm 2^n$, ezt négyzetre emelve az eredmény 2^{2n} . A jobboldalon a következő megfontolás alapján okoskodhatunk: az f olyan, hogy a lineáris függvényekkel vett korrelációja 2^{2m} pontban $\pm 2^{n-m}$ értékű, a többi helyen 0. Így a fenti egyenlet

$$2^n \left(2^{2n} + \sum_{a=1}^{2^n-1} (\bar{f}(x) \bar{f}(x \oplus a))^2 \right) = 2^{2m} 2^{4n-4m} = 2^{4n-2m}$$

alakú lesz. További átalakítás eredménye:

$$\sum_{a=1}^{2^n-1} (\bar{f}(x) \bar{f}(x \oplus a))^2 = \frac{2^n - 2^{2m}}{2^{2m}} 2^{2n} = (2^{n-2m} - 1) 2^{2n}. \quad \square$$

Az eddig általunk vizsgált függvényekre ezek alapján a következőt mondhatjuk:

1. differenciálisan egyenletes függvények esetében $2m = n$, $c(f, ax) = \pm 2^{\frac{n}{2}}$ minden a -ra, és a nem zérus lineáris struktúrák száma $L = 2^{n-2m} - 1 = 2^0 - 1 = 0$;
2. nagymértékben nemlineáris páratlan dimenziójú függvényekre $2m = n - 1$,

$$c(f, ax) = \begin{cases} \pm 2^{\frac{n+1}{2}} \\ 0 \end{cases}$$
 és a nem zérus lineáris struktúrák száma legfeljebb
 $L = 2^{n-2m} - 1 = 2^1 - 1 = 1$;
3. affin függvények esetén $2m = 0$, és a nem zérus lineáris struktúrák száma legfeljebb $L = 2^{n-0} - 1 = 2^n - 1$.

A bemeneti változók affin transzformációja nem változtatja a függvények azon tulajdonságát, hogy a lineáris függvényekkel vett korrelációjuk csak 0 vagy $\pm C$ értéket vesz fel.

5. LEMMA. Legyen az $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ olyan, hogy a lineáris függvényekkel vett korrelációja csak a 0 illetve $\pm C$ értéket veszi fel, és 2^{2m} azon lineáris függvények száma, amelyekkel a korreláció nem zérus. Legyen A egy $n \times n$ méretű, nem szinguláris mátrix a $GF(2)$ felett. Akkor bármely $x, b \in \{0, 1\}^n$ esetén a $g(x) = f(Ax + b)$ függvényre is igaz, hogy a lineáris függvényekkel vett korrelációja csak a 0 vagy $\pm C$ értéket veszi fel, és a nem zérus értéket adó lineáris függvények száma 2^{2m} .

Bizonyítás. Legyen $y = Ax \oplus b$ és l_a a H_n mátrix $a \in \{0, 1\}^n$ -hez tartozó sora, amely nem más, mint az ax lineáris függvény által generált $\{-1, 1\}$ sorozat.

$$\bar{g}(x)l_a = \sum_{x \in \{0,1\}^n} (-1)^{g(x) \oplus ax} = \sum_{x \in \{0,1\}^n} (-1)^{f(Ax \oplus b) \oplus ax}.$$

Mivel A nem szinguláris, ezért létezik

$$x = A^{-1}(y \oplus b).$$

Az $aA^{-1}(y \oplus b)$ függvény affín, tehát van olyan $c \in \{0, 1\}^n$, hogy

$$aA^{-1}(y \oplus b) = cy \oplus d.$$

Így

$$\begin{aligned} & \sum_{x \in \{0,1\}^n} (-1)^{f(Ax \oplus b) \oplus ax} = \\ &= \sum_{y \in \{0,1\}^n} (-1)^{f(y) \oplus aA^{-1}(y \oplus b)} = \sum_{y \in \{0,1\}^n} (-1)^{f(y) \oplus cy \oplus d} = (-1)^d c(f, ax). \quad \square \end{aligned}$$

A 4. és 5. Lemmában a függvényeket a lineáris függvényekkel mutatott korrelációjuk szempontjából vizsgáltuk. A továbbiakban is ezt tekintjük a vizsgálódás alapjának. A páratlan dimenziójú (n páratlan), függvények közül azok vannak leg-távolabb a lineáris függvényektől, amelyeknek a lineáris függvények felével vett korrelációja nem 0. Más szóval: amelyek kielégítik a 3. Lemma feltételeit, és teljesül, hogy $2m = n - 1$.

6. TÉTEL. Tegyük fel, hogy a g_1 és $g_2 : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ függvényeknek a lineáris függvényekkel vett korrelációja csak 0 illetve $\pm C$ értékű, és a nem zérus korrelációt mindkét függvény 2^{2m} esetben veszi fel. Tekintsük a $\{0, 1\}^n$ -en létező lineáris függvényeknek azt a részhalmazát, amelynek elemeivel a g_1 függvény korrelációja nem 0, és tekintsük azt a részhalmazt, amelynek elemeivel a g_2 függvény korrelációja nem 0. A lineáris függvényeknek ez a két halmaza akkor és csak akkor diszjunkt, ha

$$(\bar{g}_1(x)l_i)^2 + (\bar{g}_2(x)l_i)^2 = 2^{2n-2m}$$

minden $i = 0, 1, \dots, 2^n - 1$ esetben.

Megjegyzés. A két függvényhalmaz diszjunkttságán azt értjük, hogy $(\bar{g}_1(x)l_i)^2 = 0$ -ból következik $(\bar{g}_2(x)l_i)^2 \neq 0$ és fordítva.

Bizonyítás. A bizonyítás két lépésben történik.

1. A feltétel szükséges.

Ha mindkét függvény olyan, hogy a lineáris függvényekkel vett korrelációjuk csak 0 vagy $\pm C$ értékű, és a nem zérus értéket 2^{2m} esetben veszik fel, akkor

$$(\bar{g}_1(x)l_i)^2 = \begin{cases} 2^{2n-2m} \\ 0, \end{cases} \quad (\bar{g}_2(x)l_i)^2 = \begin{cases} 2^{2n-2m} \\ 0. \end{cases}$$

Mivel a függvényekre igaz, hogy valahányszor $(\bar{g}_2(x)l_i)^2 = 0$, akkor $(\bar{g}_1(x)l_i)^2 = 2^{2n-2m}$, illetve fordítva ha $(\bar{g}_1(x)l_i)^2 = 0$, akkor $(\bar{g}_2(x)l_i)^2 = 2^{2n-2m}$ ezért

$$(\bar{g}_1(x)l_i)^2 + (\bar{g}_2(x)l_i)^2 = 2^{2n-2m}$$

minden $i = 0, 1, \dots, 2^n - 1$ esetén teljesül.

2. A feltétel elégséges.

Ha teljesül

$$(\bar{g}_1(x)l_i)^2 + (\bar{g}_2(x)l_i)^2 = 2^{2n-2m} = 2^{2(n-m)}$$

minden $i = 0, 1, \dots, 2^n - 1$ esetén, akkor a [8] 9. lemmáját alkalmazhatjuk. A $2(n-m)$ érték minden esetben páros, a fenti egyenlőség tehát vagy $(\bar{g}_1(x)l_i) = 0$ és $(\bar{g}_2(x)l_i) = \pm 2^{n-m}$ vagy $(\bar{g}_2(x)l_i) = 0$ és $(\bar{g}_1(x)l_i) = \pm 2^{n-m}$ mellett teljesül. Ez viszont azt jelenti, hogy a két függvénynek a lineáris függvényekkel vett korrelációja sosem veheti fel azonos lineáris függvényre ugyanazt az abszolút értéket. \square

7. TÉTEL. Tegyük fel, hogy a g_1 és $g_2 : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ függvényeknek a lineáris függvényekkel vett korrelációja csak 0 illetve $\pm C$ értékű, és a nem zérus korrelációt mindkét függvény 2^{2m} esetben veszi fel. Tekintsük a $\{0, 1\}^n$ -en létező lineáris függvényeknek azt a részhalmazát, amelynek elemeivel a g_1 függvény korrelációja nem 0, és tekintsük azt a részhalmazt, amelynek elemeivel a g_2 függvény korrelációja nem 0. A lineáris függvényeknek ez a két halmaza akkor és csak akkor diszjunkt, ha minden $b \in \{0, 1\}^n$ $b \neq 0$ esetén

$$\bar{g}_1(x)\bar{g}_1(x \oplus b) + \bar{g}_2(x)\bar{g}_2(x \oplus b) = 0.$$

Bizonyítás. Mindkét függvényre alkalmazható a Wiener-Khintchine összefüggés:

$$(\bar{g}_1(x)\bar{g}_1(x \oplus b_0), \dots, \bar{g}_1(x)\bar{g}_1(x \oplus b_{2^n-1}))H_n = ((\bar{g}_1(x)l_0)^2, \dots, (\bar{g}_1(x)l_{2^n-1})^2),$$

$$(\bar{g}_2(x)\bar{g}_2(x \oplus b_0), \dots, \bar{g}_2(x)\bar{g}_2(x \oplus b_{2^n-1}))H_n = ((\bar{g}_2(x)l_0)^2, \dots, (\bar{g}_2(x)l_{2^n-1})^2).$$

A két egyenletet összeadva, H_n -nel beszorozva és 2^n -nel osztva kapjuk:

$$\begin{aligned} & ((\bar{g}_1(x)\bar{g}_1(x \oplus b_0) + \bar{g}_2(x)\bar{g}_2(x \oplus b_0)), \dots, \\ & (\bar{g}_1(x)\bar{g}_1(x \oplus b_{2^n-1}) + \bar{g}_2(x)\bar{g}_2(x \oplus b_{2^n-1}))) = \\ & = \left(((\bar{g}_1(x)l_0)^2 + (\bar{g}_2(x)l_0)^2), \dots, ((\bar{g}_1(x)l_{2^n-1})^2 + (\bar{g}_2(x)l_{2^n-1})^2) \right) H_n 2^{-n}. \end{aligned}$$

Tekintsük ezek után az állítás szükséges és elégséges voltának bizonyítását.

1. A feltétel szükséges.

Ha mindkét függvény olyan, hogy $(\bar{g}_2(x)l_i)^2 = 0$ -ból következik $(\bar{g}_1(x)l_i)^2 \neq 0$ és megfordítva, akkor a 6. Tétel szerint a kapott egyenlőség jobboldalán a vektor mindegyik eleme 2^{2n-2m} értékű, és ezzel

$$\begin{aligned} & ((\bar{g}_1(x)\bar{g}_1(x \oplus b_0) + \bar{g}_2(x)\bar{g}_2(x \oplus b_0)), \dots, \\ & (\bar{g}_1(x)\bar{g}_1(x \oplus b_{2^n-1}) + \bar{g}_2(x)\bar{g}_2(x \oplus b_{2^n-1}))) = \\ & = 2^{2n-2m}(1, \dots, 1)H_n 2^{-n}, \end{aligned}$$

Ekkor viszont:

$$(\bar{g}_1(x)\bar{g}_1(x \oplus b_j) + \bar{g}_2(x)\bar{g}_2(x \oplus b_j)) = 2^{2n-2m} \quad \text{ha } j = 0$$

és

$$(\bar{g}_1(x)\bar{g}_1(x \oplus b_j) + \bar{g}_2(x)\bar{g}_2(x \oplus b_j)) = 0 \quad \text{ha } j \neq 0.$$

2. A feltétel elégséges.

Tegyük fel, hogy minden $b \in \{0, 1\}^n$, $b \neq 0$ -ra teljesül, hogy $(\bar{g}_1(x)\bar{g}_1(x \oplus b) + \bar{g}_2(x)\bar{g}_2(x \oplus b)) = 0$. Induljunk ki a két függvényre felírt Wiener–Khintchine egyenletből, amelyeket összeadtunk és megszoroztunk H_n -nel:

$$\begin{aligned} & 2^n ((\bar{g}_1(x)\bar{g}_1(x \oplus b_0) + \bar{g}_2(x)\bar{g}_2(x \oplus b_0)), \dots, \\ & (\bar{g}_1(x)\bar{g}_1(x \oplus b_{2^n-1}) + \bar{g}_2(x)\bar{g}_2(x \oplus b_{2^n-1}))) \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix} = \\ & = \left(((\bar{g}_1(x)l_0)^2 + (\bar{g}_2(x)l_0)^2), \dots, ((\bar{g}_1(x)l_{2^n-1})^2 + (\bar{g}_2(x)l_{2^n-1})^2) \right) H_n. \end{aligned}$$

Elvégezve a beszorzást az eredményül kapott vektor j -edik eleme:

$$2^n((\bar{g}_1(x)\bar{g}_1(x+b_j)) + (\bar{g}_2(x)\bar{g}_2(x+b_j))) = \sum_{i=0}^{2^n-1} ((\bar{g}_1 l_i)^2 + (\bar{g}_2 l_i)^2)(-1)^{a_i b_j}.$$

Figyelembe véve, hogy minden $j \neq 0$ esetén teljesül

$$(\bar{g}_1(x)\bar{g}_1(x \oplus b) + \bar{g}_2(x)\bar{g}_2(x \oplus b)) = 0,$$

ezért adódik, hogy

- (a) ha $j \neq 0$, akkor a vektor elemei 0 értékűek;
- (b) ha $j = 0$, akkor $\bar{g}_1(x)\bar{g}_1(x \oplus b_0) = 2^n$ és $\bar{g}_2(x)\bar{g}_2(x \oplus b_0) = 2^n$. Ezzel

$$\sum_{i=0}^{2^n-1} ((\bar{g}_1(x)l_i)^2 + (\bar{g}_2(x)l_i)^2) = 2^n 2^{n+1}.$$

Felhasználva, hogy $2m = n - 1$, vagyis $n + 1 = 2n - 2m$ adódik, hogy a szumma minden tagja

$$(\bar{g}_1(x)l_i)^2 + (\bar{g}_2(x)l_i)^2 = 2^{2n-2m}$$

ami viszont a 6. Tétel alapján bizonyítja az állítást. □

A fent említett tulajdonságok illusztrálására álljon itt egy konkrét példa, amely a könnyebb számolhatóság kedvéért 3 változós függvényeket mutat be.

	l_0	l_1	l_2	l_3	l_4	l_5	l_6	l_7	$g_1(x)$	$\bar{g}_1(x)$	$g_2(x)$	$\bar{g}_2(x)$
000	1	1	1	1	1	1	1	1	1	-1	1	-1
001	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	0	1	1	-1
010	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	-1	1	-1
011	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	0	1	1	-1
100	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	0	1	1	-1
101	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1
110	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	-1	0	1
111	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	0	1	0	1
$\bar{g}_1(x)l_i$	0	-4	0	4	0	-4	0	-4				
$\bar{g}_2(x)l_i$	-4	0	-4	0	-4	0	4	0				

Összefoglalás

A dolgozatban bemutatott eredmények a nagymértékben nemlineáris függvények szerkesztésére adnak módszert. Az 1. Lemma általánosan fogalmaz meg egy, az irodalomból ismert példát, a 2. Lemma pedig más megvilágításba helyez korábbi eredményeket. Az 1. és 2. Lemma megalapozza, hogy egészen enyhe feltételeket kielégítő függvényeket alkalmazhassunk nagymértékben nemlineáris függvények szerkesztésére. A szuperpozíció, mint szerkesztési elv választ adhat arra a kérdésre, hogy a kriptográfiai alkalmazásokban kívánatos függvények besorolhatók-e valamely speciális Boole-függvény osztályba. A 4. Lemma segítségével adott tulajdonságú Boole-függvények nem zérus lineáris struktúráinak számára vonatkozó felső korlátot sikerült megadni. A 6. és 7. Tétel szükséges és elégséges feltételt ad, olyan nagymértékben nemlineáris függvenypárok létezésére, amelyek teljesítik azt a feltételt, hogy egy adott lineáris függvénnyel számított korrelációjuk sohasem veszi fel ugyanazt az abszolút értéket.

Köszönetnyilvánítás

Köszönetemet szeretném kifejezni Dr. Nemetz Tibor Professzor úrnak, és Pásztor-Varga Katalin egyetemi docens asszonynak, akik buzdításaiikkal és értékes szakmai tanácsaikkal segítették munkámat.

Hivatkozások

- [1] Adams, C. M. and Tavares, S. E., *Generating and Counting binary bent sequences*, IEEE Transactions on Information Theory, IT-36 No. 5: (1990), 1170–1173.
- [2] Beauchamp, K. G., *Walsh Functions and their Applications* (Academic Press, London, New York, San Francisco, 1975).
- [3] Pásztor-Varga, K., Boole függvények Boole algebrájának struktúrális tulajdonságait felhasználó Boole függvény optimalizációs módszer, *Alkalmazott Matematikai Lapok* **13** (1987-088), 69–76.
- [4] Rothaus, O. S., On “Bent” Functions, *Journal of Combinatorial Theory, Ser. A* **20** (1976), 300–305.
- [5] Siegenthaler, T., *Correlation-immunity of nonlinear combining functions for cryptographic applications*, IEEE Transactions on Information Theory, IT-30 No. 5: (1984), 776–779.
- [6] Seberry, J., Zhang, X. M. and Zheng, Y., Nonlinearity and propagation characteristics of balanced Boolean functions, *Information and Computation* **119**(1) (1995), 1–13.
- [7] Vajda, I., Buttyán, L. és Szekeres, B., *Az algoritmikus adatvédelem módszerei*, Technical University of Budapest, nem publikált kézirat.

- [8] Zhang, X. M. - Zheng, Y., *New lower bounds on Nonlinearity and class of highly nonlinear functions* Information Security and Privacy, Second Australian Conference Sidney, Australia, July 1997, Lecture Notes in Computer Science 1270, 147–158, 1(1), 1–13 (Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1997).

(Beérkezett: 2000. december 14.)

BUDAPESTI GAZDASÁGI FŐISKOLA KERESKEDELMETI
VENDÉGLÁTÓIPARI ÉS IDEGENFORGALMI KAR
INFORMATIKAI INTÉZET
1054 BUDAPEST, V. ALKOTMÁNY UTCA 9–11.
LICSKO@MAILBOX.HU

CHARACTERISTICS OF HIGHLY NONLINEAR FUNCTIONS

ILDIKÓ LICSKÓ

The highly nonlinear odd-dimensional Boolean-functions have great importance in cryptography, that is why the research of that function-classes is one of the most interesting topic. This study focuses on some types of functions having special characteristics in the class of highly nonlinear odd-dimensional Boolean-functions. Upper bound can be given for the number of non-zero linear structures of such functions and regarding them as mappings some functional-relations can be proved. The paper examines pairs of highly nonlinear functions having the property that their correlation with a given linear function never takes the same absolute value. Sufficient and necessary conditions are given for existing of such function-pairs.

EGY TÖBBVÁLTOZÓS HASZNOSSÁGI FÜGGVÉNY

MÁDI-NAGY GERGELY ÉS PRÉKOPA ANDRÁS

Budapest

Egy $u(z)$ hasznossági függvénytől általában azt szokták megkövetelni, hogy teljesüljenek az $u'(z) \geq 0$, $u''(z) \leq 0$ feltételek, vagyis hogy $u(z)$ növekvő és konkáv legyen. Egyes szerzők azonban azt is megkívánják, hogy az egymás utáni deriváltak alternálva pozitívak illetve negatívak legyenek: $u'(z) \geq 0$, $u''(z) \leq 0$, $u'''(z) \geq 0$, $u^{(4)}(z) \leq 0$, \dots . Egy $u(z_1, \dots, z_s)$ többváltozós hasznossági függvénnyel kapcsolatban, a fentieknek megfelelően megkívánhatjuk azt, hogy mindegyik változójában növekvő és az összes változóban együttesen konkáv legyen, illetve megkívánhatjuk még azt is, hogy a függvény valamennyi páratlan (páros) rendű vegyes parciális deriváltja pozitív (negatív) legyen. A dolgozat célja kettős. Egyfelől konstruálunk egy, az erősebb feltételnek eleget tevő, $u(z_1, \dots, z_s)$ hasznossági függvényt. Másfelől, a véletlen X_1, \dots, X_s vagyoni értékekkel vett $u(X_1, \dots, X_s)$ valószínűségi változó várható értékére szoros alsó és felső korlátot adunk, midőn valószínűségi változóink diszkrétnek, együttes eloszlásuk ismeretlen, viszont ismertek azok bizonyos többdimenziós momentumai.

1. A többváltozós hasznossági függvény

Egy $u(z)$ egyváltozós hasznossági függvénnyel kapcsolatban megköveteljük, hogy teljesüljön az alábbi

H1 FELTÉTEL. $u'(z) \geq 0$, $u''(z) \leq 0$.

A legtöbb hasznossági függvény esetében ezek az egyenlőtlenségek szigorú értelemben teljesülnek.

Egyes szerzők a fentinel erősebb feltétel teljesülését kívánják meg, nevezetesen az alábbi.

H2 FELTÉTEL. $u'(z) \geq 0$, $u''(z) \leq 0$, $u'''(z) \geq 0$, $u^{(4)}(z) \leq 0$, \dots , tehát a páratlan (páros) rendű deriváltak nemnegatívak (nempozitívak).

Az $u(z_1, \dots, z_s)$ többváltozós hasznossági függvények esetében a H1 Feltételnek az alábbi feleltethető meg:

H3 FELTÉTEL. Az $u(z_1, \dots, z_s)$ függvény növekvő mindegyik változójában és konkáv, mint s -változós függvény.

Ennél szigorúbb az alábbi

H4 FELTÉTEL. Az $u(z_1, \dots, z_s)$ függvény növekvő minden változójában, konkáv, mint s -változós függvény, továbbá az összes (tisztá vagy vegyes) páratlan rendű deriváltak nemnegatívak, a páros rendű deriváltak pedig nempozitívak.

Ebben a szakaszban analitikus formában megadunk egy a H4 Feltételnek eleget tevő függvényt. Ez a következő:

$$(1.1) \quad u(z_1, \dots, z_s) = \log [k(e^{\alpha_1 z_1 + a_1} - 1) \cdots (e^{\alpha_s z_s + a_s} - 1) - 1],$$

ahol $k \geq 1$, $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ pozitív, a_1, \dots, a_s pedig nemnegatív állandók, a függvény értelmezési tartománya pedig a

$$(1.2) \quad \{(z_1, \dots, z_s) \mid e^{\alpha_i z_i + a_i} > 2, i = 1, \dots, s\}$$

halmaz. Az (1.1) függvény meghatározásához az ötletet az úgynevezett Frank-féle függvény adta pl. Bowers Jr. et al. [1], melyet azonban lényegesen átalakítottunk.

Nyilvánvaló, hogy az $u(z_1, \dots, z_s)$ függvény az értelmezési tartományában mindegyik változója szerint (mint egyváltozós függvény) szigorúan növekvő. Nem nyilvánvaló, de igaz az állítás is, hogy az (1.1) függvény az értelmezési tartományában konkáv. Ennek bizonyításához szükségünk lesz a logaritmikusan konkáv (logkonkáv) függvény fogalmára és egyszerű tulajdonságaira.

1.1. Definíció. Tegyük fel, hogy $D \subset \mathbb{R}^s$ konvex halmaz és f a D halmazon értelmezett nemnegatív értékű függvény. Az f függvényt logkonkávnak nevezzük, ha bármely $x, y \in D$ és $0 < \lambda < 1$ esetén fennáll az

$$(1.3) \quad f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq [f(x)]^\lambda [f(y)]^{1-\lambda}$$

egyenlőtlenség. Ha az (1.3) relációban a fordított irányú egyenlőtlenség érvényes, akkor az f függvényt logkonvexnek nevezzük.

Ha $f(z)$ pozitív értékű a D halmazon, akkor a logkonkavitás egyenértékű azzal, hogy $\log f(z)$ konkáv a D halmazon.

Két logkonkáv függvény szorzata nyilvánvalóan logkonkáv, összegük azonban nem feltétlenül. Az összegre a logkonvex tulajdonság öröklődik, amint az a Hölder egyenlőtlenség segítségével könnyen belátható. Igaz viszont az alábbi

1.1. TÉTEL (Prékopa [3] p. 324, Lemma 11.2.2). Ha az f függvény logkonkáv a D konvex halmazon és $p > 0$ állandó, akkor az $f(z) - p$ függvény logkonkáv az

$$\{z \mid f(z) \geq p\}$$

halmazon.

A tételt nem bizonyítjuk, de megjegyezzük, hogy az egyszerűen bizonyítható a számtani átlag – mértani átlag egyenlőtlenség felhasználásával. Az 1.1. Tételből következik az

1.2. TÉTEL. Az (1.1) függvény konkáv az (1.2) halmazon.

Bizonyítás. Jelölje D az (1.2) halmazt. Minden i esetén az

$$e^{\alpha_i z_i + a_i}$$

függvény logkonkáv a D halmazon, tehát az 1.1. Tétel szerint ugyanez áll az

$$e^{\alpha_i z_i + a_i} - 1$$

függvényre is. Ebből következik, hogy a

$$k(e^{\alpha_1 z_1 + a_1} - 1) \dots (e^{\alpha_s z_s + a_s} - 1)$$

szorzatfüggvény is logkonkáv ugyanott. Mivel pedig (1.2) szerint ennek értéke nagyobb mint 1, az 1.1. Tétel ismételt alkalmazásával következik, hogy az (1.1) függvény konkáv az (1.2) halmazon. \square

Következő tételünk az (1.1) függvény további fontos tulajdonságát mondja ki.

1.3. TÉTEL. Minden $z \in D$ esetén fennáll, hogy

$$\frac{\partial^{i_1 + \dots + i_s} u}{\partial z_1^{i_1} \dots \partial z_s^{i_s}} > 0, \quad \text{ha } i_1 + \dots + i_s \text{ páratlan,}$$

illetve

$$\frac{\partial^{i_1 + \dots + i_s} u}{\partial z_1^{i_1} \dots \partial z_s^{i_s}} < 0, \quad \text{ha } i_1 + \dots + i_s \text{ páros.}$$

Bizonyítás. Egyszerűség kedvéért feltesszük, hogy $k = \alpha_1 = \dots = \alpha_s = 1$, $a_1 = \dots = a_s = 0$. Ez nyilván nem jelent megszorítást, továbbá az is igaz, hogy ennek a feltételnek a figyelembe vételével számított parciális deriváltak képletéből az általános esetre vonatkozó képletek könnyen származtathatók. Szükségünk lesz az alábbi lemmára.

1.1. LEMMA. Tekintsük az

$$f(z) = \log(k(e^z - 1) - 1),$$

függvényt, ahol $k \geq 1$ állandó és $z > \log 2$. Azt állítjuk, hogy

$$(1.4) \quad \frac{df}{dz} = 1 + \left(\frac{k+1}{ke^z - (k+1)} \right)$$

$$\frac{d^i f}{dz^i} = (-1)^{i-1} \sum_{h=1}^i a_h^{(i)} \left(\frac{k+1}{ke^z - (k+1)} \right)^h, \quad i = 2, 3, \dots,$$

ahol az $a_h^{(i)}$ számok az alábbiak:

$$\begin{aligned}
 (1.5) \quad & a_1^{(i)} = 1, \quad i = 2, 3, \dots \\
 & a_1^{(2)} = a_2^{(2)} = 1 \\
 & a_h^{(i)} = a_{h-1}^{(i-1)}(h-1) + a_h^{(i-1)}h, \quad h = 2, \dots, i-1 \\
 & a_i^{(i)} = a_{i-1}^{(i-1)}(i-1).
 \end{aligned}$$

A Lemma bizonyítása. Az elsőrendű deriváltra vonatkozó állítás triviális, és az $i = 2$ esetre vonatkozó formula érvényessége is könnyen ellenőrizhető. Teljes indukciós bizonyítást alkalmazva, tegyük fel, hogy (1.4) második sora igaz valamely $i \geq 2$ esetén. Az (1.4) egyenletek közül az alsót tovább deriválva az adódik, hogy

$$\begin{aligned}
 \frac{d^{(i+1)}f}{dz^{i+1}} &= (-1)^i \sum_{h=1}^i a_h^{(i)} h \left(\frac{k+1}{ke^z - (k+1)} \right)^{h-1} \frac{(k+1)ke^z}{(ke^z - (k+1))^2} = \\
 &= (-1)^i \sum_{h=1}^i a_h^{(i)} h \left(\frac{k+1}{ke^z - (k+1)} \right)^{h-1} \left(\frac{k+1}{ke^z - (k+1)} + \left(\frac{k+1}{ke^z - (k+1)} \right)^2 \right) = \\
 &= (-1)^i \left[\sum_{h=1}^i a_h^{(i)} h \left(\frac{k+1}{ke^z - (k+1)} \right)^h + \sum_{h=1}^i a_h^{(i)} h \left(\frac{k+1}{ke^z - (k+1)} \right)^{h+1} \right] = \\
 &= (-1)^i \sum_{h=1}^i (a_h^{(i)} h + a_{h-1}^{(i)}(h-1)) \left(\frac{k+1}{ke^z - (k+1)} \right)^h + \\
 &\quad + (-1)^i a_i^{(i)} i \left(\frac{k+1}{ke^z - (k+1)} \right)^{i+1} = \\
 &= (-1)^i \sum_{h=1}^{i+1} a_h^{(i+1)} \left(\frac{k+1}{ke^z - (k+1)} \right)^h.
 \end{aligned}$$

Ezzel a Lemmát bebizonyítottuk.

A Lemmából következik, hogy az $f(z)$ függvény páratlan rendű deriváltjai pozitívak, páros rendű deriváltjai negatívak. Érdeemes megjegyezni, hogy az (1.4) képletek közül a másodikat az $i = 1$ esetre alkalmazva, az elsőhöz képest csak az a különbség, hogy nem adódik hozzá az 1.

Visszatérve a 1.3. Tétel bizonyítására, vezessük be a

$$k_1 = k(e^{z^2} - 1) \cdots (e^{z^s} - 1)$$

jelölést, és rögzítsük a z_2, \dots, z_s változók értékeit. Ekkor az $u(z_1, \dots, z_s)$ függvény egyedül a z_1 változótól függ, és alakja a következő:

$$(1.6) \quad u(z_1, \dots, z_s) = \log(k_1(e^{z_1} - 1) - 1).$$

A Lemma szerint

$$(1.7) \quad \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial z_1} &= 1 + \left(\frac{k_1 + 1}{k_1 e^{z_1} - (k_1 + 1)} \right) \\ \frac{\partial^{i_1} u}{\partial z_1^{i_1}} &= (-1)^{i_1-1} \sum_{h=1}^{i_1} a_h^{(i_1)} \left(\frac{k_1 + 1}{k_1 e^{z_1} - (k_1 + 1)} \right)^h, \quad i_1 \geq 2. \end{aligned}$$

Hasonló formula írható fel a z_1, \dots, z_s változók akármelyike szerint vett derivált esetére. Ebből pedig következik a tétel állítása arra az esetre, amihez csak egy változó szerint vett deriváltat veszünk.

A vegyes deriváltak esetével oly módon foglalkozunk, hogy az (1.7) képleteket átalakítjuk, majd z_2 szerint deriváljuk i_2 rendben, s.i.t.

Vezessük be a

$$k_2 = k(e^{z_1} - 1)(e^{z_3} - 1) \dots (e^{z_s} - 1)$$

jelölést. E jelöléssel az alábbi egyenlőség írható fel:

$$\begin{aligned} k_1 e^{z_1} - (k_1 + 1) &= k_1(e^{z_1} - 1) - 1 = \\ &= k(e^{z_1} - 1)(e^{z_2} - 1) \dots (e^{z_s} - 1) - 1 = \\ &= k_2(e^{z_2} - 1) - 1 = k_2 e^{z_2} - (k_2 + 1). \end{aligned}$$

Ezt figyelembe véve, (1.7) felírható a következő módon:

$$(1.8) \quad \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial z_1} &= 1 + \frac{k_1 + 1}{k_2 + 1} \frac{k_2 + 1}{k_2 e^{z_2} - (k_2 + 1)} \\ \frac{\partial^{i_1} u}{\partial z_1^{i_1}} &= (-1)^{i_1-1} \sum_{h=1}^{i_1} a_h^{(i_1)} \left(\frac{k_1 + 1}{k_2 + 1} \right)^h \left(\frac{k_2 + 1}{k_2 e^{z_2} - (k_2 + 1)} \right)^h, \quad i \geq 2. \end{aligned}$$

Most rögzítsük z_1, z_3, \dots, z_s értékét, és tekintsük az (1.8) formulával adott függvényeket a z_2 változó egyváltozós függvényeinek. Ha vesszük a z_2 szerinti első deriváltat, akkor a h indexhez tartozó tagban azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial z_2} \left(\frac{k_2 + 1}{k_2 e^{z_2} - (k_2 + 1)} \right)^h = \\ &= -h \left(\frac{k_2 + 1}{k_2 e^{z_2} - (k_2 + 1)} \right)^{h-1} \frac{(k_2 + 1)k_2 e^{z_2}}{(k_2 e^{z_2} - (k_2 + 1))^2} = \\ &= -h \left(\frac{k_2 + 1}{k_2 e^{z_2} - (k_2 + 1)} \right)^{h-1} \left(\frac{k_2 + 1}{k_2 e^{z_2} - (k_2 + 1)} + \left(\frac{k_2 + 1}{k_2 e^{z_2} - (k_2 + 1)} \right)^2 \right) = \\ &= -h \left[\left(\frac{k_2 + 1}{k_2 e^{z_2} - (k_2 + 1)} \right)^h + \left(\frac{k_2 + 1}{k_2 e^{z_2} - (k_2 + 1)} \right)^{h+1} \right]. \end{aligned}$$

Ezt minden tagban elvégezve, majd tovább deriválva z_2 szerint addig, amíg i_2 rendű deriváltakat kapunk, látható, hogy

$$\frac{\partial^{i_1+i_2} u}{\partial z_1^{i_1} \partial z_2^{i_2}} = (-1)^{i_1+i_2-1} (\text{pozitív érték}).$$

Tovább haladva a z_3, \dots, z_s szerinti deriváltakban, a tétel állítása következik. \square

2. Numerikus példák az $E[u(X_1, \dots, X_s)]$ várható értékre $s = 3$ esetén

Nagy és Prékopa a [2] dolgozatban általános és hatékony módszert adott diszkrét valószínűségi változók magasabb rendű konvex vagy konkáv függvénye várható értéke alsó és felső korlátjai konstruálására. Az 1. szakaszban értelmezett hasznossági függvény eleget tesz a [2] dolgozatban megfogalmazott követelményeknek. Ebben a szakaszban az ottani becslési módszereket alkalmazzuk az $u(X_1, X_2, X_3)$ valószínűségi változó várható értékére, ahol X_1, X_2, X_3 diszkrét valószínűségi változók. Teljesség kedvéért újból felírjuk a függvényt:

$$(2.1) \quad u(z_1, z_2, z_3) = \log [(e^{\alpha_1 z_1 + a_1} - 1)(e^{\alpha_2 z_2 + a_2} - 1)(e^{\alpha_3 z_3 + a_3} - 1) - 1]$$

$$(z_1, z_2, z_3) \in Z,$$

ahol

$$Z = (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) \times (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) \times (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9).$$

Tegyük fel, hogy $e^{\alpha_j z_j + a_j} > 2$, $j = 1, 2, 3$, $(z_1, z_2, z_3) \in Z$ esetén.

Becsléseink alapja egy többváltozós diszkrét momentum probléma (TDMP), melyet az (X_1, \dots, X_s) valószínűségi vektorváltozóra fogalmazunk meg az alábbi módon.

Feltesszük, hogy X_j értelmezési tartománya egy ismert véges halmaz: $Z_j = \{z_{j0}, \dots, z_{jn_j}\}$, $j = 1, \dots, s$. Vezessük be a következő jelölést:

$$p_{i_1 \dots i_s} = P(X_1 = z_{1i_1}, \dots, X_s = z_{si_s}), \quad 0 \leq i_j \leq n_j, \quad j = 1, \dots, s$$

$$\mu_{\alpha_1 \dots \alpha_s} = \sum_{i_1=0}^{n_1} \dots \sum_{i_s=0}^{n_s} z_{1i_1}^{\alpha_1} \dots z_{si_s}^{\alpha_s} p_{i_1 \dots i_s},$$

ahol $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ nemnegatív egész számok. A $\mu_{\alpha_1 \dots \alpha_s}$ számot az (X_1, \dots, X_s) valószínűségi vektorváltozó $(\alpha_1, \dots, \alpha_s)$ rendű (hatvány)momentumának nevezzük. Az $\alpha_1 + \dots + \alpha_s$ összeg a momentum teljes rendje.

Tekintsünk egy $f(z)$, $z \in Z$, $Z = Z_1 \times \dots \times Z_s$ függvényt és vezessük be a következő jelölést: $f_{i_1 \dots i_s} = f(z_{1i_1}, \dots, z_{si_s})$. A többváltozós diszkrét momentum problémát az alábbi LP feladat írja le:

$$\begin{aligned}
 & \min (\max) \sum_{i_1=0}^{n_1} \dots \sum_{i_s=0}^{n_s} f_{i_1 \dots i_s} p_{i_1 \dots i_s} \\
 & \text{feltéve, hogy} \\
 & \sum_{i_1=0}^{n_1} \dots \sum_{i_s=0}^{n_s} z_{1i_1}^{\alpha_1} \dots z_{si_s}^{\alpha_s} p_{i_1 \dots i_s} = \mu_{\alpha_1 \dots \alpha_s} \\
 & \alpha_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, s; \quad \alpha_1 + \dots + \alpha_s \leq m \text{ és} \\
 & \alpha_j = 0, \quad j = 1, \dots, k-1, k+1, \dots, s, \quad m \leq \alpha_k \leq m_k, \quad k = 1, \dots, s; \\
 & p_{i_1 \dots i_s} \geq 0, \text{ minden } i_1, \dots, i_s \text{ esetén.}
 \end{aligned}
 \tag{2.2}$$

A $p_{i_1 \dots i_s}$ szimbólumok a változók, míg a többi érték adott.

Ismertes, hogy egy lineáris programozási minimum (maximum) feladat tetszőleges duál megengedett bázisához tartozó célfüggvény érték mindig kisebb (nagyobb) vagy egyenlő, mint az optimum érték. Ezt felhasználva korlátokat nyerhetünk az

$$E[f(X_1, \dots, X_s)]
 \tag{2.3}$$

várható értékre. A legjobb korlátokat az optimális bázis szolgáltatja.

Az optimum értéket egy tetszőleges duál megengedett bázisból kiindulva a duál módszer végrehajtásával határozhatjuk meg. Induló bázist pedig adott esetben könnyen meghatározhatunk Nagy és Prékopa [2] cikke alapján, ahol a szerzők elégséges feltételeket adnak arra vonatkozólag, hogy egy bázis duál megengedett legyen. Ezeket duál megengedettségi struktúra tételeknek nevezzük.

A felírandó tételekhez szükségünk lesz a következő indexhalmazra:

$$I = I_0 \cup \left(\bigcup_{j=1}^s I_j \right),
 \tag{2.4}$$

ahol

$$I_0 = \{(i_1, \dots, i_s) \mid 0 \leq i_j \leq m-1, \text{ egészek, } j = 1, \dots, s, i_1 + \dots + i_s \leq m\}
 \tag{2.5}$$

és

$$\begin{aligned}
 & I_j = \{(i_1, \dots, i_s) \mid i_j \in K_j, i_l = 0 \text{ } l \neq j\} \\
 & K_j = \{k_j^{(1)}, \dots, k_j^{(|K_j|)}\} \subset \{m, m+1, \dots, n_j\}, \quad j = 1, \dots, s.
 \end{aligned}
 \tag{2.6}$$

Legyenek adottak a következő struktúrák:

$$\begin{aligned}
 & |K_j| \text{ páros} \\
 \min & \quad u^{(j)}, u^{(j)} + 1, \dots, v^{(j)}, v^{(j)} + 1 \\
 \max & \quad m, u^{(j)}, u^{(j)} + 1, \dots, v^{(j)}, v^{(j)} + 1, n_j \\
 (2.7) & \\
 & |K_j| \text{ páratlan} \\
 \min & \quad m, u^{(j)}, u^{(j)} + 1, \dots, v^{(j)}, v^{(j)} + 1 \\
 \max & \quad u^{(j)}, u^{(j)} + 1, \dots, v^{(j)}, v^{(j)} + 1, n_j.
 \end{aligned}$$

Ekkor, megfelelően rendezve a Z_1, \dots, Z_s halmazok elemeit, igazak lesznek a következők.

2.1. TÉTEL. Legyen $z_{j0} < z_{j1} < \dots < z_{jn_j}$, $j = 1, \dots, s$. Tegyük fel, hogy az $f(z)$, $z \in Z$ függvény $m + 1$ rendű osztott differenciái nemnegatívak, továbbá, hogy a z_j változója szerinti $m + |K_j|$ rendű osztott differenciái is nemnegatívak, ahol K_j (2.7) valamelyik min struktúráját követi, $j = 1, \dots, s$.

Ekkor a (2.2) minimum feladat mátrixának I indexhalmazhoz tartozó oszlopaiból álló \hat{B} bázis duál megengedett.

Ha a fent említett osztott differenciák mindegyike nempozitív, akkor ugyanez igaz a minimum helyett a maximum feladatra.

2.2. TÉTEL. Legyen $z_{j0} > z_{j1} > \dots > z_{jn_j}$, $j = 1, \dots, s$. Tegyük fel, hogy az $f(z)$, $z \in Z$ függvény $m + 1$ rendű osztott differenciái nemnegatívak, továbbá, hogy a z_j változója szerinti $m + |K_j|$ rendű osztott differenciái ugyancsak nemnegatívak, ahol K_j (2.7) valamelyik, az alábbiakban jelzett, struktúráját követi, $j = 1, \dots, s$. Ekkor igazak a következők:

- (a) Ha $m + 1$ páros, $|K_j|$ páros és K_j (2.7) megfelelő max struktúráját követi vagy ha $m + 1$ páros, $|K_j|$ páratlan és K_j (2.7) megfelelő min struktúráját követi, akkor a (2.2) minimum feladat mátrixának I indexhalmazhoz tartozó oszlopaiból álló \hat{B} bázis duál megengedett.
- (b) Ha $m + 1$ páratlan, $|K_j|$ páros és K_j (2.7) megfelelő max struktúráját követi vagy ha $m + 1$ páratlan, $|K_j|$ páratlan és K_j (2.7) megfelelő min struktúráját követi, akkor a (2.2) minimum feladat mátrixának I indexhalmazhoz tartozó oszlopaiból álló \hat{B} bázis duál megengedett.

Ismeretes és könnyen belátható, hogy ha az \mathbb{R}^s tér egy nyílt konvex halmazán értelmezett függvény adott rendű (tisztá vagy vegyes) parciális deriváltja folytonos és nemnegatív függvény, akkor az ugyanabból a halmazból vett, tetszőleges alappontokhoz tartozó, megfelelő rendű osztott differenciái is nemnegatívak.

Tekintve fentieket, adott m, m_j , $j = 1, 2, 3$, páros számok esetén a (2.2) függvénnyel vett TDMP problémák közül mind a maximum mind a minimum feladathoz

találhatóak duál megengedett bázisok. Ezt kihasználva, a következő konkrét példák megoldásában, az alábbi kiinduló bázisokkal dolgozunk. Minimum feladat esetén az

$$(2.8) \quad \{(i_1, i_2, i_3) \mid i_1 + i_2 + i_3 \leq m \text{ vagy } i_k = 0, k \neq j, m \leq i_j \leq m_j, j = 1, \dots, s\}$$

változókhöz tartozó oszlopokkal, míg maximum feladat esetén az

$$(2.9) \quad \{(i_1, i_2, i_3) \mid i_1 + i_2 + i_3 \geq 27 - m \text{ vagy } i_k = 9, k \neq j, \\ 9 - m \geq i_j \geq 9 - m_j, j = 1, \dots, s\}$$

változókhöz tartozó oszlopokkal.

2.1. PÉLDA. Tekintsük a (2.1) függvényt az $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = a_1 = a_2 = a_3 = 1$ esetre. Korlátozó feltételeink jobb oldalán pedig álljanak a Z_I tartójú egyenletes eloszlás megfelelő momentumai.

Ha a vegyes momentumok közül csak a kovarianciákat vesszük figyelembe, akkor a tiszta momentumok maximális rendjétől függően a következő eredményeket kapjuk:

1. Táblázat

m	m_1	m_2	m_3	Minimum	Lépés	Maximum	Lépés
2	2	2	2	16.083862403	93	16.439400518	69
2	4	4	4	16.236742070	124	16.337970820	128
2	6	6	6	16.265375750	211	16.297838921	123
2	8	8	8	16.272378408	309	16.294804990	294

Tekintve a fentieket, látható, hogy a függvény várható értékére kapott alsó illetve felső korlátok, a peremeloszlások egyre több momentumának figyelembe vételével, egyre közelebb kerülnek egymáshoz, az utolsó két esetben már három jegy pontossággal becsülve a célfüggvényt. Kicsit pontosabban vizsgálva az eredményeket az is kiderül, hogy az utolsó esetben a minimum és maximum értékek relatív eltérése kisebb mint 2 ezrelék.

Ha a megfelelő tiszta momentumok mellett az összes legfeljebb 4 rendű vegyes momentumot szerepeltetjük a korlátozó feltételek között, akkor a 2. Táblázat eredményeit kapjuk.

2. Táblázat

m	m_1	m_2	m_3	Minimum	Lépés	Maximum	Lépés
4	4	4	4	16.256237098	331	16.337929898	364
4	6	6	6	16.284878189	466	16.297815868	686
4	8	8	8	16.288316597	802	16.294784936	669

Összehasonlítva a két táblázatot a következő tanulságokat szűrhetjük le. Egyrészt, mint az várható volt, a második esetben pontosabb eredményeket kaptunk. Az utolsó sor esetén a relatív eltérés kevesebb mint 4 tízezrelék.

Másrészt viszont ennek a pontosságnak nagy ára van. A táblázatokban az eredmények mellett szerepel, hogy a CPLEX program hány lépésben jut el az optimális megoldásig. Láthatjuk, hogy hasonló pontosság (pl. három számjegy) eléréséhez az 1. Táblázatban jóval kevesebb lépésre volt szükség. Ha emellett még azt is figyelembe vesszük, hogy a 2. Táblázat esetén jóval több sorral (és így persze nagyobb mátrixszal) számolunk, akkor máris vonzóbbnak tűnik újabb tiszta momentumok figyelembe vétele a becslés javítására, mintsem a momentumok teljes rendjének növelése.

Természetesen, bizonyos határon túl, mikor már a pontosság tiszta momentumok figyelembe vételével már nem, vagy csak elhanyagolható mértékben javítható, szükség lehet magasabb rendű momentumok figyelembe vételére. Általánosságban annyit mondhatunk, hogy ajánlott először a tiszta momentumokban rejlő lehetőségeket kiaknázni, és csak utána ugrani egy nagyságrendet a vegyes momentumok teljes rendjével.

A fenti példában mind az u függvény, mind a momentumok generálására használt eloszlás szimmetrikus volt. Érdekes egy általánosabb példát is megvizsgálni, egyrészt abból a szempontból hogy a kapott becslések lesznek-e olyan pontosak mint a 2.1 Példában, másrészt hogy az eddig leírt következtetéseket más példával is alátámaszthassuk.

A következő feladat korlátozó momentumait előállító eloszlás egyrészt aszimmetrikus lesz, másrészt, az előző példától eltérően, peremeloszlásai sem lesznek függetlenek egymástól. Az (2.1) függvény paramétereinek is új értéket adunk, ezzel is általánosabbá téve a példát. Megjegyezzük, hogy ezen paraméterek változtatása lényegében ekvivalens az 2.1. Példában szereplő u függvény Z értelmezési tartományának eltolásával (ha az a_j tagokat tekintjük) illetve nyújtásával (ha az α_j tényezőket vesszük figyelembe).

2.2. PÉLDA. Tekintsük a következő, Poisson eloszlású, valószínűségi változókat, X, Y_1, Y_2, Y_3 , rendre a következő λ paraméterekkel, 1, 2, 2.5, 3. Korlátozó feltételeink jobb oldalára az alábbi valószínűségi vektorváltozó megfelelő momentumai kerülnek:

$$(\min(X + Y_1, 9), \min(X + Y_2, 9), \min(X + Y_3, 9)).$$

Az u függvény, melynek várható értékét becsülni fogjuk, legyen a (2.1) függvény az alábbi paraméterekkel:

$$\alpha_1 = 1.75, \alpha_2 = 1.25, \alpha_3 = 0.75, a_1 = 3, a_2 = 2, a_3 = 1.$$

Ha a vegyes momentumok közül csak a kovarianciákat vesszük figyelembe, akkor a 3. Táblázat eredményeit kapjuk, míg az $m = 4$ esethez tartozó becsléseket a 4. Táblázat tartalmazza.

3. Táblázat

m	m_1	m_2	m_3	Minimum	Lépés	Maximum	Lépés
2	2	2	2	18.466954935	62	18.572924791	46
2	4	4	4	18.532630264	111	18.550298509	126
2	6	6	6	18.541879509	178	18.544391959	148
2	8	8	8	18.543136443	263	18.543344110	191

4. Táblázat

m	m_1	m_2	m_3	Minimum	Lépés	Maximum	Lépés
4	4	4	4	18.532852070	254	18.550297658	325
4	6	6	6	18.541926465	742	18.544391052	658
4	8	8	8	18.543148260	542	18.543343503	736

Megvizsgálva a fenti adatokat, az összes legfeljebb 8 rendű tiszta momentumot tekintve, az alsó illetve felső becslés közti relatív eltérés mind kovariancia, mind a legfeljebb negyedrendű vegyes momentumok esetén kisebb mint $2 \cdot 10^{-5}$, ami a 2.1. Példánál jobb eredmény. A most kapott lépésszámok és pontosságok összevetése pedig alátámasztja az előző példa következtetéseit.

Hivatkozások

- [1] Bowers Jr., N. L., Gerber H. U., Hickman J. C., Jones D. A. and Nesbitt C. J., *Actuarial Mathematics*, 2nd edition, The Society of Actuaries, Ithaca, Ill. (1997).
- [2] Nagy, G. and Prékopa, A., On Multivariate Discrete Moment Problems and their Applications to Bounding Expectations and Probabilities, *RUTCOR Research Report* (2000), 41–2000.
- [3] Prékopa, A., *Stochastic Programming*, Akadémiai Kiadó (Budapest, 1995).

(Beérkezett: 2001. március 13.)

MÁDI-NAGY GERGELY
BUDAPESTI MŰSZAKI ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI EGYETEM
MATEMATIKA INTÉZET
DIFFERENCIÁLEGYENLETEK TANSZÉK
1111 BUDAPEST, MŰEGYETEM RAKPART 1-3.
GNAGY@MATH.BME.HU

PRÉKOPA ANDRÁS
ELTE TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR
OPERÁCIÓKUTATÁSI TANSZÉK
1053 BUDAPEST, KECSKEMÉTI U. 10-12.
PREKOPA@CS.ELTE.HU

RUTCOR. RUTGERS CENTER FOR OPERATIONS RESEARCH
RUTGERS UNIVERSITY
640 BARTHOLOMEW ROAD
PISCATAWAY, NJ 08854-8003
PREKOPA@RUTCOR.RUTGERS.EDU

A MULTIVARIATE UTILITY FUNCTION

GERGELY MÁDI-NAGY AND ANDRÁS PRÉKOPA

A univariate utility function $u(z)$ is usually required to satisfy the conditions: $u'(z) \geq 0$, $u''(z) \leq 0$, i.e. the function should be nondecreasing and concave. Some authors, however, require that the more restrictive conditions: $u'(z) \geq 0$, $u''(z) \leq 0$, $u'''(z) \geq 0$, $u^{(4)} \leq 0$, ... should be satisfied. Given a multivariate utility function $u(z_1, \dots, z_s)$, we may require, in agreement with the above weaker conditions, that it be nondecreasing in each variable and concave in all variables. On the other hand, maintaining these conditions, we may impose on it the additional requirement that all of its partial derivatives of odd (even) order should be nonnegative (nonpositive). In this paper our objective is twofold. First, we construct a multivariate utility function that satisfies the above-mentioned stronger conditions. Secondly, given the random wealths X_1, \dots, X_s , we give lower and upper bounds for the expectation of $u(X_1, \dots, X_s)$ when the random variables are discrete with finite supports, their joint distribution is unknown but known are some of their multivariate moments.

A VÉGES CRISS-CROSS MÓDSZER ÚJ VARIÁNSAI BISZIMMETRIKUS LINEÁRIS KOMPLEMENTARITÁSI FELADATRA*

ARIF A. AKKELEŞ, BALOGH LÁSZLÓ ÉS ILLÉS TIBOR†

Jelen dolgozat célja a Zhang-féle új és flexibilisebb, lineáris programozási feladatra megfogalmazott véges criss-cross módszer általánosítása a lineáris feltételes konvex kvadratikusan célfüggvényes primál-duál feladatpárhoz tartozó lineáris komplementaritási feladatra. Klafszy és Terlaky által közölt véges kvadratikusan criss-cross algoritmustól különbözik az általunk megfogalmazott új algoritmus.

Az új kvadratikusan criss-cross algoritmus végességének bizonyítása hasonló a Klafszy és Terlaky által közölt kvadratikusan criss-cross algoritmuséhoz és az ortogonalitási tétel alkalmazására ad egy szép példát. Természetesen, ha a primál-duál feladatpár lineáris programozási feladat akkor a lineáris komplementaritási feladat struktúrája egyszerűbb és így az algoritmus végességének a bizonyításából a Zhang-féle lineáris programozási algoritmus végessége is következik.

1. Bevezetés

Tekintsük a következő lineáris feltételes, kvadratikusan célfüggvényes primál-duál feladatpárt:

$$\left. \begin{array}{lll} \min \mathbf{c}^T \mathbf{x} + \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{C}^T \mathbf{C} \mathbf{x} + \frac{1}{2} \mathbf{z}^T \mathbf{z} \\ \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B} \mathbf{z} & \geq \mathbf{b} \\ \mathbf{x} & \geq \mathbf{0} \end{array} \right\} (P),$$

*A kutatást az OTKA T 29775, illetve az FKFP 0152/1999 számú pályázata támogatták.

†Illés Tibor köszönetet mond a Magyar Tudományos Akadémiának a *Bolyai János Kutatási Ösztöndíjért* (BO/00334/00).

$$\left. \begin{aligned} \max \quad & \mathbf{y}^T \mathbf{b} - \frac{1}{2} \mathbf{y}^T B B^T \mathbf{y} - \frac{1}{2} \mathbf{w}^T \mathbf{w} \\ & \mathbf{y}^T A - \mathbf{w}^T C \leq \mathbf{c} \\ & \mathbf{y} \geq \mathbf{0} \end{aligned} \right\} \quad (D),$$

ahol $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{m \times k}$, $C \in \mathbb{R}^{l \times n}$ tetszőleges mátrixok és $\mathbf{c}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{b}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^k$, $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^l$ vektorok.

Vezessük be a *primál megengedett megoldások*

$$\mathcal{P} = \{(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \in \mathbb{R}^{n+k} : A \mathbf{x} + B \mathbf{z} \geq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$$

és a *duál megengedett megoldások*

$$\mathcal{D} = \{(\mathbf{y}, \mathbf{w}) \in \mathbb{R}^{m+l} : \mathbf{y}^T A - \mathbf{w}^T C \leq \mathbf{c}, \mathbf{y} \geq \mathbf{0}\}$$

halmazát.

Könnyen megmutatható, hogy a (P) feladat célfüggvénye konvex, míg a (D) feladaté konkáv függvény. A konvex kvadratikus feladatok megoldására számos pivot (pl. [21, 34]), illetve belső pontos algoritmus (pl. [28, 29, 18, 24]) ismert.

Egyszerűen igazolható a következő állítás.

1.1. ÁLLÍTÁS (Gyenge dualitás tétel). *Bármely $(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \in \mathcal{P}$ és $(\mathbf{y}, \mathbf{w}) \in \mathcal{D}$ esetén*

$$\mathbf{c}^T \mathbf{x} + \frac{1}{2} \mathbf{x}^T C^T C \mathbf{x} + \frac{1}{2} \mathbf{z}^T \mathbf{z} \geq \mathbf{y}^T \mathbf{b} - \frac{1}{2} \mathbf{y}^T B B^T \mathbf{y} - \frac{1}{2} \mathbf{w}^T \mathbf{w}. \quad \square$$

A (P) és a (D) feladatpárhoz tartozó komplementaritási feladat pedig lineáris komplementaritási feladat lesz [2], amelynek mátrixa érdekes struktúrával rendelkezik [17], és a következő formában adható meg:

$$\left. \begin{aligned} -P\mathbf{y} - A\mathbf{x} + \bar{\mathbf{y}} &= -\mathbf{b} \\ A^T \mathbf{y} - Q\mathbf{x} + \bar{\mathbf{x}} &= \mathbf{c} \\ \mathbf{x}, \mathbf{y}, \bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}} &\geq \mathbf{0} \\ \mathbf{x} \bar{\mathbf{x}} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{y} \bar{\mathbf{y}} = \mathbf{0} \end{aligned} \right\} \quad (LCP_{QP}),$$

ahol $P = B B^T$ és $Q = C^T C$ pozitív szemidefinit mátrixok, és az $\mathbf{x} \bar{\mathbf{x}} = (x_1 \bar{x}_1, \dots, x_n \bar{x}_n)$ komponensenkénti szorzást jelöl, ugyanígy az $\mathbf{y} \bar{\mathbf{y}}$ is. Az (LCP_{QP}) a (P) és (D) feladatokhoz tartozó Karush–Kuhn–Tucker rendszer, [2, 11, 17]. Jelölje a (P) és (D) feladatokból nyert (LCP_{QP}) feladat mátrixát M . Ekkor az M mátrix a következő alakú lesz:

$$M = \begin{bmatrix} P & A \\ -A^T & Q \end{bmatrix}$$

Vezessük be a következő jelöléseket: $N := m + n$, $\mathbf{q} := \begin{pmatrix} -\mathbf{b} \\ \mathbf{c} \end{pmatrix}$, $\mathbf{u} := (\mathbf{y}, \mathbf{x})$ és $\mathbf{v} := (\bar{\mathbf{y}}, \bar{\mathbf{x}})$. Ekkor az (LCP_{QP}) feladat egyszerűen

$$\left. \begin{array}{l} -M\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{q} \\ \mathbf{u}, \mathbf{v} \geq \mathbf{0} \\ \mathbf{u}\mathbf{v} = \mathbf{0} \end{array} \right\} (LCP_{QP}),$$

alakú lesz, ahol az M mátrix speciális szerkezetű, ún. *biszimmetrikus mátrix*¹.

A B mátrixot az (LCP_{QP}) feladat *bázisának* nevezzük, ha B a $[-M \ I]$ mátrixnak egy $N \times N$ -es nem szinguláris részmátrixa. Induló bázisnak, általában, a $B_0 = I$ mátrixot választjuk, ahol az I az $N \times N$ -es egységmátrix.

Vezessük be az (LCP_{QP}) feladat *megoldásainak* az

$$\mathcal{F} = \{(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \mathbb{R}^{2N} : -M\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{q}\}$$

a *megengedett megoldásainak* az

$$\mathcal{F}_{\oplus} = \{(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \mathcal{F} : \mathbf{u} \geq \mathbf{0}, \mathbf{v} \geq \mathbf{0}\}$$

és a *komplementáris megoldásainak* az

$$\mathcal{F}_c = \{(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \mathcal{F} : \mathbf{u}\mathbf{v} = \mathbf{0}\}$$

halmazát. Ekkor az (LCP_{QP}) feladat *megengedett komplementáris megoldásainak* a halmazát

$$\mathcal{F}^* = \mathcal{F}_{\oplus} \cap \mathcal{F}_c$$

jelöli.

Egyszerűen igazolható a következő lemma [17] az (LCP_{QP}) feladat esetén:

1.1. LEMMA. Legyen $(\mathbf{u}', \mathbf{v}'), (\mathbf{u}'', \mathbf{v}'') \in \mathcal{F}$ *tetszőleges megoldása* az (LCP_{QP}) feladatnak. Ekkor

$$(\mathbf{u}' - \mathbf{u}'')^T (\mathbf{v}' - \mathbf{v}'') \geq 0. \quad \square$$

A lineáris komplementaritási feladat² elméletét több matematikai programozási témájú könyvben, különböző szempontok alapján tárgyalják [26, 20, 4, 41].

A konvex programozás dualitás elméletének (lásd pl. [2, 26]) a következménye az alábbi eredmény, amelyre mi közvetlen, konstruktív bizonyítást adunk a cikkünkben.

¹Az

$$M = \begin{bmatrix} P & A \\ -A^T & Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & A \\ -A^T & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N \times N}$$

biszimmetrikus mátrix, ha P és Q pozitív szemidefinit mátrixok.

²Amennyiben eltekintünk az M mátrix speciális tulajdonságaitól az ún. *(általános) lineáris komplementaritási feladatot* kapjuk.

1.1. TÉTEL. A (P) és (D) feladatnak pontosan akkor létezik optimális megoldása, ha az (LCP_{QP}) feladatnak létezik megoldása. \square

Az előző tétel alapján elegendő az (LCP_{QP}) feladatot megoldanunk. Ismert, hogy az (LCP_{QP}) feladatot – számos mátrix osztályra, ilyen például a biszimmetrikus mátrixok esete is – bármely $q \in \mathbb{R}^N$ jobboldal esetén, meg tudjuk oldani [4, 26]. Az (LCP_{QP}) feladat megoldására több pivot algoritmus (pl. [39, 22, 3, 23, 37, 14, 25, 17]) és nagyszámú belsőpontos algoritmus ismert (pl. [18, 19, 13]).

A pivot algoritmusok bázismegoldásokon keresztül jutnak el egy megengedett, komplementáris bázishoz vagy kimutatják, hogy ilyen nem létezik. Két típusuk ismert: (1) nemnegatív megoldásokon keresztül érnek el egy megengedett és komplementáris (bázis) megoldást [39, 22, 23], (2) komplementáris bázis megoldásokon keresztül érnek el egy megengedett és komplementáris bázist (pl. [3, 37, 14, 17]) vagy kimutatják ilyennek a nem létét. A második csoportba tartozó egyik algoritmus Klafszky és Terlaky véges criss-cross módszere [17]³.

A belsőpontos módszerek ennél jóval változatosabbak, habár hatékonyságuk, szinte kivétel nélkül, a Sonnevend György által bevezetett *centrális út* [28] követéséből adódik.

A lineáris komplementaritási feladat legfontosabb elméleti kérdéseit (centrális út, maximális komplementáris megoldás, analitikus centrum létezése [20]) – a Newton-lépés [27] felhasználásával, elemi módon, a *logaritmikus-barrier függvény* [20, 27] alkalmazása nélkül – válaszolják meg Illés, Roos és Terlaky [10] P_* -mátrixok [20] esetén⁴. A belsőpontos módszerek általában igénylik induló belső pont létezését, [13, 18, 19, 20, 24], habár ma már ismertek olyan belsőpontos módszerek is, melyek ún. *nem megengedett induló pontból* (is) elindíthatók [12, 30], és amennyiben van megoldás, polinom időben megtalálják azt, különben pedig kijelzik ilyennek a nem létezését.

Az elmúlt évtizedben a Terlaky-féle lineáris programozási criss-cross algoritmus [31, 32, 33] egyszerűsége számos kutatót inspirált további munkára a pivot-algoritmusok területén, sok érdekes és meglepő elméleti tulajdonságát mutatva ki a criss-cross módszernek [6, 7], új alkalmazási területeit tárva fel a pivot-algoritmusoknak [1]. A pivot algoritmusokról, az elmúlt évtizedek eredményeiről szól Terlaky és Zhang dolgozata [35], illetve a criss-cross módszerrel kapcsolatos kutatásokat összegzi Fukuda és Terlaky cikke [8, 9].

A criss-cross módszert ellenzők legfőbb érve az eredeti Terlaky-féle criss-cross módszer numerikus használhatósága ellen a criss-cross pivot szabály nagyfokú kötöttsége, egyértelműsége volt, kiemelve a simplex variánsok flexibilitását a bemenő változók kiválasztása során. Néhány eredmény [7, 6] és néhány szép típuspélda [9] cáfolni látszik az ellenzők bizonyos érveit, annak ellenére, hogy a criss-cross módszernek még egyetlen, komolyan tesztelt implementációja sem ismert.

³A kvadratikus criss-cross módszer végességének egy alternatív bizonyítása található meg Váliaho [38] cikkében.

⁴A P_* -mátrixok a pozitív szemidefinit mátrixok általánosításának tekinthetők.

Komei Fukuda több előadásában is említette a criss-cross módszer új, flexibilisebb variánsának az elkészíthetőségét. Sőt egy ilyen lehetőségről tudósított is a Fukuda-Matsui [5] cikkben, ahol bizonyos változók sorrendjét, pivotálás előtt, fel lehetett cserélni egy 0–1 vektor alapján, amelyet minden iterációban módosítottak. Mégis az első tényleg flexibilisebbnek hitt változatai a criss-cross módszernek csupán 1997-ben láttak napvilágot lineáris programozási feladatra, Shuzong Zhang dolgozatában [40].

Jelen dolgozat célja a Zhang-féle új, flexibilisebb criss-cross módszer [40] általánosítása az (LCP_{QP}) feladatra. Klafszky és Terlaky által közölt véges kvadratikus criss-cross algoritmustól [17] különbözik az általunk megfogalmazott új algoritmus. Az új kvadratikus criss-cross algoritmus végességének bizonyítása követi a Klafszky és Terlaky cikkében kidolgozott módszert [17], és az ortogonalitási tétel [15, 16, 11] alkalmazására ad egy szép példát. Természetesen, ha az (LCP_{QP}) esetén, a P és Q zéró mátrixok, akkor az (LCP_{QP}) egy olyan komplementaritási feladatra redukálódik, amelynek a struktúrája megegyezik a lineáris programozási feladatból nyerhető (LCP_{LP}) feladatével és így az algoritmus végességének bizonyításából a lineáris programozási algoritmus végessége is következik.

A dolgozatban használni fogjuk a következő jelöléseket: \oplus nem negatív, \ominus nem pozitív, $+$ pozitív és $-$ negatív elemeket (számokat, koordinátákat) jelölnek. Ha egy elem helyén a pivot táblában $*$ áll, akkor arról semmilyen közelebbi információval nem rendelkezünk.

A cikk további részében először a pivot táblával és a diagonális, illetve a felcserélős pivotálással kapcsolatos ismereteket foglaljuk össze. Ezt követi az új criss-cross algoritmus egyik variánsának a megfogalmazása (2. rész). A 3. részben az algoritmus végességét igazoljuk. A 4. részben a criss-cross algoritmus második variánsát is megfogalmazzuk.

2. A criss-cross módszer egy új variánsa

Az (LCP_{QP}) feladat induló (rövid) pivot táblája

	<table><tr><td>y</td><td colspan="2">x</td></tr></table>			y	x	
y	x					
\bar{y}	$-P$	$-A$	$-\mathbf{b}$			
\bar{x}	A^T	$-Q$	\mathbf{c}			

1. ábra. A bázis változók az \bar{y} , \bar{x} ; míg az y és az x a bázison kívüliek.

alakú, és az induló megoldása $\bar{y} = -b$, $\bar{x} = c$, $y = 0$ és $x = 0$, azaz $u = 0$, $v = q$, ahol $q = (-b, c)^T$. Az aktuális (rövid) pivot tábla belsejét, az 1. ábrán ez a $-M$ mátrix, az \bar{M} mátrix jelöli. Az (LCP_{QP}) tetszőleges B bázisához tartozó (rövid) pivot táblát vagy bázistáblát az $M_B = [\bar{M}, \bar{q}] = [-B^{-1}M, B^{-1}q]$ jelöli.

Az algoritmus megfogalmazásakor hármas célt követünk:

1. komplementáris táblákon (bázisokon) keresztül jusson el a megoldásig,
2. őrizze meg a tábla struktúráját (biszimmetrikusságát),
3. véges legyen az algoritmus.

Mivel a P és a Q pozitív szemidefinit mátrixok, a diagonális elemek értéke a táblában negatív vagy nulla. A pivotálásra tehát következő lehetőségek kínálkoznak, ha a pivot tábla komplementaritását meg szeretnénk őrizni [17, 23]: a *diagonális pivot*, *felcserélős pivot* és a *blok pivot*⁵.

		u_j	
		\vdots	
v_j	\cdots	$-$	\cdots
		\vdots	

2. ábra. Diagonális pivot.

Legyen a v_j bázisváltozó, és tegyük fel, hogy $v_j < 0$, azaz nem megengedett. Ha $\bar{m}_{jj} < 0$, akkor az u_j belép a bázisba, és a v_j távozik (diagonális pivot)⁶.

		u_j		u_k	
		0			
		\vdots			
v_j	0	\cdots	0	\cdots	0
		\vdots			
		0			
v_k		+			

3. ábra. Felcserélős pivot.

⁵ A felcserélős pivot tulajdonképpen 2×2 -es blok pivot. Az algoritmusunkban azonban nagyobb méretű blok pivotot nem engedünk meg, mert bonyolulttá tenné a végesség igazolását.

⁶ A v_j előállításában, az u_j változó együtthatója, az adott bázisban, \bar{m}_{jj} .

Elképzelhető azonban az is, hogy $\bar{m}_{jj} = 0$. Ekkor az \bar{M} mátrix negatív szemidefinit részében a j . sor (és a j . oszlop) minden eleme nulla (lásd pl. [11]), vagyis pivot elem kizárólag a ferdén szimmetrikus részben található. Ha a j . sorban van olyan elem, amelyre $\bar{m}_{jk} < 0$, akkor az u_k belép a bázisba, és a v_j távozik onnan, de így a tábla elveszítené a komplementaritását. Ezért a (j, k) pozíció után a (k, j) pozíción is pivotálunk, ahol $\bar{m}_{kj} > 0$ elem áll. Ennek a második pivotnak a hatására u_j belép a bázisba, és v_k távozik a bázisból (felcserélős pivot), visszaállítva a tábla komplementaritását.

Természetesen az az eset is előfordulhat, amikor $\bar{m}_{jk} \geq 0$ teljesül, bármely j index esetén. Ez a lineáris egyenlőtlenség rendszerek megoldhatóságával kapcsolatos *nem megengedettségi kritérium*, amelynek az előfordulása azt jelenti, hogy az (LCP_{QP}) feladatnak megengedett megoldása sincsen, azaz $\mathcal{F}_\oplus = \emptyset$.

Egyszerűen igazolható (lásd pl. [36, 11]) a következő:

2.1. LEMMA. A diagonális és a felcserélős pivot megőrzi:

- (i) a pivot tábla komplementaritását, és
- (ii) a (rövid) pivot tábla biszimmetrikusságát. □

Legyen $\mathcal{I} := \{u_1, u_2, \dots, u_N, v_1, v_2, \dots, v_N\} \cup \{q\}$ a változók, illetve a hozzájuk tartozó indexek $I := \{1, 2, \dots, N, \bar{1}, \bar{2}, \dots, \bar{N}\} \cup \{q\}$ halmaz, ahol $N = n + m$ és $|\mathcal{I}| = |I| = 2N + 1$. A jelölések egyszerűsítése végett állapodjunk meg abban, hogy $\bar{\alpha} = \alpha$ teljesül, bármely $\alpha \in I$ esetén.

Legyen az I_B és I_N az (LCP_{QP}) feladatnak a *bázis*, illetve a *nem bázis index halmaza*. Az $|I_B| = N$ és az $|I_N| = N + 1$, hiszen $q \in I_N$ teljesül bármely bázistábla esetén. Ha $i \in I_B$ akkor az $\bar{i} \in I_N$, illetve, ha $\bar{j} \in I_B$ akkor $j \in I_N$ teljesül a bázistáblák komplementaritása miatt.

Mielőtt megfogalmaznánk az algoritmust, vezessük be a következő leképezéseket:

$s_r : I \mapsto \mathbb{N}_0^{2N}$ és legyen $s_0 = (0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{N}_0^{2N}$, illetve

$$s_r(\alpha) = \begin{cases} r, & \text{ha az } \alpha \in I \text{ indexű változó mozog az } r. \text{ iterációban} \\ s_{r-1}(\alpha), & \text{különben} \end{cases}$$

Könnyen belátható, hogy bármely pivotálási szabály esetén $s_r \geq s_{r-1}$ lesz, és $s_r \neq s_{r-1}$.

2.1. ALGORITMUS. Induljunk ki az 1. ábrán adott (rövid) pivotálási táblából, amely biszimmetrikus és komplementáris. Legyen $\bar{M} = M$, $\bar{q} = q$, $r = 1$ és s_0 adott.

1. lépés: Legyen $J := \{\alpha \in I : \bar{q}_\alpha < 0\}$.

Ha $J = \emptyset$ **akkor** megoldottuk a feladatot, STOP;

különben menjünk a 2. lépésre.

2. lépés: Legyen $J_{\max} := \{\beta \in J : s_{r-1}(\beta) \geq s_{r-1}(\alpha), \text{ bármely } \alpha \in J \text{ esetén}\}$ és válasszunk ki egy tetszőleges $k \in J_{\max}$ indexet.

Ha $\bar{m}_{kk} < 0$ **akkor** diagonális pivotot alkalmazunk, és legyen

$$s_r(i) = \begin{cases} r, & \text{ha } i \in \{k, \bar{k}\} \\ s_{r-1}(i), & \text{ha } i \notin \{k, \bar{k}\} \end{cases}$$

növeljük meg az r értékét eggyel és menjünk az 1. lépésre;

különben menjünk a 3. lépésre.

3. lépés: Legyen $K := \{\alpha \in I : \bar{m}_{k\alpha} < 0\}$.

Ha $K = \emptyset$ **akkor** $P = \emptyset$ vagy $D = \emptyset$, STOP;

különben menjünk a 4. lépésre.

4. lépés: Legyen $K_{\max} := \{\beta \in K : s_{r-1}(\beta) \geq s_{r-1}(\alpha), \text{ bármely } \alpha \in K \text{ esetén}\}$ és válasszunk ki egy tetszőleges $l \in K_{\max}$ indexet. Alkalmazzunk felcserélős pivotálást a (k, l) és (\bar{l}, \bar{k}) indexekkel adott pozíciókon.

Legyen továbbá

$$s_r(i) = \begin{cases} r, & \text{ha } i \in \{k, l\} \\ s_{r-1}(i), & \text{egyébként.} \end{cases}$$

és

$$s_{r+1}(i) = \begin{cases} r+1, & \text{ha } i \in \{\bar{k}, \bar{l}\} \\ s_r(i), & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Növeljük meg az r értékét kettővel és menjünk az 1. lépésre. \square

A 2.1. Algoritmus pivotálási szabályát a szakirodalomban LIFO (*last-in-first-out*) pivotálási szabálynak nevezik. Illusztráljuk az algoritmus működését (egy felcserélős pivotálást) a következő példával.

2.1. PÉLDA. Legyen adott az $M \in \mathbb{R}^{5 \times 5}$ mátrix és a $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^5$ vektor az alábbi formában

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{q} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{pmatrix},$$

ahol \mathbf{u} és \mathbf{v} a változók vektorai.

Az induló bázistábla az alábbi

B_0	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	\mathbf{q}
v_1	0	0	1	2	-1	4
v_2	0	0	1	-1	1	-2
v_3	-1	-1	-2	0	0	0
v_4	-2	1	0	-2	0	0
v_5	1	-1	0	0	-2	0

Ekkor a $J = \{\bar{2}\}$ (1. lépés) és $J_{\max} = \{\bar{2}\}$, $k = \bar{2}$, azaz $\bar{m}_{22} = 0$ (2. lépés). Továbbá $K = \{4\}$ (3. lépés) és $K_{\max} = \{4\}$, valamint $\bar{m}_{24} = -1 < 0$ (4. lépés).

Felcserélős pivot: pivot pozíció $(\bar{2}, 4)$, tehát a v_2 változó távozik és az u_4 belép a bázisba

B_1	u_1	u_2	u_3	v_2	u_5	$\bar{\mathbf{q}}$
v_1	0	0	3	2	1	0
u_4	0	0	-1	-1	-1	2
v_3	-1	-1	-2	0	0	0
v_4	-2	1	-2	-2	-2	4
v_5	1	-1	0	0	-2	0

Ekkor az \mathbf{s} vektor a pivotálás után a következő alakú lesz, $\mathbf{s}_1 = (0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0)$ (4. lépés).

A felcserélős pivot, második pivot pozíciója a $(\bar{4}, 2)$, azaz a v_4 változó távozik a bázisból és az u_2 belép.

B_2	u_1	v_4	u_3	v_2	u_5	$\bar{\mathbf{q}}$
v_1	0	0	3	2	1	0
u_4	0	0	-1	-1	-1	2
v_3	-3	1	-4	-2	-2	4
u_2	-2	1	-2	-2	-2	4
v_5	-1	1	-2	-2	-4	4

Az s vektor a pivotálás után a következő alakú lesz, $s_2 = (0, 2, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 2, 0)$ (4. lépés) és figyeljük meg, hogy az \tilde{M} mátrix biszimmetrikus. Visszatérve az 1. lépésre kiderül, hogy a megoldás megengedett, tehát előállítottuk az (LCP_{QP}) feladatnak egy megoldását. \square

Ezzel illusztráltuk azt, hogy az algoritmussal szemben támasztott követelmények közül a 2. és a 3. (a komplementaritás és a biszimmetrikusság megőrzése) teljesül. Hátra van az algoritmus végességének az igazolása, amit a következő paragrafusban indokolunk meg.

Feltéve, hogy a 2.1. Algoritmus véges: vagy az 1. lépésben, vagy pedig a 3. lépésben állhat le. Amennyiben az 1. lépésben áll le, úgy az 1.1. Tétel értelmében előállítottuk a (P) és a (D) feladatok megoldását is. Ha a 3. lépésben áll le a 1.1. Algoritmus akkor az (LCP_{QP}) nem lesz megengedett, hiszen a rövid pivot tábla k . sora, $\bar{m}^{(k)} \geq 0$ és $\bar{q}_k < 0$, azaz

$$\left. \begin{array}{l} -Mu + v = q \\ u, v \geq 0 \end{array} \right\}$$

rendszer nem oldható meg. Ekkor a (P) és a (D) feladatpárnak nincsen optimális megoldása (lásd pl. [14, 11]). Kimondhatjuk a következő állítást

2.1. ÁLLÍTÁS (Erős dualitás tétel). Ha $\mathcal{P} \neq \emptyset$ és $\mathcal{D} \neq \emptyset$ akkor létezik $(x^*, z^*) \in \mathcal{P}$ és $(y^*, w^*) \in \mathcal{D}$, amelyekre

$$c^T x^* + \frac{1}{2} (x^*)^T C^T C x^* + \frac{1}{2} (z^*)^T z^* = (y^*)^T b - \frac{1}{2} (y^*)^T B B^T y^* - \frac{1}{2} (w^*)^T w^*. \quad \square$$

Már csak az marad hátra, hogy az algoritmus végességét igazoljuk.

3. Az algoritmus végessége

Vezessük be a t_j és $t^{(i)}$ $(2N+1)$ -dimenziós vektorokat, ahol $i \in I_B$ és $j \in I_N$, a következő módon:

$$(t_j)_k = \begin{cases} (B^{-1}m_j)_k, & \text{ha } k \in I_B \\ -1, & \text{ha } k = j \\ 0, & \text{ha } k \in I_N \cup \{q\} \setminus \{j\}, \end{cases}$$

illetve

$$(\mathbf{t}_q)_k = \begin{cases} (B^{-1}\mathbf{q})_k, & \text{ha } k \in I_B \\ -1, & \text{ha } k = q \\ 0, & \text{ha } k \in I_N \end{cases}$$

és

$$(\mathbf{t}^{(i)})^T = \mathbf{e}_i^T B^{-1}(-M \mathbf{I} \mathbf{q}).$$

Az ortogonalitási tétel [15, 16, 11] alapján: bármely két B' és B'' bázis esetén

$$(1) \quad (\mathbf{t}'_j)^T \mathbf{t}''^{(i)} = 0,$$

ahol $i \in I_{B''}$ és $j \in I_{N'}$.

Illusztráljuk az ortogonalitási tételt a 2.1. Példa segítségével. Válasszuk a B_0 bázisból az első sort, azaz

$$(\mathbf{t}^{(1)})^T = (0, 0, 1, 2, -1, 1, 0, 0, 0, 4)$$

és a \mathbf{t}_3 vektort a B_1 bázis táblából

$$(\mathbf{t}_3)^T = (0, 0, -1, -1, 0, 3, 0, -2, -2, 0, 0).$$

Egyszerű számolással adódik a

$$(\mathbf{t}^{(1)})^T \mathbf{t}_3 = -3 + 3 = 0,$$

azaz a $\mathbf{t}^{(1)}$ és \mathbf{t}_3 vektorok merőlegesek egymásra.

A továbbiakban szükségünk lesz a következő lemmára.

3.1. LEMMA. Legyen $(\mathbf{u}', \mathbf{v}'), (\mathbf{u}'', \mathbf{v}'') \in \mathcal{F}_c$. Ekkor

$$(\mathbf{u}')^T \mathbf{v}'' + (\mathbf{u}'')^T \mathbf{v}' \leq 0.$$

Bizonyítás. Figyelembe véve azt, hogy az algoritmus komplementáris táblákat generál és az 1.1. Lemmát, ekkor

$$0 \leq (\mathbf{u}' - \mathbf{u}'')^T (\mathbf{v}' - \mathbf{v}'') = (\mathbf{u}')^T \mathbf{v}' - (\mathbf{u}'')^T \mathbf{v}' - (\mathbf{u}')^T \mathbf{v}'' + (\mathbf{u}'')^T \mathbf{v}'',$$

de a megoldások komplementaritása miatt, a következő összefüggés adódik

$$(2) \quad (\mathbf{u}'')^T \mathbf{v}' + (\mathbf{u}')^T \mathbf{v}'' \leq 0. \quad \square$$

A továbbiakban bebizonyítjuk, hogy a 2.1. Algoritmus véges.

3.1. TÉTEL. A 2.1. *Algoritmus* véges.

Bizonyítás. Indirekt módon bizonyítjuk az állítást. Tegyük fel, hogy az algoritmus nem véges. Ez azt jelenti, hogy van olyan példa, amely esetén az algoritmus végtelen sok bázistáblát generál. Mivel a lehetséges bázisok száma véges (legfeljebb $\binom{2N}{N}$), ezért egyes bázisok végtelen sokszor fordulnak elő. Ezt a jelenséget *ciklizálás*nak nevezzük. Azon példák közül, amelyek esetén ciklizálás lép fel, tekintsünk egy *minimális* méretű (LP_{QP}) feladatot, azaz egy olyat, amelynél kisebb méretű feladatra az algoritmus már nem ciklizál. A minimális méret miatt, minden változó részt vesz a ciklizálásban.

Figyeljük meg az algoritmus által előállított bázistáblák sorozatát, és jelölje $M_{B'}$ azt,

- (i) amely esetén valamely változó pár először változtat bázis állapotot (jelölje ezt a párt az (u_p, v_p)),⁷ és
- (ii) az $M_{B'}$ táblát követően már $s_r(\alpha) \geq 1$, bármely $\alpha \in I$ esetén, azaz az $M_{B'}$ után már minden változó bázis állapota legalább egyszer megváltozott.

Nyilvánvaló, hogy a u_p bázis és az v_p nem bázis változó az $M_{B'}$ táblán.

Az $M_{B'}$ az utolsó olyan (rövid) bázistábla, amely esetén valamely $\alpha \in I$ indexű változó(k) esetén $s_r(\alpha) = 0$, azaz még nem változtattak bázis állapotot. A kérdés az, hogy maximum hány ilyen változó lehet? A válasz eléggé nyilvánvaló: ha az $M_{B'}$ táblán diagonális pivotra kerül sor akkor egy pár, különben maximum két olyan pár változó lehet, amelyek még nem mozogtak.

Vizsgáljuk meg az $M_{B'}$ táblán előforduló előjelstruktúrákat egy kicsit részletesebben. A 2.1. Algoritmusban definiált szabály alapján az $M_{B'}$ táblán az u_p változó belép a bázisba és a v_p távozik az r' , illetve az $(r' + 1)$. iterációban. Az $M_{B'}$ táblán a következő esetek fordulhatnak elő:

1. A v_p változó kiválasztása egyértelműen történt. A v_p változó távozik és az u_p változó pedig belép a bázisba, (diagonális pivot, 4. ábra, (a)), ekkor

$$s_{r'}(\alpha) = \begin{cases} r', & \text{ha } \alpha \in \{p, \bar{p}\}, \\ s_{r'-1}(\alpha), & \text{egyébként.} \end{cases}$$

⁷Jegyezzük meg, hogy a p nem feltétlenül a maximális index.

		u_k	u_p	
v_k			\ominus	\oplus
			\vdots	\vdots
			\ominus	\oplus
			$+$	$*$
v_p			0	\oplus
			\vdots	\vdots
			0	\oplus
	$\oplus \quad \cdots \quad \oplus \quad -$	$0 \quad \cdots \quad 0$	0	$-$

5. ábra. A q_k értéket $*$ jelöli. Ha $q_k \geq 0$ akkor, lényegében a 4. ábra (b) esetét kaptuk, különben $q_k < 0$, azaz akár a v_k változó távozásával is kezdődhetett volna a pivot pozíció kiválasztása.

Az eddigi esetekben a v_p változót, úgymond *aktívan*, választottuk ki a bázisból való távozásra. Előfordulhat az is, hogy felcserélős pivot esetén, az u_p , illetve v_p változó kiválasztása *passzívan* történik meg. Ezt illusztrálja a 6. ábra⁸.

4. Az $M_{B'}$ bázis tábla esetén, valamely v_j változó távozik a bázisból és felcserélős pivotálásra kerül sor, azaz $\bar{m}_{jj} = 0$ a rövid táblán. A bázisba belépő változó az u_p , illetve a második pivotáláskor a v_p távozik és az u_j belép a bázisba, ekkor

$$s_{r'+1}(\alpha) = \begin{cases} r', & \text{ha } \alpha \in \{p, \bar{j}\}, \\ r' + 1, & \text{ha } \alpha \in \{\bar{p}, j\}, \\ s_{r'-1}(\alpha), & \text{egyébként.} \end{cases}$$

A 2.1. Algoritmus pivotálási szabálya és az $M_{B'}$ tábla definíciója alapján nyilvánvaló, hogy a v_j változó sorában az egyetlen negatív érték az u_p változó együtthatója, azaz az u_p változót, mint a bázisba belépőt, egyértelműen választottuk ki⁹.

⁸A teljesség korlátozása nélkül feltehetjük, hogy a v_j bázis változó.

⁹Előfordulhat az az eset, amikor a v_j változó is először mozog, de ezt az esetet, azért nem kell külön tárgyalnunk, mert csupán megállapodás kérdése, hogy a két lehetséges változó közül, az aktívan, illetve passzívan választottat nevezzük-e „utolsó”nak. Ezt az esetet, egyébként, az 5. ábrán mutattuk be.

		u_p				u_j			
						\ominus			
						\vdots			
						\ominus			
						$+$			
v_p						0			
						\vdots			
						0			
v_j	\oplus	\dots	\oplus	$-$	0	\dots	0	$-$	

6. ábra.

A B' bázist követően, mind a bázis változók, mind pedig a bázison kívüli változók között kialakult egy egyértelmű rendezés, hiszen minden iterációt jelző, $s_r(i)$, kísérő érték, pontosan egyszer fordul elő az aktuális I_B és I_N index halmazokhoz tartozó változók esetén. A továbbiakban a változók kiválasztása egyértelmű lesz, ez azt jelenti, hogy $|J_{\max}| = |K_{\max}| = 1$ lesz a további iterációk során.

A ciklizálás miatt, figyelembe véve a példa minimális méretét, minden változó végtelen sokszor változtatja meg a bázisállapotát, ezért lesz egy olyan, a B' bázist követő első B'' bázis, amelynél az (u_p, v_p) pár újra bázisállapotot vált, azaz u_p távozik a bázisból és a v_p belép a bázisba.

Az $M_{B''}$ tábla az, amely esetén az (u_p, v_p) változó pár először mozog az $M_{B'}$ tábla óta. Az u_p változó távozik a bázisból. Ekkor a következő esetek fordulhatnak elő.

- Diagonális pivottal történik a báziscsere, 7. ábra.
- Az u_p változót választottuk távozó változónak és felcserélős pivot történik, 8. ábra. (Az u_p változó távozik és a $v_l(u_l)$ lép be a bázisba.)
- Az $u_l(v_l)$ változót választottuk távozó változónak és felcserélős pivot történik, ahol a v_p változó lép be a bázisba, 9. ábra.

Vizsgáljuk meg részletesen a felsorolt eseteket.

Az u_p változó kiválasztására a 2.1. Algoritmus 2. lépésében került sor, azaz $J_{\max} = \{p\}$. Ebben az esetben, ha $\bar{q}_i'' < 0$, azaz $i \in J$, akkor $s_{r''}(i) < s_{r''}(p)$ teljesül. Ekkor bármely $i \in J \setminus \{p\}$ indexű változó, az $M_{B'}$ bázis óta nem mozgott, tehát az $i \in I_{B'}$, vagyis, ha $u_i'' < 0$ ($v_i'' < 0$) akkor $u_i' \geq 0$ ($v_i' \geq 0$) és $v_i' = 0$ ($u_i' = 0$) teljesül.

Az (a) eset ugyanúgy ellentmondásra vezet mint az 1. & A.

A (b) esetben szükséges figyelembe vennünk az u_k'' értékét (előjelét) is. Ennek megfelelően több esetre ágazik szét az elemzésünk.

Ha $v_k' < 0$ és $u_k'' = 0$ akkor az (a) esethez hasonlóan ellentmondásra jutunk.

Ha $v_k' < 0$ és $u_k'' < 0$ akkor legyen $M_{B''''}$ az a pivot tábla, amelyen az u_k változó először lép be a bázisba az $M_{B'}$ tábla óta. A pivotálási szabály alapján legyen $J = \{i \in I_{B''''} : t_{iq}''' < 0\}$. Nyilván $k \in J$ és $s_{r''''-1}(k) > s_{r''''-1}(i)$, $i \in J$, $i \neq k$ esetén. Mivel $s_{r'+1}(p) > s_{r'+1}(k)$, illetve, ha v_p bázis változó az $M_{B''''}$ táblán az csak úgy lehetséges, hogy az $M_{B'}$ és $M_{B''''}$ táblák között előforduló valamely táblán (u_p, v_p) változók mozogtak, de akkor $s_{r''''-1}(\bar{p}) > s_{r''''-1}(k)$, tehát $t_{pq}''' \geq 0$ lenne.

Az ortogonalitási tétel alapján $(t'(\bar{p}))^T t_q''' = 0$.

Az $i \in J \setminus \{k\}$ indexű változók nem mozogtak az $M_{B'}$ tábla óta, azaz $t_{pi}' t_{iq}''' = 0$, mivel $i \neq p$ és $i \neq \bar{p}$. Továbbá

$$(6) \quad t_{pj}' t_{jq}''' \geq 0 \quad \text{teljesül bármely } j \notin J \cup \{p, \bar{p}, k, \bar{k}, q\}.$$

A pivot szabály miatt $t_{pq}''', t_{\bar{p}q}''' \geq 0$, illetve $t_{\bar{p}p}' = 1$ és $t_{pp}' = 0$ alapján

$$(7) \quad t_{\bar{p}p}' t_{pq}''' + t_{pp}' t_{pq}''' \geq 0$$

teljesül. Mivel v_k bázis változó volt az $M_{B'}$ táblán, ezért $t_{\bar{p}k}' = 0$ és $t_{pk}' < 0$, hiszen (\bar{p}, k) pivot pozíció volt. A pivotálási szabály miatt $t_{kq}''' = 0$ és $t_{kq}''' < 0$, valamint $t_{\bar{p}q}' < 0$ és $t_{qk}''' = -1$. Ez alapján

$$(8) \quad t_{\bar{p}k}' t_{kq}''' + t_{\bar{p}k}' t_{kq}''' + t_{\bar{p}q}' t_{qk}''' > 0$$

adódik. Összegezve a (6)–(8) egyenlőtlenségeket kapjuk a

$$(9) \quad 0 < (t'(\bar{p}))^T t_q''' = 0$$

ellentmondást.

Ha $v_k' < 0$ és $u_k'' > 0$ akkor két további lehetőségünk van, azaz (i) $s_{r''}(k) > r'$, vagy (ii) $s_{r''}(k) = r'$.

Amennyiben az (i) eset áll fenn akkor az u_k változó távozott valamely bázisból (és később újra bekerült a bázisba) az $M_{B''}$ táblát megelőzően. Ezzel szemben az (ii) esetben az u_k változónak (legalább egyszer) el kell hagynia ahhoz a bázist, hogy ciklus kialakulhasson. Erre csak az $M_{B''}$ tábla után kerülhet sor.

Függetlenül az (i) és (ii) esetektől, jelölje $M_{B''''}$ azt a bázis táblát, amely esetén az u_k változó, első alkalommal távozik a bázisból.

Ha $s_{r''}(k) > r'$ akkor az $M_{B''''}$ tábla megelőzi az $M_{B''}$ táblát, ezért $r' = s_{r''''}(k) < s_{r''''}(p) = r' + 1$. Mivel az u_k változó belép a bázisba, ezért $u_p''' \geq 0$. Megmutatjuk, hogy a (9) egyenlőtlenség most is teljesül. Az egyetlen különbség az előző

elemzéshez képest az, hogy a $t''_{pq} \geq 0$, amíg $t''_{pq} = 0$. Másfelől a $t'_{\bar{p}p} = 0$ miatt, ha a t''_{iq} értékeit felcseréljük t''_{iq} értékeivel, az összefüggések változatlanok maradnak.

Végezetül, ha a B''' bázis a B'' bázist követi (ez az (ii) eset), akkor $t'''_{kq} = u'''_k < 0$ és $t'''_{kq} = v'''_k = 0$ teljesül. Másfelől az is igaz, hogy az $r' = s_{r'''}(k) < \min \{s_{r'''}(p), s_{r'''}(\bar{p})\}$, azaz $t'''_{pq} = u'''_p \geq 0$ és $t'''_{\bar{p}q} = v'''_p \geq 0$. Ezért ebben az esetben is hasonlóan igazolható a (9) egyenlőtlenség, amely mutatja, hogy ez az eset sem fordulhat elő.

4. & A. A 6. és 7. ábrákon lévő $M_{B'}$ és $M_{B''}$ pivot táblákból olvassuk ki a $t^{(\bar{j})}$ és t''_q vektorokat. A 7. ábrán az u_p változó távozik a bázisból és v_p lép be az új bázisba, ezért $t''_{pq} < 0$ és $t''_{\bar{p}q} = 0$. A pivotálási szabály miatt

$$J = \{i \in I_{B''} : t''_{iq} < 0\} \setminus \{p\} \subset I_{B'},$$

hiszen $s_{r'}(p) = s_{r''-1}(p) > s_{r''-1}(i)$ teljesül bármely $i \in J \setminus \{p\}$ indexre, azaz $t'_{ji} = 0$, ha $i \in J$. Ebből következik, hogy

$$(10) \quad \sum_{i \in J \setminus \{p\}} t'_{ji} t'_{iq} = 0.$$

Figyelembe véve az $s_{r'}(\bar{j}) = s_{r'}(p)$ és $s_{r''-1}(j) > s_{r''-1}(p)$ kísérő értékeket azt kapjuk, hogy t''_{jq} és $t''_{\bar{j}q}$ nem negatívak. A 6. ábra alapján $t'_{jj} = 0$, $t'_{j\bar{j}} = 1$, $t'_{j\bar{p}} = 0$, $t'_{jp} < 0$ és $t'_{jq} < 0$, ezért

$$(11) \quad t'_{j\bar{j}} t''_{jq} + t'_{j\bar{j}} t''_{jq} + t'_{j\bar{p}} t''_{pq} + t'_{jp} t''_{pq} + t'_{jq} t''_{qq} \geq t'_{jp} t''_{pq} - t'_{jq} > 0.$$

A (10) és (11) összefüggések mellett figyelembe véve, hogy, ha $l \notin J \cup \{j, \bar{j}, \bar{p}, q\}$ akkor t'_{jl} és t''_{lq} nem negatív számok

$$0 = (t^{(\bar{j})})^T t''_q > 0$$

adódik, ami ellentmondást ad, tehát a 4. & A. esetekben meghatározott $M_{B'}$ és $M_{B''}$ pivot táblák nem követhetik egymást.

A B. esetben a \bar{q}'' jobboldal vektor struktúrája megegyezik az A. esetben a \bar{q}'' jobboldal vektorával, ezért az 1. & B. és 2. & B. esetek ugyanúgy nem fordulhatnak elő, mint az 1. & A. eset.

valamint

$$(16) \quad \sum_{i \in (J \cup \{p\})} t'_{ip} t''_{li} = \sum_{i \in (\bar{J} \cup \{\bar{p}\})} t'_{i\bar{p}} t''_{li}.$$

Könnyen belátható, hogy

$$(17) \quad t'_{pk} t''_{k\bar{l}} = t'_{kp} t''_{l\bar{k}}.$$

Végezetül a $t'_{pp} = 0$ és a $t'_{p\bar{p}} = 1$, illetve $t''_{pl} = 0$ miatt

$$(18) \quad t'_{pp} t''_{p\bar{l}} = 0 \quad \text{és} \quad t'_{p\bar{p}} t''_{p\bar{l}} = 0$$

adódik. Figyelembe véve a megfelelő vektorok ortogonalitását és a (12)–(18) összefüggéseket

$$0 = (t'^{(\bar{p})})^T t'_l - (t'_p)^T t''^{(l)} = t'_{pp} t''_{lp} > 0$$

ellentmondás adódik, hiszen $t'_{pq} t''_{ql} = t'_{qp} t''_{lq} = 0$ nyilván teljesül.

4. & C. A 6. és 9. ábrákból olvassuk ki a $t'^{(\bar{j})}$ és t''_l vektorok előjel struktúráit. Egyszerűen adódik a

$$(19) \quad t'_{jq} t''_{q\bar{l}} = 0 \quad \text{és} \quad t'_{jp} t''_{p\bar{l}} < 0$$

összefüggések, hiszen $t''_{ql} = 0$, illetve $t'_{jp} < 0$ és $t''_{p\bar{l}} > 0$. A gondot ismét a

$$\bar{J} = \{i \in I_{B''} : t''_{i\bar{l}} > 0\}$$

indexű változók okozhatnák, de $\bar{J} \subset I_{B'}$ és így $t'_{ji} = 0$ miatt

$$(20) \quad t'_{ji} t''_{i\bar{l}} = 0$$

adódik bármely $i \in \bar{J}$ esetén. esetén. (A pivotálási szabály miatt $\bar{j} \notin \bar{J}$, mert akkor $j \in J$ az $t''_{lj} < 0$, és ezen kellene pivotálni.) Vegyük észre, hogy ha $i \in I \setminus (J \cup \{p\})$ akkor $t'_{ji} \geq 0$ és $t''_{i\bar{l}} \leq 0$ teljesül, azaz

$$(21) \quad t'_{ji} t''_{i\bar{l}} \leq 0.$$

Alkalmazzuk az ortogonalitási tételt és figyelembe véve a (19)–(21) összefüggéseket

$$0 = (t'^{(\bar{j})})^T t''_l \leq t'_{jp} t''_{p\bar{l}} < 0$$

ellentmondás adódik. □

4. Összefoglaló

S. Zhang [40] által lineáris programozási feladatra megfogalmazott criss-cross típusú pivotálási szabályt, amelyben a bázisba legkésőbb belépő változó távozik legelőbb a bázisból (last-in-first-out, LIFO), általánosítottuk konvex kvadratikus célfüggvényes lineáris feltételes primál–duál feladat párból származtatott lineáris komplementaritási feladatra. Az ortogonalitási tételre alapozva bizonyítottuk be a criss-cross algoritmus ezen új variánsának a végességét, konvex kvadratikus programozási feladatra.

A leírtakhoz hasonlóan igazolható, hogy S. Zhang [40] leggyakrabban választott változó (most-often-selected variable)

$$s_r(\alpha) = \begin{cases} s_{r-1}(\alpha) + 1, & \text{ha az } \alpha \in I \text{ indexű változó mozog az } r. \text{ iterációban} \\ s_{r-1}(\alpha), & \text{különben} \end{cases}$$

szabályára alapozva is készíthetünk criss-cross típusú pivotálási algoritmust biszimmetrikus mátrixú lineáris komplementaritási feladatokra.

Klafszky és Terlaky [17] cikke alapján nyilvánvaló, hogy lineáris programozási feladat pár speciális struktúrájú lineáris komplementaritási feladatra vezet. Az S. Zhang [40] criss-cross típusú algoritmusának az (LCP_{QP}) feladatra adott általánosításának a cikkünkben közölt bizonyításából, a primál–duál lineáris programozási feladatpárra, az S. Zhangétól eltérő, új végesség bizonyítást nyerünk.

Az algoritmus megfogalmazásából világos, hogy a belépő/távozó változók kiválasztásának a szabadsága legfeljebb addig áll fenn, amíg az eljárás során mozgó változó mindegyike, legalább egyszer bázis állapotot nem cserél. Ezek után a pivot pozíció kiválasztása egyértelművé válik. Ennek ellenére, általában mégsem mondható az, hogy az utolsónak mozgó változó első bázis állapot változása után, az indexek kialakult rendezésének (sorrendjének) a rögzítése esetén, a továbbiakban a Klafszky és Terlaky [17] féle criss-cross módszerként működne az algoritmus.

Hivatkozások

- [1] Avis, D. and Fukuda K., A pivoting algorithm for convex hulls and vertex enumeration of arrangements and polyhedra, *Discrete and Computational Geometry* 8 (1992) 295–313.
- [2] Bazaraa, M. S., Sherali, H. D. and Shetty, C. M., *Nonlinear Programming, Theory and Algorithms* (John Wiley and Sons, Inc., 1993).
- [3] Cottle, R. W. and Dantzig, G. D., Complementary pivot theory of mathematical programming, *Linear Algebra and Its Applications* 1 (1968) 103–125.
- [4] Cottle, R. W., Pang, J-S. and Stone, R. E., *The linear complementarity problem* (Academic Press, 1992).

- [5] Fukuda K. and Matsui T., On the finiteness of the criss-cross method. *European Journal of Operational Research*, **52** (1991) 119–124.
- [6] Fukuda K. and Namiki M., On extremal behaviors of Murty's least index method, *Mathematical Programming* **64** (1994) 365–370.
- [7] Fukuda K., Lüthi, H.-J. and Namiki M., The existence of a short sequence of admissible pivots to an optimal basis in LP and LCP, *International Transactions in Operations Research* **4** (1997) 273–284.
- [8] Fukuda K. and Terlaky T., Criss-cross methods: A fresh view on pivot algorithms, *Mathematical Programming* **79** (1997) 369–395.
- [9] Fukuda K. and Terlaky T., Criss-cross methods: A fresh view on pivot algorithms, *Reports of the Faculty of Technical Mathematics and Informatics no. 97-26* (Delft University of Technology, Delft, 1997) 1–52.
- [10] Illés T., Roos, C. and Terlaky T., Simple approach for the interior point theory of linear complementarity problems with P_* matrices, *Reports of the Faculty of Arts and Sciences, EMU AS 99-02* (Eastern Mediterranean University, Famagusta, North-Cyprus, February 1999).
- [11] Illés T., *Lineáris optimalizálás pivot algoritmusai*, Eötvös Loránd Tudományegyetem, Természettudományi Kar, Budapest, egyetemi jegyzet (1998), kézirat.
- [12] Ji, J., Potra, F. and Sheng, R., A predictor-corrector method for the P_* -matrix LCP from infeasible starting points, *Optimization Methods and Software* **6** (1995) 109–126.
- [13] Jansen, B., Roos, C. and Terlaky T., A family of polynomial affine-scaling algorithms for positive semidefinite linear complementarity problems, *SIAM Journal on Optimization*, **7** (1997) 126–140.
- [14] Keller, E., The general quadratic optimization problem, *Mathematical Programming* **5** (1973) 311–337.
- [15] Klafszy E. és Terlaky T., Pivot technika szerepe a lineáris algebra néhány alapvető tételének bizonyításában, *Alkalmazott Matematikai Lapok* **14** (1989) 425–448.
- [16] Klafszy E. and Terlaky T., The role of pivoting in proving some fundamental theorems of linear algebra, *Linear Algebra and its Applications*, **151** (1991) 97–118.
- [17] Klafszy E. and Terlaky T., Some generalization of the criss-cross method for quadratic programming, *Math. Oper. und Stat. Ser. Optimization* **24** (1992) 127–139.
- [18] Kojima M., Mizuno S. and Yoshise A., A polynomial-time algorithm for a class of linear complementarity problems, *Mathematical Programming* **44** (1989) 1–26.
- [19] Kojima M., Mizuno S. and Yoshise A., An $\mathcal{O}(n\sqrt{L})$ iteration potential reduction algorithm for linear complementarity problems, *Mathematical Programming* **50** (1991) 331–342.
- [20] Kojima M., Megiddo, N., Noma T. and Yoshise A., *A unified approach to interior point algorithms for linear complementarity problems*, volume 538 of *Lecture Notes in Computer Science* (Springer Verlag, Berlin, Germany, 1991).
- [21] Lemke, C. E., A method of solution for quadratic programs, *Management Science* **8** (1962) 442–445.
- [22] Lemke, C. E., Bimatrix equilibrium points and mathematical programming, *Management Science* **11** (1965) 681–689.
- [23] Lemke, C. E., “On complementary pivot theory”, in: *Mathematics of Decision Sciences* Eds. G. B. Dantzig and A. F. Veinott (1968).

- [24] Monteiro, R. D. C., Adler, I. and Resende, M. G. C., A polynomial-time primal-dual affine-scaling algorithm for linear and convex quadratic programming and its power series extension, *Mathematics of Operations Research* **15** (1990) 191–214.
- [25] Murty, K. G., A note on a Bard type scheme for solving the complementarity problem, *Opsearch* **11** (1974) 123–130.
- [26] Murty, K. G., *Linear complementarity, linear and nonlinear programming* (Heldermann Verlag, Berlin, 1988).
- [27] Roos, C., Terlaky T. and Vial, J.-Ph., *Theory and Algorithms for Linear Optimization: An Interior Point Approach* (John Wiley & Sons., 1997).
- [28] Sonnevend Gy., An “analytical center” for polyhedrons and new classes of global algorithms for linear (smooth, convex) programming, in: *Lecture Notes in Control and Information Sciences* **84**, Springer Verlag, Berlin, Germany (1985) 866–876.
- [29] Sonnevend Gy., A new method for solving a set of linear (convex) inequalities and its applications, *Technical report*, Department of Numerical Analysis, Institute of Mathematics, Eötvös Loránd University, H-1088 Budapest, Múzeum krt. 6-8., Hungary, 1985.
- [30] Stoer, J. and Wechs, M., “Infeasible-interior-point paths for sufficient linear complementarity problems and their analyticity”. Technical report No. 216, Institut für Angewandte Mathematik und Statistik, Universität Würzburg, 1996.
- [31] Terlaky T., „Egy véges criss-cross módszer és alkalmazásai”, MTA SZTAKI Tanulmányok 179/1986, Budapest, 1986.
- [32] Terlaky T., Egy új, véges criss-cross módszer lineáris programozási feladatok megoldására, *Alkalmazott Matematikai Lapok* **10** (1984) 289–296.
- [33] Terlaky T., A convergent criss-cross method, *Math. Oper. und Stat. Ser. Optimization* **16** (1985) 683–690.
- [34] Terlaky T., Egy új kvadratikus programozási algoritmus, *Alkalmazott Matematikai Lapok* **12** (1986) 283–293.
- [35] Terlaky T. and Zhang, S., Pivot rules for linear programming: A survey on recent theoretical developments, *Annals of Operations Research* **46** (1993) 203–233.
- [36] Tucker, A. W., Principal pivotal transforms of square matrices, *SIAM Review* **5** (1963) 305.
- [37] Van de Panne, C. and Whinston, A., The symmetric formulation of the simplex method for quadratic programming, *Econometrica* **37** (1969) 507–527.
- [38] Väliäho, H., A new proof of finiteness of the criss-cross method, *Math. Oper. und Stat. Ser. Optimization* **25** (1992) 391–400.
- [39] Wolfe, P., The simplex method for quadratic programming, *Econometrica* **27** (1959) 382–398.
- [40] Zhang, S., A new variant of criss-cross pivot algorithm for linear programming, *European Journal of Operations Research* **116** (1999) 607–614.
- [41] Yoshise A., “Complementarity problems”, in: *Interior point methods of mathematical programming* Ed. T. Terlaky editor, Dordrecht, Kluwer Academic Publishers (1996) 297–367.

(Beérkezett: 2001. december 17.)

ARIF A. AKKELES
EASTERN MEDITERRANEAN UNIVERSITY
FACULTY OF ENGINEERING
COMPUTER ENGINEERING DEPARTMENT
FAMAGUSTA, NORTH-CYPRUS
E-MAIL: ARIF.AKKELES@EMU.EDU.TR

BALOGH LÁSZLÓ ÉS ILLÉS TIBOR
EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR
OPERÁCIÓKUTATÁSI TANSZÉK
1053 BUDAPEST, KECSKEMÉTI U. 10-12.
E-MAIL: ILLES@MATH.ELTE.HU

NEW VARIANTS OF THE CRISS-CROSS METHOD FOR LINEAR COMPLEMENTARITY PROBLEMS WITH BISYMMETRIC MATRICES

ARIF A. AKKELES, LÁSZLÓ BALOGH AND TIBOR ILLÉS

In this paper, S. Zhang's new and more flexible criss-cross type pivot rule is generalized for linearly constrained convex/concave primal-dual quadratic programming problem. The obtained criss-cross type algorithm is different from the original criss-cross algorithm defined by Klafszky and Terlaky.

The finiteness proof of this new criss-cross algorithm is similar to the original one, in the sense that it is based on the orthogonality theorem. Furthermore, if the primal-dual problem is a linear programming problem (no quadratic terms in the objective function) then the structure of the corresponding linear complementarity problem is simpler and then our proof of finiteness of the algorithm leads to a new proof of S. Zhang's criss-cross type algorithm for linear programming problem.

A LEGKÖZELEBBI SZOMSZÉD GYORS MEGKERESÉSE

KETSKEMÉTY LÁSZLÓ

Budapest

Egy n elemű tananyagban a legközelebbi társ megkereséséhez n távolságot kell kiszámítani. Kizárási feltétel alkalmazásával a távolságszámítások számát radikálisan csökkenteni lehet. A dolgozat első részében metrikus térben a háromszög-egyenlőtlenségen alapuló kizárási feltételeket hasonlítjuk össze a hatékonyság szempontjából. Foglalkozunk a csoportos kizárás lehetőségeivel is, amikor a tanulópontok jól definiált halmazait együttesen lehet kizárni a keresés folyamatából. A kizárásos keresés hatékonysága függ a tanulópontok feldolgozásának a sorrendjétől is. A dolgozat végén néhány keresési stratégiát hasonlítunk össze.

1. Jelölések

Legyen (\mathcal{X}, d) egy metrikus tér. Adott egy $\mathcal{T}_n = \{t_1, t_2, \dots, t_n\} \subset \mathcal{X}$ véges elemszámú halmaz, melyet *tanulópont-halmaznak* nevezünk. A $\mathcal{D}_n = \{(t_1, l_1), (t_2, l_2), \dots, (t_n, l_n)\} \subset \mathcal{X} \times \{1, 2, \dots, L\}$ halmazt nevezzük *tananyag*nak. A $\text{class}(t_i) = l_i \in \{1, 2, \dots, L\}$ a t_i tanulópont *tanítása*. A tanítások segítségével a tanulópontok halmaza *osztályokra* partícionálható: $\mathcal{T}_n = \bigcup_{\alpha=1}^L C_\alpha$, ahol $t_i, t_j \in C_\alpha$ esetén $l_i = l_j$ és $t_i \in C_\alpha, t_j \in C_\beta$ esetén $l_i \neq l_j$. Az $x \in \mathcal{X}$ *osztályozandó pont* vagy *tesztpont* (query point) *legközelebbi szomszédja* (vagy *társa*) az a $t_{NN}(x) \in \mathcal{T}_n$ tanulópont, melyre $d_{\min} = d(x, t_{NN}(x)) \leq d(x, t_i), i = 1, 2, \dots, n$. A legközelebbi társ módszerhez olyan algoritmusok tartoznak, amelyek megadják $t_{NN}(x)$ -et, vagy legalább is $t_{NN}(x)$ tanítását. A dolgozatban olyan $t_{NN}(x)$ -et kereső algoritmusokat elemzünk, amelyeknél nem kell feltétlenül kiszámítani az osztályozandó pont és az összes tanulópont távolságait. A háromszög-egyenlőtlenségen alapuló *kizárási feltételeknek* eleget tevő $t \in \mathcal{T}_n$ tanulópontok biztosan nem lehetnek a legközelebbi társai az x osztályozandó pontnak, így nem kell kiszámolni a $d(x, t)$ távolságokat sem. Egy kereső algoritmus

lépésszáma azoknak a $d(x, t)$ távolságszámításoknak a száma, amelyet a legközelebbi társ megkereséséig elvégeztünk. A lépésszámot $s_n(x)$ -nel fogjuk jelölni.

Ha az eddig kiszámolt távolságok és a tanulópontok távolságmátrixának segítségével olyan feltételrendszert állítunk fel, aminek eleget nem tévő tanulópontok biztosan nem lehetnek a tesztpont legközelebbi társa, *kizárási feltételről* beszélünk. A kizárási feltételeket kielégítő tanulópontokat elhagyjuk a keresés folyamatából, így távolságukat a tesztponttól nem kell kiszámítani. Lényeges az is, hogy a még ki nem zárt tanulópontok közül melyiket választjuk a következő lépésben. Egy algoritmust, amely egyértelmű utasítást ad a következő tanulópont megválasztására, azaz előírja a keresés sorrendjét, *kereső stratégiának* nevezzük.

Tegyük fel, hogy a legközelebbi szomszéd keresése (rövidítve NN-keresés) folyamán már feldolgoztuk a $t_{i_1}, t_{i_2}, \dots, t_{i_k}$ tanulópontokat, és kiszámoltuk a $d(x, t_{i_1}), d(x, t_{i_2}), \dots, d(x, t_{i_k})$ távolságokat. Vezessük be az alábbi jelöléseket:

$$d_{\min} = \min_{j=1, \dots, k} d(x, t_{i_j}), \quad t_{NN} = t_{i_s}, \quad \text{ha} \quad d_{\min} = d(x, t_{i_s}),$$

$$d_{\max} = \max_{j=1, \dots, k} d(x, t_{i_j}), \quad t_{FN} = t_{i_r}, \quad \text{ha} \quad d_{\max} = d(x, t_{i_r}).$$

Az irodalomban többen publikáltak különböző kereső stratégiákról és kizárási feltételekről. Sethi [4] arra az esetre javasol kereső stratégiát, amikor az \mathcal{X} alakzattér lineáris. Ez a keresési elv átvihető tetszőleges metrikus térbe is. Azt javasolta, hogy válasszunk ki tetszőlegesen három tanulópontot; jelöljük ezeket t_1, t_2, t_3 -mal. Számoljuk ki ezek távolságait az x osztályozandó ponttól. Jelöljük ezeket D_1, D_2, D_3 -mal. Ezután megkeressük azt a legkisebb $\varepsilon > 0$ -át, ahol

az $A = \bigcap_{i=1}^3 S(t_i, D_i + \varepsilon) \setminus S(t_i, D_i - \varepsilon)$ pontthalmaznak már van a \mathcal{T}_n tanulópont-

halmazzal közös eleme. Ezt a közös elemet tekintjük legközelebbi szomszédnak.

A képletben $S(x, R)$ az x középpontú, R sugarú nyílt gömböt jelöli, tehát A egy $\varepsilon = \min_{t \in \mathcal{T}_n \setminus \{t_1, t_2, t_3\}} \max_{i=1, 2, 3} |d(t, t_i) - d(x, t_i)|$ vastagságú gömbhéj. A javasolt algorit-

mus nagy hibája, hogy nem garantálja a legközelebbi társ megtalálását. A gömbhéjak metszetébe, még kis ε esetén is az x -től igen távoli tanulópontok is beleeshetnek, ha a kiválasztott t_1, t_2, t_3 tanulópontok egymáshoz lényegesen közelebb esnek, mint x -hez. Faragó et al. [2] bebizonyították, hogy \mathbb{R}^p -ben $p + 2$ tanulóponthoz a fenti gömbhéjas technikával a legközelebbi társ megtalálható. Sethi kereső stratégiájával tehát a $p = 1$ esetben garantált csak a legközelebbi társ megtalálása. Többen, így pl. Vidal [5], Faragó et al. [2], [1] javasolták a *geometriai*, vagy *minimax* keresést, ami a fenti gömbhéjas keresési technikának az általánosítása. Részletesen a 5. szakaszban fogunk vele foglalkozni.

Fukunaga és Narendra [3] \mathbb{R}^p -ben egy kereső fa felépítését javasolta, amelyet bejárva egyre közelebb jutunk a legközelebbi társhoz. A keresés közben kizárási feltétellel a fa egyre több ágát tudjuk törölni, ezáltal a bejárando utat rövidítjük le. A kereső fát hierarchikus klaszterezéssel alakítjuk ki úgy, hogy az összevonások során a klaszterek száma minden lépésben az l -ed részére csökken. A 0-adik generá-

cióhoz maga a \mathcal{T}_n tanulópont-halmaz tartozik: $C_1^0 = \mathcal{T}_n$. Az első generáció a \mathcal{T}_n egy l halmazból álló partíciója: $\mathcal{T}_n = \bigcup_{j=1}^l C_j^1$. A következő generációban a partíció halmazainak a száma l^2 , $C_j^1 = \bigcup_{k=(j-1)l+1}^{jl} C_j^2$, stb. Tegyük fel, hogy a k -adik generációban már csak egyelemű klaszterek találhatók. Ezután minden partícióban kiszámoljuk az átlagvektort, és meghatározzuk azt a sugarat, amelyhez tartozó gömb az átlagvektor körül már lefedi a partíciót. Az első generációból azt a partíciót vesszük először, amelyik átlagvektora a legközelebb van az x -hez. Ezen legközelebbi távolsággal egész partíciók zárhatók ki a további vizsgálatból. Az ezekhez tartozó ágakat töröljük a kereső fából. A kiválasztott partíción belül szekvenciálisan haladva, a pillanatnyi legközelebbi távolság egyre csökken fog, ami által a kizárási feltétel egyre élesedik. Az algoritmusban javasolt kizárási feltétel a később ismertetett \mathcal{K}_1 kizárási feltételhez hasonló, de itt a tér linearitása is erősen ki van használva. Ehhez hasonló, általános metrikus térben érvényes csoportos kizárási technikát tárgyalunk a 3. szakaszban. A 2. szakaszban ismertetendő \mathcal{K}_3 -mal jelölt kizárási feltételt egymástól függetlenül javasolta Vidal [5] és Faragó et.al. [1].

2. Kizárási feltételek

Jelölje $\delta = (d(x, t_1), d(x, t_2), \dots, d(x, t_n))^T$ az $x \in \mathcal{X}$ tesztpont távolságvektorát a \mathcal{T}_n tanulópont-halmaz elemeitől. A háromszög-egyenlőtlenségből következően δ komponenseinek ki kell elégítenie az alábbi reláció rendszert. Minden i, j indexpárra fenn kell állnia, hogy $|\delta_i - \delta_j| \leq \delta_j \leq \delta_i + d_{ij}$, ahol $d_{ij} = d(t_i, t_j)$. Az, hogy a δ komponensei között kényszerfeltételek állnak fenn ad lehetőséget arra, hogy kizárási feltételeket fogalmazzunk meg.

2.1. TÉTEL. A $t \in \mathcal{T}_n \setminus \{t_{i_1}, t_{i_2}, \dots, t_{i_k}\}$ tanulópont biztosan nem legközelebbi szomszédja x -nek, ha az alábbi kizárási feltételek valamelyike igaz rá:

$$\mathcal{K}_1: \quad 2d_{\min} < d(t, t_{NN});$$

$$\mathcal{K}_2: \quad 0 < \max_{j=1, \dots, k} (d(t, t_{i_j}) - 2d(x, t_{i_j}));$$

$$\mathcal{K}_3: \quad d_{\min} < \max_{j=1, \dots, k} |d(t, t_{i_j}) - d(x, t_{i_j})|;$$

$$\mathcal{K}_4: \quad d_{\max} - d_{\min} > d(t_{FN}, t);$$

$$\mathcal{K}_5: \quad 2d_{\min} < d(t, t_{NN}) \text{ vagy } d_{\max} - d_{\min} > d(t_{FN}, t);$$

Bizonyítás. Legyenek $x, a, b \in \mathcal{X}$ tetszőlegesek.

$$(*) \quad \text{Ha } 2d(x, a) < d(a, b), \text{ akkor } d(x, a) < d(x, b).$$

$$\text{Ugyanis } 2d(x, a) < d(a, b) \leq d(x, a) + d(x, b) \implies d(x, a) < d(x, b).$$

\mathcal{K}_1 : Alkalmazzuk a (*) tulajdonságot a $a = t_{NN}$, $b = t$ szereposztásban.

$$\mathcal{K}_2: \quad 0 < \max_{j=1, \dots, k} (d(t, t_{i_j}) - 2d(x, t_{i_j})) \implies \\ \implies \exists 1 \leq j \leq k : d(t, t_{i_j}) > 2d(x, t_{i_j}).$$

Innen a (*) tulajdonságból az $a = t_{i_j}$, $b = t$ szereposztással kapjuk, hogy $d_{\min} \leq d(x, t_{i_j}) < d(x, t)$.

$$\mathcal{K}_3: \quad d(t, t_{i_j}) \leq d(t, x) + d(x, t_{i_j}) \implies d(t, t_{i_j}) - d(x, t_{i_j}) \leq d(t, x); \\ d(x, t_{i_j}) \leq d(t, x) + d(t, t_{i_j}) \implies d(x, t_{i_j}) - d(t, t_{i_j}) \leq d(t, x),$$

ahonnan következik $|d(x, t_{i_j}) - d(t, t_{i_j})| \leq d(t, x)$.

Mivel j tetszőleges volt, ezért

$$\max_{j=1, \dots, k} |d(x, t_{i_j}) - d(t, t_{i_j})| \leq d(t, x).$$

Tehát, ha fennáll \mathcal{K}_3 , akkor $d_{\min} < d(t, x)$ is igaz lesz.

$$\mathcal{K}_4: \quad d(t, x) \geq d(t_{FN}, x) - d(t_{FN}, t) > \\ > d(t_{FN}, x) - (d(t_{FN}, x) - d_{\min}) = d_{\min}.$$

\mathcal{K}_5 : Nyilvánvalóan igaz, hiszen \mathcal{K}_1 és \mathcal{K}_4 is igaz volt. □

A következő tétel a kizárási feltételek kapcsolatát adja meg. A leírásban a $\mathcal{K}_i \implies \mathcal{K}_j$ implikáció azt állítja, hogyha \mathcal{K}_i kizár egy tanulóponzt, akkor \mathcal{K}_j is kizárja azt, vagyis \mathcal{K}_j nem gyengébb \mathcal{K}_i -nél.

2.2. TÉTEL. $\mathcal{K}_i \implies \mathcal{K}_j$, ha $(i, j) \in \{(1, 2), (2, 3), (4, 3), (5, 3)\}$.

Bizonyítás. $\mathcal{K}_1 \implies \mathcal{K}_2$

$$2d(t_{NN}, x) \leq d(t_{NN}, t) \implies$$

$$0 \leq d(t_{NN}, t) - 2d(t_{NN}, x) \leq \max_{j=1, \dots, k} (d(t, t_{i_j}) - 2d(x, t_{i_j})).$$

$$\mathcal{K}_2 \implies \mathcal{K}_3$$

$$0 \leq \max_{j=1, \dots, k} (d(t, t_{i_j}) - 2d(x, t_{i_j})) \implies \exists 1 \leq j \leq k :$$

$$d_{\min} \leq d(x, t_{i_j}) < d(t, t_{i_j}) - d(x, t_{i_j}) \leq \max_{j=1, \dots, k} |d(t, t_{i_j}) - d(x, t_{i_j})|.$$

$$\mathcal{K}_4 \implies \mathcal{K}_3$$

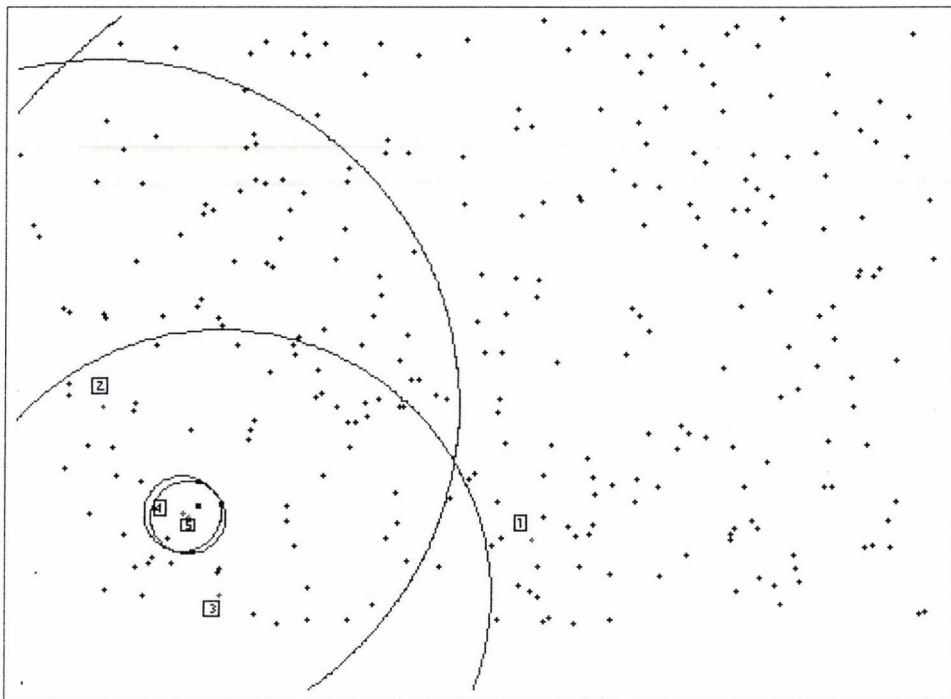
$$d_{\max} - d_{\min} > d(t_{FN}, t) \implies$$

$$d_{\min} < d(t_{FN}, x) - d(t_{FN}, t) \leq \max_{j=1, \dots, k} |d(t, t_{i_j}) - d(x, t_{i_j})|.$$

$$\mathcal{K}_5 \implies \mathcal{K}_3$$

Nyilvánvaló, mert $\mathcal{K}_1 \implies \mathcal{K}_3$ és $\mathcal{K}_4 \implies \mathcal{K}_3$ igaz volt. \square

A \mathcal{K}_1 kizárási feltétellel történő keresési folyamatot szemlélteti az 1. ábra. Az osztályozandó pontot kis fekete négyzet jelöli az ábra bal alsó felében. A $+$ -szal jelölt tanulópontok a téglalapon egyenletesen oszlanak el. A keresés folyamatában szereplő tanulópontokat halványabban nyomtattuk ki, és a sorszámmal is megcímkeztük. Berajzoltuk azokat a köröket is, amelyen kívüli tanulópontokat kizárunk a további keresésből. Az algoritmus az ötödik lépésben jut el a legközelebbi szomszédhoz. A bejelölt körökön belüli pontok közül véletlenszerűen választjuk ki a legközelebbi tanulópontot.



1. ábra. A \mathcal{K}_1 kizárási feltétel működésének szemléltetése síkon

A következő tétel egyszerű ellenpéldákon keresztül igazolja azt, hogy melyik kizárási feltétel melyik kizárási feltételt nem implikálja általában.

2.3. TÉTEL. $\mathcal{K}_i \not\Rightarrow \mathcal{K}_j$, ha

$$(i, j) \in \{(3, 2), (3, 1), (2, 1), (3, 4), (3, 5), (2, 4), (4, 2), (1, 4), (4, 1)\}.$$

Bizonyítás. Az alábbi egyszerű síkbeli ellenpéldák mutatják, hogy a 2.2. Tétel irányai általában nem fordíthatók meg.

$\mathcal{K}_2 \not\Rightarrow \mathcal{K}_1$:

Legyen $\mathcal{X} = \mathbb{R}^2$, $t_1 = (1, 0)$, $t_2 = (1.75, 0.75)$, $t_3 = (-0.5, -2)$, $x = (0, 1)$. A távolságmátrix: $d(t_1, t_2) = \frac{3\sqrt{2}}{4} \approx 1.06$, $d(t_1, t_3) = 2.5$, $d(t_2, t_3) = \frac{\sqrt{202}}{4} \approx 3.55$. A pontokat természetes sorrendben dolgozzuk fel: $d(t_1, x) = \sqrt{2} \approx 1.41$, $d(t_2, x) = \frac{\sqrt{50}}{4} \approx 1.76$. \mathcal{K}_2 -vel kizárjuk t_3 -mat, mert $\max_{i=1,2} (d(t_i, t_3) - 2 \cdot d(x, t_i)) = d(t_2, t_3) - 2 \cdot d(x, t_2) \approx 3.55 - 3.54 > 0$. Viszont \mathcal{K}_1 -gyel nem zárjuk ki sem t_2 -őt, sem t_3 -mat, hiszen $2.82 \approx 2 \cdot d(t_1, x) > d(t_1, t_2) \approx 1.06$ és $2.82 \approx 2 \cdot d(t_1, x) > d(t_1, t_3) = 2.5$.

$\mathcal{K}_3 \not\Rightarrow \mathcal{K}_2$:

Legyen $\mathcal{X} = \mathbb{R}^2$, $t_1 = (0, 0)$, $t_2 = (\frac{4}{5}\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{5})$, $t_3 = (\sqrt{3}, 0)$, $x = (0, 1)$. A távolságmátrix: $d(t_1, t_2) = \sqrt{\frac{51}{25}} \approx 1.42$, $d(t_1, t_3) = \sqrt{3} \approx 1.73$, $d(t_2, t_3) = \frac{\sqrt{6}}{5} \approx 0.49$. A pontokat természetes sorrendben dolgozzuk fel: $d(t_1, x) = 1$, $d(t_2, x) \approx 1.53$. \mathcal{K}_2 -vel nem zárjuk ki t_3 -mat, mert $\max_{i=1,2} (d(t_i, t_3) - 2 \cdot d(x, t_i)) = d(t_1, t_3) - 2 \cdot d(x, t_1) \approx -0.27 < 0$. Viszont \mathcal{K}_3 -mal ugyan még nem zárjuk ki t_2 -őt, de t_3 -mat már igen, hiszen $1 = d(t_1, x) > |d(t_1, t_2) - d(t_1, x)| \approx 0.42$, de $1 = d(t_1, x) < \max_{i=1,2} |d(t_i, t_3) - d(x, t_i)| = |d(t_2, t_3) - d(x, t_2)| \approx 1.04$.

$\mathcal{K}_3 \not\Rightarrow \mathcal{K}_1$:

A $\mathcal{K}_1 \Rightarrow \mathcal{K}_2$ implikációból triviálisan következik.

$\mathcal{K}_3 \not\Rightarrow \mathcal{K}_4$:

Legyen $\mathcal{X} = \mathbb{R}^2$, $t_1 = (0, 0)$, $t_2 = (\frac{7}{4}, \frac{3}{4})$, $t_3 = (-\frac{1}{2}, -2)$, $x = (0, 1)$. A távolságmátrix: $d(t_1, t_2) = \sqrt{\frac{58}{16}} \approx 1.9$, $d(t_1, t_3) = \sqrt{\frac{17}{4}} \approx 2.06$, $d(t_2, t_3) = \frac{\sqrt{202}}{4} \approx 3.55$. A pontokat természetes sorrendben dolgozzuk fel: $d(t_1, x) = 1$, $d(t_2, x) = \sqrt{\frac{50}{16}} \approx 1.77$. \mathcal{K}_4 nem zárja ki t_3 -mat, mert $0.77 \approx d(t_2, x) - d(t_1, x) = d_{\max} - d_{\min} < d(t_{FN}, t_3) = d(t_2, t_3) \approx 3.55$. Ezzel szemben \mathcal{K}_3 igen, hiszen $1 = d_{\min} = d(t_1, x) < \max_{i=1,2} |d(t_i, t_3) - d(x, t_i)| = |d(t_2, t_3) - d(x, t_2)| \approx 1.78$.

$\mathcal{K}_3 \not\Rightarrow \mathcal{K}_5$:

Mivel $\mathcal{K}_5 = \mathcal{K}_1 \vee \mathcal{K}_4$ olyan ellenpélda kell, ahol sem \mathcal{K}_1 -gyel, sem \mathcal{K}_4 -gyel nem lehet t_3 -mat kizárni, míg a \mathcal{K}_3 -mal igen. Legyen $\mathcal{X} = \mathbb{R}^2$, $t_1 = (0, 0)$, $t_2 = (\frac{4\sqrt{3}}{5}, \frac{\sqrt{3}}{5})$, $t_3 = (\sqrt{3}, \sqrt{3})$, $x = (0, 1)$. A távolságmátrix: $d(t_1, t_2) = \frac{\sqrt{51}}{5} \approx 1.43$,

$d(t_1, t_3) = \sqrt{6} \approx 2.45$, $d(t_2, t_3) = \sqrt{\frac{51}{5}} \approx 1.43$. A pontokat természetes sorrendben dolgozzuk fel: $d(t_1, x) = 1$, $d(t_2, x) \approx 1.53$. Mivel $2 \cdot d(t_1, x) = 2 > d(t_1, t_2) \approx 1.43$, $2 \cdot d(t_1, x) = 2 > d(t_1, t_3) \approx 2.45$ valamint $0.53 \approx d(t_2, x) - d(t_1, x) = d_{\max} - d_{\min} < d(t_2, x) \approx 1.43$, ezért \mathcal{K}_5 nem zárja ki t_3 -mat. Viszont $1 = d_{\min} = d(t_1, x) < \max_{i=1,2} |d(t_i, t_3) - d(x, t_i)| = |d(t_1, t_3) - d(x, t_1)| \approx 1.45$ miatt \mathcal{K}_3 -mal t_3 kizárható.

$\mathcal{K}_2 \not\Rightarrow \mathcal{K}_4$:

Legyen $\mathcal{X} = \mathbb{R}^2$, $t_1 = (0, 0)$, $t_2 = (\frac{7}{4}, \frac{3}{4})$, $t_3 = (-\frac{1}{2}, -2)$, $x = (0, 1)$. A távolságmátrix: $d(t_1, t_2) = \sqrt{\frac{58}{16}} \approx 1.9$, $d(t_1, t_3) = \sqrt{\frac{17}{4}} \approx 2.06$, $d(t_2, t_3) = \frac{\sqrt{202}}{4} \approx 3.55$.

A pontokat természetes sorrendben dolgozzuk fel: $d(t_1, x) = 1$, $d(t_2, x) = \sqrt{\frac{50}{16}} \approx 1.77$. \mathcal{K}_4 nem zárja ki t_3 -mat, mert $0.77 \approx d(t_2, x) - d(t_1, x) = d_{\max} - d_{\min} < d(t_{FN}, t_3) = d(t_2, t_3) \approx 3.55$. Ezzel szemben \mathcal{K}_2 igen, hiszen $\max_{i=1,2} (d(t_i, t_3) - 2 \cdot d(x, t_i)) = d(t_1, t_3) - 2 \cdot d(x, t_1) \approx 0.06 > 0$.

$\mathcal{K}_4 \not\Rightarrow \mathcal{K}_2$:

Legyen $\mathcal{X} = \mathbb{R}^2$, $t_1 = (0, 0)$, $t_2 = (\sqrt{3}, 0)$, $t_3 = (\frac{4\sqrt{3}}{5}, \frac{\sqrt{3}}{5})$, $x = (0, 1)$. A távolságmátrix: $d(t_1, t_2) = \sqrt{3} \approx 1.73$, $d(t_1, t_3) = \frac{\sqrt{51}}{5} \approx 1.43$, $d(t_2, t_3) = \frac{\sqrt{6}}{5} \approx 0.49$. A pontokat természetes sorrendben dolgozzuk fel: $d(x, t_1) = 1$, $d(x, t_2) = 2$. \mathcal{K}_2 nem zárja ki t_3 -mat, hiszen $\max_{i=1,2} (d(t_i, t_3) - 2 \cdot d(x, t_i)) = d(t_1, t_3) - 2 \cdot d(x, t_1) \approx -0.57 < 0$. Viszont \mathcal{K}_4 kizárja a harmadik pontot, mivel

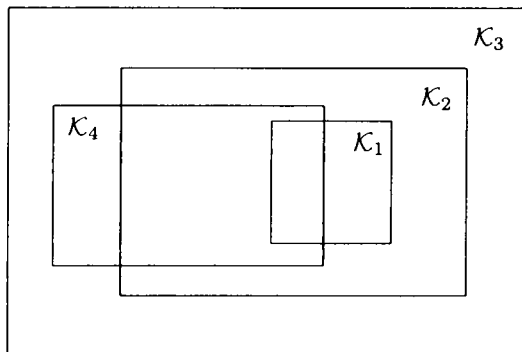
$$1 = d(t_2, x) - d(t_1, x) = d_{\max} - d_{\min} > d(t_{FN}, t_3) = d(t_2, t_3) \approx 0.49.$$

$\mathcal{K}_1 \not\Rightarrow \mathcal{K}_4$:

Legyen $\mathcal{X} = \mathbb{R}^2$, $t_1 = (0, 0)$, $t_2 = (2, 0)$, $t_3 = (2, 3)$, $x = (0, 1)$. A távolságmátrix: $d(t_1, t_2) = 2$, $d(t_1, t_3) = \sqrt{13} \approx 3.6$, $d(t_2, t_3) = 3$. A pontokat természetes sorrendben dolgozzuk fel: $d(x, t_1) = 1$, $d(x, t_2) = \sqrt{5} \approx 2.24$. \mathcal{K}_1 nem még zárja t_2 -öt, de t_3 -mat már igen: $2 = 2 \cdot d(t_1, x) \geq d(t_1, t_2) = 2$ és $2 = 2 \cdot d(t_1, x) < d(t_1, t_3) \approx 3.6$. Ezzel szemben \mathcal{K}_4 nem zárja ki a harmadik pontot: $1.24 \approx d(t_2, x) - d(t_1, x) = d_{\max} - d_{\min} < d(t_{FN}, t_3) = d(t_2, t_3) = 3$.

$\mathcal{K}_4 \not\Rightarrow \mathcal{K}_1$:

Legyen $\mathcal{X} = \mathbb{R}^2$, $t_1 = (0, 0)$, $t_2 = (\sqrt{3}, 0)$, $t_3 = (\frac{4\sqrt{3}}{5}, \frac{\sqrt{3}}{5})$, $x = (0, 1)$. A távolságmátrix: $d(t_1, t_2) = \sqrt{3} \approx 1.73$, $d(t_1, t_3) = \frac{\sqrt{51}}{5} \approx 1.43$, $d(t_2, t_3) = \frac{\sqrt{6}}{5} \approx 0.49$. A pontokat természetes sorrendben dolgozzuk fel: $d(x, t_1) = 1$, $d(x, t_2) = 2$. \mathcal{K}_4 kizárja az első két pont feldolgozása után a harmadikat, hiszen $1 = d(t_2, x) - d(t_1, x) = d_{\max} - d_{\min} > d(t_{FN}, t_3) = d(t_2, t_3) \approx 0.49$. \mathcal{K}_1 viszont nem zárja ki sem t_2 -öt sem t_3 -mat: $2 = 2 \cdot d(t_1, x) > d(t_1, t_2) \approx 1.73$ és $2 = 2 \cdot d(t_1, x) > d(t_1, t_3) \approx 1.43$. \square



2. ábra. A téglalapok az egyes feltételekkel kizárt tanulópontok halmazait szemléltetik

A 2. ábrán szemléltetjük a kizárási feltételek kapcsolatát.

2.4. MEGJEGYZÉS. a.) A felsorolt kizárási feltételek között a K_3 a legerősebb. Azokat a tanulópontokat, amelyeket a többiek kizárnak, ő is kizárja. Azonban kezelhetőség és programozhatóság szempontjából a K_1 is érdekes lehet.

b.) A K_3 kizárás programozásakor nem kell a $\max_{j=1, \dots, k} |d(t, t_{i_j}) - d(x, t_{i_j})|$ értéket meghatározni, hiszen t már akkor is kizárható, ha létezik olyan $\alpha \in \{i_1, i_2, \dots, i_k\}$ index, melynél $d_{\min} < |d(t, t_\alpha) - d(x, t_\alpha)|$ fennáll.

c.) A kizárási feltételek a legközelebbi k szomszéd keresésekor is alkalmazhatók. Például a K_3 kizárási elv a következőképp módosítandó: a $t \in \mathcal{T}_n \setminus \{t_{i_1}, t_{i_2}, \dots, t_{i_r}\}$ tanulópont nem lehet közte az $x \in \mathcal{X}$ k legközelebbi szomszédja között, ha $d_{k, \min} < \max_{j=1, \dots, r} |d(t, t_{i_j}) - d(x, t_{i_j})|$, ahol $d_{k, \min}$ a k -adik legkisebb távolság $d(x, t_{i_1}), d(x, t_{i_2}), \dots, d(x, t_{i_r})$ között.

Az alábbi két tétel a K_1 kizárási feltétellel kapcsolatos.

2.5. TÉTEL. A K_1 kizárási feltétel antiszimmetrikus és nem tranzitív. (Ha a kizárja b -t, akkor b nem zárhatja ki a -t. Viszont létezhetnek olyan a, b, c tanulópontok, hogy bár a kizárja b -t, b c -t, de a nem zárja ki c -t.)

Bizonyítás. Ha a kizárja b -t, akkor $2d(x, a) < d(a, b)$ teljesül, és $d(x, a) < d(x, b)$ biztosan. Tehát a háromszög-egyenlőtlenségből $d(a, b) \leq d(a, x) + d(x, b) \leq 2d(x, b)$, azaz b nem zárhatja ki a -t.

Másrészt tekintsük a síkon az $a = (0, 0)$, $b = (3, -1)$ és $c = (\frac{1}{2}, 2)$ tanulópontokat és az $x = (1.3, -0.3)$ tesztpontot. Az Euklideszi-metrikát alkalmazva, egyszerű számolással ellenőrizhetjük, hogy $d(x, a) \approx 1.334$, $d(x, b) \approx 1.838$, $d(x, c) \approx 2.435$, $d(b, a) \approx 3.16$, $d(a, c) \approx 2.061$ és $d(b, c) \approx 3.905$. Látható, hogy a bár kizárja c -t, és b kizárja c -t, de a nem zárja ki c -t. \square

Ha a K_1 kizárási feltételt szigorítjuk, és kétszeres helyett a háromszoros távolságot vesszük, biztosíthatjuk a kizárási elv tranzitivitását.

2.6. TÉTEL. Ha $3d(x, a) < d(a, b)$ és $3d(x, b) < d(b, c)$, akkor $3d(x, a) < d(a, c)$.

Bizonyítás.

$$3d(x, a) < d(a, b) < d(a, x) + d(b, x) \implies 2d(x, a) < d(x, b).$$

$$3d(x, b) < d(c, b) < d(c, x) + d(b, x) \implies 2d(x, b) < d(x, c).$$

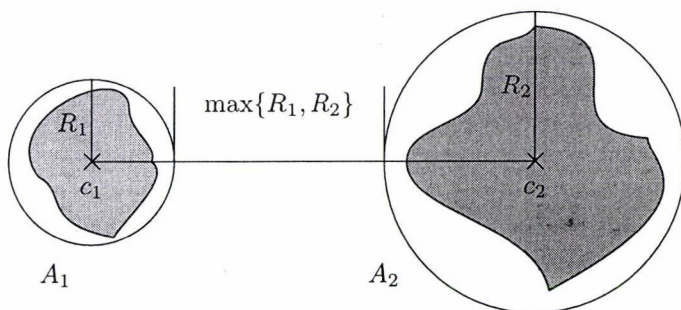
Vagyis $4d(a, x) < d(c, x)$. Így $d(a, c) > d(x, c) - d(x, a) > 3d(x, a)$. \square

3. A tananyag szeparálása

Tekintsük most a két osztály esetét, azaz legyen $L = 2$. A célunk az, hogy a T_n tanulópont-halmaz C_1, C_2 osztályainak minél nagyobb elemszámú $M_i \subset C_i$ ($i = 1, 2$) részhalmazait kijelöljük, amelyek szeparáltak abban az értelemben, hogyha az osztályozás során közel jutunk az egyik részhalmaz centrumához, az már garantálni fogja azt, hogy a másik részhalmazban biztosan nem találhatjuk meg a legközelebbi társat.

3.1. *Definíció.* Legyen $A \subset T_n$. A $G(c, R) = \{x; x \in X, d(c, x) \leq R\}$ c centrumú, R sugarú zárt gömb az A -t lefedő gömb, ha $c \in A$ és $A \subset G(c, R)$. Az A -t lefedő zárt gömbök között azt a $G_A(c_A, R_A)$ -val jelöltet fogjuk *legkisebb lefedő zárt gömbnek* nevezni, amelynél sugár minimális. c_A az A halmaz *centruma*, R_A pedig a *takaró-sugár*.

3.2. *Definíció.* Legyenek $A_1, A_2 \subset T_n$. Jelölje rendre c_1, c_2 a centrumaikat, és R_1, R_2 a takaró-sugaraikat. Az A_1, A_2 halmazok *szeparálhatóak*, ha $d(c_1, c_2) > R_1 + R_2 + \max\{R_1, R_2\}$.



3. ábra. Síkbeli szeparálható halmazok

Belátható, ha egy x tesztpont közel esik az A_1 halmaz centrumához, akkor a tőle szeparálható A_2 halmaz mindegyik eleme kizárható lesz a további NN-keresésből.

3.3. TÉTEL. Legyenek $A_1, A_2 \subset \mathcal{T}_n$ szeparálhatóak. Ha $x \in \mathcal{X}$ -re teljesül, hogy $d(x, c_1) < R_1$, akkor $\min_{z \in A_1} d(x, z) < \min_{y \in A_2} d(x, y)$.

Bizonyítás. Legyen $z \in A_2$ tetszőleges. A háromszög-egyenlőtlenségből:

$$d(x, u) + d(x, c_1) \geq d(u, c_1) \quad \text{és} \quad d(c_2, u) + d(u, c_1) \geq d(c_2, c_1),$$

vagyis

$$d(x, u) \geq d(c_1, c_2) - d(c_1, x) - d(u, c_2) \geq d(c_1, c_2) - R_1 - R_2.$$

A szeparálhatósági feltétel miatt:

$$d(c_1, c_2) - R_1 - R_2 \geq \max\{R_1, R_2\} \geq R_1.$$

Ebből már következik, hogy

$$d(x, u) \geq R_1 > d(x, c_1) \geq \min_{z \in A_1} d(x, z).$$

Mivel $z \in A_2$ tetszőleges, ez már igazolja az állítást. □

Távoli x tesztpontok esetén az alábbi csoportos kizárás lehetséges:

3.4. TÉTEL. Legyenek $A_1, A_2 \subset \mathcal{T}_n$ szeparálhatóak. Ha $x \in \mathcal{X}$ -re teljesül, hogy $d(x, c_1) + R_2 < d(x, c_2)$, akkor $t_{NN}(x) \notin A_2$.

Bizonyítás. Legyen $y \in A_2$ tetszőleges. Ekkor

$$d(x, c_1) \leq d(x, c_2) - R_2 \quad \text{és} \quad d(x, c_2) \leq d(c_2, y) + d(y, x) \leq R_2 + d(y, x)$$

amiből már következik az állítás: $d(x, c_1) \leq d(y, x)$. □

3.5. TÉTEL. Tegyük fel, hogy már kiszámoltuk a $d(x, t_1), d(x, t_2), \dots, d(x, t_k)$ távolságokat. Legyen $d_{\min} = \min_{i=1, \dots, k} d(x, t_i)$, és $A \subset \mathcal{T}_n \setminus \{t_1, \dots, t_k\}$.

Ha $d_{\min} + R_A < d(x, c_A)$, akkor $t_{NN}(x) \notin A$.

Bizonyítás. Legyen $u \in A$ tetszőleges.

Ekkor $d_{\min} < d(x, c_A) - R_A \leq d(x, c_A) - d(u, c_A) \leq d(x, u)$. □

4. Algoritmusok szeparálható részhalmazok keresésére

Ebben a szakaszban két olyan algoritmust adunk meg, melyek olyan nagy elemszámú $A_1 \subset C_1, A_2 \subset C_2$ szeparálható részhalmazokat határoznak meg, amik felhasználásával a legközelebbi társ keresésének folyamata majd felgyorsítható lesz.

1. Leszűkítő algoritmus

Az elsőnek ismertetendő algoritmus az osztályok szűkítésével jut el szeparálható részhalmazokhoz. Kiindulunk a C_1, C_2 -t lefedő S_1, S_2 legkisebb gömbökből. Jelölje $c(C_i)$ illetve $R(C_i)$ a megfelelő centrumokat és takaró-sugarakat. Ha már induláskor

$$(**) \quad d(c(C_1), c(C_2)) > R(C_1) + R(C_2) + \max\{R(C_1), R(C_2)\}$$

lenne, akkor az osztályok tanulópont-halmazai maguk is szeparálhatóak volnának. Ha nem ez a helyzet, akkor az egymáshoz legközelebbi $x \in C_1$, és $y \in C_2$ tanulópontokat vesszük, ahol $d(x, y) = \min_{u \in C_1, \text{ és } v \in C_2} d(u, v)$. Legyen $A_1 = C_1 \setminus \{x\}$ és $A_2 = C_2 \setminus \{y\}$. Számoljuk újra $c(A_i), R(A_i)$ -t ($i = 1, 2$). Nyilván $R(A_i) \leq R(C_i)$. Ha még nem teljesül a $(**)$ feltétel, az A_1, A_2 legközelebbi elemeit hagyjuk el, és számoljuk a maradék halmazok minimális lefedő gömbjének centrumelemét és sugarát. Az algoritmust akkor állítjuk meg, ha valamelyik lépés után már teljesül a $(**)$ feltétel.

2. Bővítő algoritmus

A második algoritmusban az A_1 és A_2 halmazokat egyre bővítve építjük fel. Legyenek $x \in C_1$, és $y \in C_2$ most a legtávolabbi elemek, azaz

$$d(x, y) = \max_{u \in C_1, \text{ és } v \in C_2} d(u, v).$$

Legyenek továbbá a és b a megfelelő legközelebbi osztálytársak, azaz

$$d(a, x) = \min_{u \in C_1} d(u, x) \quad \text{és} \quad d(b, y) = \min_{v \in C_2} d(v, y).$$

Induláskor

$$A_1 = \{x, a\}, \quad A_2 = \{y, b\},$$

$$c(A_1) = x, \quad R(A_1) = d(a, x), \quad c(A_2) = y, \quad R(A_2) = d(b, y).$$

Ha az így kialakított A_1 és A_2 halmazokra fennáll a $(**)$ feltétel, akkor a bővítést azokkal a $p \in C_1 \setminus A_1, q \in C_2 \setminus A_2$ elemekkel folytatjuk, amelyekre fennállnak

$$\frac{d(x, p) + d(a, p)}{2} = \min_{u \in C_1 \setminus \{x\}} \frac{d(x, u) + d(a, u)}{2},$$

illetve

$$\frac{d(y, q) + d(b, q)}{2} = \min_{v \in C_2 \setminus \{y\}} \frac{d(y, v) + d(b, v)}{2}.$$

Tehát, $A_1 = \{x, a, p\}$, $A_2 = \{y, b, q\}$ stb. Általában, ha A_1 és A_2 -re még fennáll a (**) feltétel, azon $r \in C_1 \setminus A_1$, $s \in C_2 \setminus A_2$ elemekkel kísérreljük meg az újabb bővítést, melyekre teljesül

$$\frac{\sum_{z \in A_1} d(z, r)}{\sum_{z \in A_1} 1} = \min_{g \in C_1 \setminus A_1} \frac{\sum_{z \in A_1} d(z, g)}{\sum_{z \in A_1} 1}, \text{ illetve } \frac{\sum_{z \in A_2} d(z, s)}{\sum_{z \in A_2} 1} = \min_{g \in C_2 \setminus A_2} \frac{\sum_{z \in A_2} d(z, g)}{\sum_{z \in A_2} 1}.$$

Ha az $A_1 \cup \{r\}$ és $A_2 \cup \{s\}$ halmazokra teljesül még a szeparálhatóság, akkor továbblépünk, különben marad A_1 és A_2 .

5. Legközelebbi szomszéd kereső stratégiák

A legközelebbi szomszéd megtalálásának gyorsaságát befolyásolja az is, hogyan választjuk meg a keresés sorrendjét. A keresési folyamat automatizálásához is szükséges annak az elvnek a lerögzítése, hogy a tananyagból melyik legyen a következő feldolgozandó tanulópont. Egy \mathcal{S} keresési algoritmus definiál egy (i_1, i_2, \dots, i_n) index permutációt, amely azt a sorrendet jelenti amiben a tanulópontokat a keresés során soravesszük. Tehát $\mathcal{S} : \mathcal{X} \rightarrow P_n$ egy függvény, ahol P_n jelenti az $(1, 2, \dots, n)$ indexek permutációinak halmazát. A keresés eredményességét jellemző adat a *találati hely*, azaz az $\mathcal{S}(x)$ permutáció azon k pozíciója, ahol az x tesztpont legközelebbi társának indexe áll. Tehát, ha az \mathcal{S} keresési stratégia találati helye k az x tesztpont osztályozásakor, akkor ez azt jelenti, hogy az x legközelebbi társa t_{i_k} . A találati hely egy 1 és n közötti értéket felvevő diszkrét valószínűségi változó, melynek várható értékének n -edrésze az \mathcal{S} stratégia *eredményessége*. Jelölésben $\text{eff}(\mathcal{S})$.

Példák keresési stratégiákra.

1. Véletlen keresés, \mathcal{S}_r

Minden egyes lépésben a hátralévő tanulópontok közül egyet véletlenszerűen választunk ki. Tehát ilyenkor bármelyik permutációt ugyanakkora, $\frac{1}{n}$ valószínűséggel választhatjuk ki. Ilyenkor a találati hely bárhol, ugyanakkora valószínűséggel előfordulhat, vagyis $\text{eff}(\mathcal{S}_r) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n i = \frac{n+1}{2}$.

2. Determinisztikus keresés, \mathcal{S}_d

Ilyenkor a \mathcal{D}_n tananyag alapján definiálunk egy $(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$ keresési sorrendet, és minden $x \in X$ tesztpont esetén ezt fogjuk alkalmazni. Jelölje $Y_1 = d(x, t_{\gamma_1}), Y_2 = d(x, t_{\gamma_2}), \dots, Y_n = d(x, t_{\gamma_n})$ a tesztpontnak a tanulópontoktól vett véletlen távolságait. Ha $P(Y_1 \leq Y_2 \leq \dots \leq Y_n) \geq P(Y_{i_1} \leq Y_{i_2} \leq \dots \leq Y_{i_n})$

$\dots \leq Y_{i_n}$) tetszőleges (i_1, i_2, \dots, i_n) permutációnál, akkor a $(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$ permutációt definiáló S_d permutáció *optimális*. Az alábbi algoritmus az optimális determinisztikus keresési stratégiát kísérli meg előállítani azáltal, hogy a fenti valószínűség relációt a relatív gyakoriságok relációjával helyettesíti amikor a tanulópontokat osztályozzuk a tananyag segítségével. Jelölje h_{ik} a t_i tanulópont k -adik legközelebbi társának indexét $1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, n$ közül. Jelölje o_{ij} annak a gyakoriságát, hányszor volt t_i a j -edik legközelebbi társ az osztályozás során:
$$o_{ij} = \sum_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha \neq i}}^n I\{h_{\alpha j} = i\}.$$

Legyen $\mathbf{o}_i = (o_{i1}, o_{i2}, \dots, o_{in-1})^T$, $\left(\sum_{j=1}^{n-1} o_{ij} = n-1\right)$. Rendezzük sorrendbe az $\mathbf{o}_1, \mathbf{o}_2, \dots, \mathbf{o}_n$ vektorokat úgy, hogy $\mathbf{o}_i > \mathbf{o}_j$ legyen, ha $o_{i1} = o_{j1}, o_{i2} = o_{j2}, \dots, o_{ik-1} = o_{jk-1}$, de $o_{ik} > o_{jk}$. Ha $\mathbf{o}_i = \mathbf{o}_j$ akkor definíció szerint $\mathbf{o}_i > \mathbf{o}_j$ -t vegyünk, ha $i < j$. (Ha az \mathbf{o}_i vektorok dimenzióját csökkentjük azzal, hogy csak az első $k < n-1$ legközelebbi szomszédot figyeljük, akkor közöttük gyakrabban fordulhat elő egyezés.) Tegyük fel, hogy az előbbi rendezéssel a $\mathbf{o}_{\gamma_1} > \mathbf{o}_{\gamma_2} > \dots > \mathbf{o}_{\gamma_n}$ sorrendet kaptuk. Ekkor a keresési sorrend $(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$ lesz. Megbecsülhetjük ehhez a kereséshez tartozó eredményességet is, az alábbi módon. Jelölje z_i a t_i tanulópont legközelebbi szomszédjának találati helyét $(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$ -ben: $z_i = k$, ha $h_{i\gamma_k} = 1$. Ekkor $\text{eff}(S_d) \approx \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z_i$. Az algoritmust értelemszerűen módosíthatjuk arra az esetre, amikor rendelkezésre áll egy $C_m = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ tesztponthalmaz. o_{ij} ilyenkor azt jelenti, hogy a t_i tanulópont hányszor volt a tesztpontok osztályozásakor a j -edik legközelebbi szomszéd. Most $\sum_{j=1}^n o_{ij} = m$. Az eredményességet az előbbiekhöz hasonlóan becsülhetjük.

3. Geometriai vagy minimax keresés, S_{mm}

Tegyük fel, hogy már feldolgoztuk a $t_{\gamma_1}, t_{\gamma_2}, \dots, t_{\gamma_n}$ tanulópontokat.

Definiáljuk a $g_k(t) = \max_{i=1, \dots, k} |d(t, t_{\gamma_i}) - d(t_{\gamma_i}, x)|$, $t \in T \setminus \{t_{\gamma_1}, t_{\gamma_2}, \dots, t_{\gamma_n}\}$ függvényt.

$g_k(t)$ tulajdonságai:

- i° $g_k(x) = 0$, $g_k(t) \geq 0$;
- ii° $0 \leq g_1(t) \leq g_2(t) \leq \dots \leq g_k(t) \leq d(t, x) \leq d(t_{FN}, x) = d_{\max}$
- iii° Ha $g_k(t) > d_{\min} = \min_{i=1, \dots, k} d(t_{\gamma_i}, x)$, akkor t biztosan nem lehet x legközelebbi társa; (Ez a K_3 kizárási feltétel.)
- iv° $g_k(t_{\gamma_i}) = d(t_{\gamma_i}, x)$. Speciálisan, ha a t_{NN} , a legközelebbi társ már $t_{\gamma_1}, t_{\gamma_2}, \dots, t_{\gamma_n}$ között van, $g_k(t_{NN}) = d_{\min}$.

$$v^o \quad 0 \leq g_1(t) \leq g_2(t) \leq \dots \leq g_n(t) = d(t, x) \implies d_{\min} = g_n(t_{NN}) \leq g_n(t) = d(t, x).$$

A minimax keresési stratégiánál mindig az lesz a következő tanulópont, amelyik minimalizálja $g_k(t)$ -t:

$$g(t_{\gamma_{k+1}}) = \min_{t \in \mathcal{T} \setminus \{t_{\gamma_1}, t_{\gamma_2}, \dots, t_{\gamma_k}\}} \max_{i=1, \dots, k} |d(t, t_{\gamma_i}) - d(t_{\gamma_i}, x)|.$$

Tehát azzal a tanulóponttal folytatjuk a keresést, amely a \mathcal{K}_3 kizárási feltétel szerint legkevésbé zárható ki. Másrészt ez a t tanulópont hasonlít leginkább x -re abban az értelemben, hogy ő is kb. olyan távolságra van a már feldolgozott tanulópontoktól, mint x . Így feltehetőleg a metrikus térben hozzá közel fog esni.

4. Keresés kizárással, \mathcal{S}_e

Tekintsünk egy \mathcal{K} kizárási feltételt és egy \mathcal{S} keresési stratégiát. A kettő kombinációjából kapjuk az \mathcal{S}_e kevert keresési stratégiát:

1. lépés: \mathcal{S} -sel meghatározzuk a keresés első $(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k)$ elemét.

2. lépés: $\mathcal{K}(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k)$ segítségével redukáljuk a \mathcal{T} tanulópont-halmazt azáltal, hogy kizárunk tanulópontokat a vizsgálatból. Ha \mathcal{T} kiürül, megállunk.

3. lépés: \mathcal{S} -sel a maradék halmazból meghatározunk egy vagy több újabb $\gamma_{k+1}, \gamma_{k+2}, \dots$ indexhez tartozó tanulópontokat, majd visszatérünk a 2. lépésre.

Példa \mathcal{S}_e kevert stratégiára:

i° \mathcal{S}_d eljárással meghatározzuk γ_1 -et: $d_{\min} = d(t, t_{\gamma_1}), t_{NN} = t_{\gamma_1}$;

ii° \mathcal{K}_3 -mal kizárjuk azokat a t tanulópontokat, melyekre

$$|d(t, t_{\gamma_1}) - d_{\min}| > d_{\min};$$

iii° \mathcal{S}_{mm} -mel dolgozunk tovább: azt a t_{γ_2} tanulópontot vesszük a redukált \mathcal{T}_r tananyagból, melyre $g_1(t_{\gamma_2}) = \min_{t \in \mathcal{T}_r} |d(t, t_{\gamma_1}) - d(t_{\gamma_1}, x)|$,

$$d_{\min} = \min \{d(t_{\gamma_1}, x), d(t_{\gamma_2}, x)\}, \quad t_{NN} = \dots;$$

iv° \mathcal{K}_3 -mal újabb tanulópontokat kizárunk \mathcal{T} -ből, stb.

5.1. MEGJEGYZÉS. iii°-nél vehetjük az \mathcal{S}_d keresés által definiált $(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$ permutációból azt a legkisebb indexet is, amelyet \mathcal{K}_3 még nem zárt ki.

6. Példák kizárásos keresési stratégiákra

Ebben a pontban három S_e típusú kereső algoritmust ismertetünk.

Keresőfás algoritmus kizárással

Fukunaga és Narendra [3] lineáris alapterű metrikus térben javasol egy olyan csoportos kizárást alkalmazó legközelebbi társ keresési algoritmust, amely a tananyag előfeldolgozásakor létrehozott keresőfán alapul. Ennek az algoritmusnak a kiterjesztését adjuk meg tetszőleges metrikus térben. Fukunaga és Narendra algoritmusában a csoportok átlagait a csoportok centrumelemével fogjuk helyettesíteni. A módosított algoritmus így csak az első stációjában fog eltérni az eredetitől.

Adott egy $T_n = \{t_1, t_2, \dots, t_n\} \subset \mathcal{X}$ tanulópont-halmaz az (\mathcal{X}, d) metrikus térben. Bontsuk fel T_n -t l lehetőleg egyenlő elemszámú diszjunkt részhalmazra valamilyen klaszterező eljárással. Jelölje G_1, G_2, \dots, G_l ezeket a klasztereket. Ez a partíció alkotja az első generációt. Ezután mindegyik G_i klasztert újból l egyenlő elemszámú klaszterre bontjuk, létrehozva a második generáció partícióit: $G_{11}, G_{12}, \dots, G_{1l}, G_{21}, \dots, G_{2l}, \dots, G_{ll}$. A szétbontást addig folytatjuk, amíg az utolsó generáció partíciói mind egyelemű halmazok nem lesznek. Az utolsó generáció sorszámát g_{\max} jelöli. (A tananyag mintaelemszámától függően az utolsó generációban nem biztos, hogy l lesz a partíciók száma, de ez az algoritmus működését nem fogja befolyásolni.) Minden generáció partíciójának minden halmazát egyértelműen azonosítani tudjuk egy $p = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$ indexsorozattal, ahol az α_1 index adja meg az első generáció megfelelő klaszterének sorszámát, α_2 a G_{α_1} halmaz továbbosztásakor a megfelelő részhalmaz sorszámát jelenti, stb. Ezután minden generáció minden G_p klasztere esetén meghatározzuk a halmaz c_p centrumelemét és az R_p takaró sugarát.

Egyszerűen belátható az alábbi két állítás.

6.1. SEGÉDTÉTEL. *A $t_i \in G_p$ tanulópont nem lehet az x tesztpont legközelebbi társa, ha $d_{\min} + R_p < d(x, c_p)$, ahol d_{\min} az eddig talált legkisebb távolság x és a tanulópontok között.*

Bizonyítás. $d(x, t_i) \geq d(x, c_p) - d(t_i, c_p) \geq d(x, c_p) - R_p > d_{\min}$. □

6.2. SEGÉDTÉTEL. *A $t_i \in G_p$ tanulópont nem lehet az x tesztpont legközelebbi társa, ha $d_{\min} + d(t_i, c_p) < d(x, c_p)$.*

Bizonyítás. Hasonlóan az előzőhöz. □

A Fukunaga-Narendra algoritmus második stációja változatlan.

0. lépés. (Inicializálás) Legyen a pillanatnyi minimális távolság $d_{\min} := \infty$, a pillanatnyi generáció szintszáma $g := 1$, a feldolgozandó klaszterek indexeinek listája $\Lambda := \emptyset$.

1. lépés. (A feldolgozandó partíciók beállítása) Eltávoljuk a g generáció klasztereinek sorszámát a Λ listába, és kiszámoljuk az ehhez a listához tartozó p indexhez a $d(x, c_p)$ távolságokat.

2. lépés. (Az 6.1. Segédttételben megfogalmazott kizárási elv érvényesítése) Vegyük sorra a $p \in \Lambda$ indexeket, és ezek közül töröljük azokat, ahol $d_{\min} + R_p < d(x, c_p)$ teljesül.

3. lépés. (Visszaléptetés) Ha Λ kiürül, akkor visszalépünk egy korábbi szintre, vagyis $g := g - 1$. Ha $g = 0$ lenne, akkor megállítjuk az algoritmust. d_{\min} tartalmazza a legközelebbi távolságot, NN pedig a legközelebbi szomszéd indexét. Ha viszont $g \neq 1$, akkor újra a 2. lépésre térünk. Ha $\Lambda = \emptyset$ akkor a 4. lépésre ugrunk.

4. lépés. (A legközelebbi klaszter kiválasztása az adott generációban) Legyen $p^* \in \Lambda$ az a klaszterindex, melynél $d(x, c_{p^*})$ minimális. Legyen $q := p^*$, $\Lambda := \Lambda \setminus \{p^*\}$. Ha $g = g_{\max}$, akkor lépünk 5.-re, különben $g := g + 1$, és lépünk 1.-re.

5. lépés. (A 6.2. Segédttételben megfogalmazott kizárási elv érvényesítése) Fel dolgozzuk a G_q klasztert. Csak azoknál a $t_i \in G_q$ tanulóponatoknál számoljuk ki a $d(x, t_i)$ távolságokat, melyekre $d_{\min} + d(t_i, c_q) \geq d(x, c_q)$. Ilyenkor ha még az is teljesül, hogy $d(x, t_i) < d_{\min}$, akkor $d_{\min} := d(x, t_i)$ és $NN := i$. Ha már minden tanulóponatot leteszteltünk G_q -ből, akkor a 2. lépésre térünk vissza.

Gyorsítási lehetőségek osztályozásnál

1. Tegyük fel, hogy két osztályunk van C_1 és C_2 , $C_1 \cap C_2 = \emptyset$, $C_1 \cup C_2 = T_n$. Ha az első generáció felbontását úgy végezzük el, hogy $G_1, G_2, \dots, G_\alpha \subset C_1$ és $G_{\alpha+1}, G_{\alpha+2}, \dots, G_l \subset C_2$ legyen, akkor lehetőség nyílik arra, hogy az algoritmust hamarabb megállítsuk. Ugyanis, ha $g = 1$ esetben pl. $d_{\min} + R_p < d(x, c_p)$ fenáll minden $p > \alpha$ esetén és $NN \leq \alpha$, akkor már megállhatunk. A megállításkor NN még nem biztos, hogy a legközelebbi szomszéd indexét tartalmazza, de a tartalmazott tanulópon osztálya garantáltan megegyezik a legközelebbi társ osztályával, vagyis x -et pontosan tudjuk már osztályozni.

2. A 6.2. Segédttételben megfogalmazott kizárási feltételt élesíteni lehet az 5. lépésben. A $t_i \in G_q$ kizárandó, ha $d_{\min} < \max |d(x, u) - d(t_i, u)|$ teljesül, ahol a maximumot azon u tanulóponatokra kell venni, melyeknél már kiszámoltuk a $d(x, u)$ távolságokat.

A szeparált halmazok felhasználása a keresésnél

A 3.3.–3.5. Tételekben megfogalmazott csoportos kizárási feltételeket az alábbiak szerint használhatjuk fel a legközelebbi szomszéd megkeresésére. T_n -et három részre bontjuk fel: az $A_1(\subset C_1), A_2(\subset C_2)$ szeparált halmazokra, és az $E = T_n \setminus (A_1 \cup A_2)$ halmazra. Az A_1 és A_2 halmazokat a 4. szakaszban leírt algoritmusok valamelyikével állítottuk elő.

- Először a $d(x, c_1)$ és $d(x, c_2)$ távolságokat számoljuk ki.
 $d_{\min} := \min \{d(x, c_1), d(x, c_2)\}$ és $\text{class}(x) := 1$, ha $d(x, c_1) < d(x, c_2)$, különben $\text{class}(x) := 2$. Megnézzük, hogy teljesül-e a 3.3. vagy a 3.4. Tételben megfogalmazott kizárási feltétel. Ha igen, A_1 és A_2 közül a megfelelőt töröljük a további keresésből.

- Az E halmaz elemei között a \mathcal{K}_3 kizárás figyelembevételével a minimax stratégiával kiválasztjuk a következő tanulópontot. Ha lehetséges, d_{\min} és $\text{class}(x)$ tartalmát felülírjuk. Ilyenkor megvizsgáljuk a 3.5. Tételben ismertetett kizárási feltételt a még nem törölt A_i halmaz esetén. A feltétel teljesülése esetén töröljük a megvizsgált halmazt a további keresésből.
- A nem kizárt A_1 (vagy A_2) halmazok tanulópontjait csak akkor vesszük sorra, ha már E elemei elfogytak. Ezek elemei között is a minimax kereséssel és a \mathcal{K}_3 kizárással haladunk.

7. Keresési stratégiák hatékonyságának jellemzése

Adott egy \mathcal{T}_n tanulópont halmaz és egy x tesztpont. Jelölje $\text{pow}(x)$ azon tanulópontok minimális számát \mathcal{T}_n -ből, melyek x -től vett távolságai ismeretében a többi tanulópont kizárható a további keresésből a \mathcal{K} kizárási feltétellel. Tehát, ha $\text{pow}(x) = k$, akkor léteznek olyan $t_{i_1}, t_{i_2}, \dots, t_{i_k} \in \mathcal{T}_n$ tanulópontok, hogy a $d(x, t_{i_j})$ távolságok és a $\mathbf{D} = (d(t_\alpha, t_\beta))_{\alpha, \beta=1,2,\dots,n}$ távolságmatrix ismeretében a \mathcal{K} kizárási feltétellel minden $u \in \mathcal{T}_n \setminus \{t_{i_1}, t_{i_2}, \dots, t_{i_k}\}$ tanulópontról biztosan állítható, hogy nem lehetnek x legközelebbi szomszédja. Másrészt az is igaz, hogy tetszőleges $t_{\alpha_1}, t_{\alpha_2}, \dots, t_{\alpha_l} \in \mathcal{T}_n$, $l \leq k-1$ részhalmaz esetén létezik olyan $u \in \mathcal{T}_n$, ami nem zárható ki \mathcal{K} -val. $\text{pow}(x)$ tehát a minimális kizáró tanulópont halmaz elemszámát jelenti. Ennél kevesebb távolságszámítással nem lehet megúsni a legközelebbi társ megtalálását az alkalmazott kizárási elv mellett. $\text{pow}(x)$ az x tesztpont *ereje*, $T_x = \{t_{i_1}, t_{i_2}, \dots, t_{i_k}\}$ pedig egy *minimális kizáró halmaz*. Tegyük fel, hogy az \mathcal{S} keresési stratégiát alkalmazzuk a \mathcal{K} kizárási feltétellel abban a legrosszabb esetben, amikor az elsőnek kiválasztott tanulópont éppen az x tesztpont legtávolabbi társa \mathcal{T}_n -ben. Jelölje $\text{step}(x)$ azon $d(x, t_{i_j})$ távolságszámítások számát, ami ahhoz szükséges, hogy biztosan állíthassuk azt, hogy már megtaláltuk a legközelebbi társat. Nyilván $\text{step}(x) \geq \text{pow}(x)$. $\text{step}(x)$ az \mathcal{S} keresési stratégia *lépésszáma*, $\text{eff}(x) = \frac{\text{pow}(x)}{\text{step}(x)}$ pedig a *hatékonysága*.

Tekintsük most a \mathcal{K}_3 kizárási feltételt a minimax keresési stratégiával. Jelölje \mathcal{T}_n a tanulópont-halmazt. Jelölje x valamelyik tanulópontot. (A tárgyalt algoritmusban x végig fog futni \mathcal{T}_n minden elemén.) Tegyük fel, hogy a maradék $n-1$ tanulópontot úgy indexeltük, hogy $d(x, t_1) \leq d(x, t_2) \leq \dots \leq d(x, t_{n-1})$ teljesül. Készítsük el az alábbi $(n-1) \times (n-1)$ -es $\mathbf{A} = (a_{ij})$ matrixot, amely minden komponense 0 vagy 1.

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{ha } |d(t_i, t_i) - d(x, t_j)| < d(x, t_1) \\ 1 & \text{ha } |d(t_i, t_i) - d(x, t_j)| \geq d(x, t_1). \end{cases}$$

Jelölje az A mátrix sor- illetve oszlopösszegeit $s_i = \sum_{j=1}^{n-1} a_{ij}$ illetve $o_j = \sum_{i=1}^{n-1} a_{ij}$.

o_j azt adja meg, hogy a t_j tanulópont hány tanulópont társa révén zárható ki a további keresésből. Speciálisan, ha $o_j = 0$, akkor t_j -t nem lehet a keresésből kizárni. Nyilván $o_1 = 0$. s_i viszont azt adja meg, hogy a t_i tanulópont hány társa kizárásában vesz részt.

Az alábbi algoritmus meghatározza $\text{pow}(x)$ -et és T_x -et. Kiinduláskor $\text{pow}(x) = 0$ és $T_x = \emptyset$.

1. lépés. Ha $o_i = 0$, vesszük az i -edik sort és töröljük A azon oszlopait és sorait, ahol ebben a sorban 1 áll. A t_i tanulópontot eltávolítjuk T_x -ben és $\text{pow}(x) = \text{pow}(x) + 1$. Ezután ezt az i -edik sort és oszlopot is töröljük A -ból. Ha egyik oszlopösszeg sem 0, a 2. lépésre ugrunk, különben a 3. lépésre.

2. lépés. Azzal a t_j tanulóponttal bővítjük a T_x halmazt, ahol az s_j sorösszeg maximális, $\text{pow}(x) = \text{pow}(x) + 1$. A j -edik sorban álló 1-esek oszlopait és sorait töröljük a mátrixból. Rátérünk a 3. lépésre.

3. lépés. A redukált mátrixban, ha még van sor és oszlop, kiszámoljuk a sor- és oszlopösszegeket, majd visszatérünk az 1. lépésre. Ha minden sor és oszlop ki van törölve, az algoritmus leáll.

Ezután kiszámoljuk a megfelelő $\text{step}(x)$ értéket is, amikor a kiindulási elemünk t_{n-1} , vagyis amikor a lehető legrosszabb indulási szituáció. Végezetül kitöltjük az alábbi táblázatot:

x	$\text{pow}(x)$	$\text{step}(x)$	$\text{eff}(x)$
t_1			
\vdots			
t_n			

Irodalom

- [1] Faragó, A., Linder, T. and Lugosi, G., Fast Nearest Neighbor Search in Dissimilarity Spaces, *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, Vol. 15., No. 9. (September 1993), pp. 1–5.
- [2] Faragó, A., Linder, T., Pikler, T. and Lugosi, G., A legközelebbi szomszéd osztályozási módszer algoritmikus problémáiról, *Híradástechnika* XXXIX. évf. 8 (1988), 337–341.
- [3] Fukunaga, K. and Narendra, P. M., A Branch and Bound Algorithm for Computing k -Nearest Neighbors, *IEEE Transactions on Computer* (july 1975), pp. 750–753.
- [4] Sethi, I. K., A Fast Algorithm for Recognizing Nearest Neighbors, *IEEE Transactions on System, Man and Cybernetics*, Vol. SMC 11., No. 3. (March 1981), pp. 245–248.

- [5] Vidal, E., An Algorithm Finding Nearest Neighbors in (approximately) Constant Average Time, *Pattern Recognition Letters* 4 (1986), 145–157.

(Beérkezett: 2002. március 13.)

DR. KETSKEMÉTY LÁSZLÓ
BUDAPEST MŰSZAKI ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI EGYETEM
VILLAMOSMÉRNÖKI ÉS INFORMATIKAI KAR
SZÁMÍTÁSTUDOMÁNYI ÉS INFORMÁCIÓELMÉLETI TANSZÉK
VILLAMOSMÉRNÖKI ÉS INFORMATIKAI KAR
1521 BUDAPEST, PF. 91
E-MAIL: KELA@MATH.BME.HU

FAST SEARCH FOR NEAREST NEIGHBORS

LÁSZLÓ KETSKEMÉTY

In the metric space (\mathcal{X}, d) during searching the nearest neighbor (NN) of the query point $x \in \mathcal{X}$ among the elements of the finite training set $\mathcal{T} = \{t_1, t_2, \dots, t_n\} \subset \mathcal{X}$ we can avoid the calculation of every distances $d(x, t_i)$. This is useful in the case of large n and a complicated metric function d . The solution is the application of an excluding assumption during the searching process. An excluding assumption means a criteria for such training points which can't be the nearest neighbor of the query point. After k searching steps a training point $t \in \mathcal{T} \setminus \{t_{\gamma_1}, t_{\gamma_2}, \dots, t_{\gamma_k}\}$ can't be the nearest neighbor point if one of next three assumptions is valid: or $2d_{\min} < d(t, t_{NN})$ or $0 < \max_{i=1, \dots, k} \{d(t, t_{\gamma_i}) - 2d(x, t_{\gamma_i})\}$ or $d_{\min} < \max_{i=1, \dots, k} |d(t, t_{\gamma_i}) - d(x, t_{\gamma_i})|$, where $d_{\min} = d(x, t_{NN}) = \min_{i=1, \dots, k} d(x, t_{\gamma_i})$. The order of the NN searching process is determined by the minimax criteria:

the next training point to elaborate after $t_{\gamma_1}, t_{\gamma_2}, \dots, t_{\gamma_k}$ is $t = \arg \min_{i=1, \dots, k} |d(t, t_{\gamma_i}) - d(x, t_{\gamma_i})|$.

The statistical estimation of the number of steps for such NN searching algorithm is calculated by the average of the number of steps s_i when $x = t_i$ and $\mathcal{T} = \{t_1, \dots, t_{i-1}, t_{i+1}, \dots, t_n\}$. A group exclusion is also possible. We can exclude from the NN searching process every elements of $B \subset \mathcal{T}$ if there exists such $A \cap B = \emptyset$, $A \subset \mathcal{T}$ with $d(x, c_A) < \min \{2R_A, d(x, c_B)\}$, where $d(c_A, c_B) > R_A + R_B + \max \{R_A, R_B\}$ and e.g. $R_A = \min_{c \in A} \{R_c; d(x, c) < R_c, x \in A\}$.

A LEGKÖZELEBBI SZOMSZÉD MÓDSZER HATÉKONYSÁGA AUTOMATIKUS SKÁLÁZÁS ESETÉN

KETSKEMÉTY LÁSZLÓ

Budapest

A dolgozat azt tárgyalja, hogy a legközelebbi szomszéd módszernél hogyan lehet skálázható metrikák esetén azt az optimálisat kiválasztani, ami minimalizálja az osztályozási hiba valószínűségét. Az optimalizált döntésfüggvény-sorozat hiba valószínűségének a Bayes- hibához való konvergenciája sebességére becslést adunk. A tárgyalt módszer ugyancsak alkalmas több metrikafüggvényből optimalisan súlyozott kevert metrika megkonstruálására is. A probléma megoldásához felhasználjuk Farkas Gyula klasszikus eredményét a homogén lineáris egyenlőtlenségrendszerek nemnegatív megoldásainak előállításáról.

Bevezetés

A gyakorlati alkalmazásokban sokszor felvetődik az alábbi osztályozási feladat. Adott egy objektumhalmaz és kategóriák egy véges halmaza. Az objektumokról tudjuk, hogy ezek véges sok kategória (osztály) között oszlanak szét. Hogyan lehet az objektumok megmérésével a kategóriákra következtetni? Például jellemezni lehet-e a választópolgárokat az iskolai végzettségre, korra, foglalkozásra, jövedelemre stb. vonatkozó mérési adatokkal úgy, hogy megbízhatóan következtetni lehessen arra, hogy melyik pártra fognak szavazni? Milyen adatokat gyűjtsön össze az orvos a páciensről ahhoz, hogy felismerje a betegséget? Mekkora felbontással kell digitalizálni a kézzel írt jelet ahhoz, hogy az azonosítható legyen a megfelelő betűvel az abc-ben? Az objektumokhoz hozzárendelt X adatot *alakzatnak* nevezik. Az objektumok kiválasztása általában véletlenszerű, ezért sztochasztikus modellt alkalmaznak.

Tegyük fel, hogy adott az $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ valószínűségi mezőn az (X, Y) véletlen elem-pár, ahol X az (\mathcal{X}, d) metrikus téren veszi fel az értékeit, Y pedig bináris. A feladat az, hogy X segítségével jól becsljük Y -t. Ehhez megadunk egy $\phi : \mathcal{X} \rightarrow$

$\{0, 1\}$ döntésfüggvényt, melyet az $L(\phi) = \mathbf{P}(\phi(X) \neq Y)$ hibavalószínűséggel jellemzünk. Arra törekszünk, $L(\phi)$ minél kisebb legyen. Amennyiben ismert az (X, Y) pár együttes eloszlása, meghatározható egy optimális ϕ^* döntésfüggvény, melyre $\phi^* = \arg \min_{\phi: \mathcal{X} \rightarrow \{0, 1\}} L(\phi)$ teljesül. A ϕ^* a Bayes-döntésfüggvény, $L(\phi^*) = L^*$ pedig a Bayes-hibavalószínűség. Az alkalmazásokban nem ismerjük az (X, Y) együttes eloszlását, viszont rendelkezésünkre áll egy véges elemszámú statisztikai minta, melyet *tananyag*nak nevezünk: $D_m = \{(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots, (X_m, Y_m)\}$. Egy tanulóalgorithmus D_m segítségével előállít egy $\phi_m: \mathcal{X} \times D_m \rightarrow \{0, 1\}$ döntésfüggvényt, melyet az $L(\phi_m) = \mathbf{P}(\phi_m(X) \neq Y \mid D_m)$ feltételes hibavalószínűséggel jellemzünk. Olyan ϕ_m megkonstruálása a cél amelyről belátható, hogy $\lim_{m \rightarrow \infty} EL(\phi_m) = L^*$. Az ilyen döntésfüggvényeket előállítani tudó tanulóalgorithmusokat (gyengén) *konzisztensnek* nevezzük.

A legközelebbi társ módszer az egyik legismertebb és legrégebbi tanulóalgorithmus. Az X alakzatot ahhoz a kategóriához sorol, amelyik kategóriához az X -hez legközelebbi X_i tanulópont is tartozik D_m -ből, vagyis $d(X, X_i) < d(X, X_j)$ minden $(X_j, Y_j) \in D_m$ -re. A legközelebbi k társ módszereknél X -et abba a kategóriába osztályozzuk, amibe a D_m -beli k legközelebbi társ többsége is tartozik. A legközelebbi társ módszereknek igen nagy irodalma van, itt most Devroye, Györfi, Lugosi [5], Cover és Hart [3], Stone [10], Duda és Hart [6] valamint Fukunaga [8] összefoglaló művére hivatkozunk. Cover és Hart [3] foglalkoztak először a legközelebbi társ módszer aszimptotikus tulajdonságaival. Bebizonyították, hogyha az (\mathcal{X}, d) metrikus térben az x osztályozandó pont 1 valószínűséggel az osztályok feltételes sűrűségfüggvényének folytonossági pontja, akkor az osztályozási hiba nagysága aszimptotikusan a Bayes-hiba egyszerese és kétszerese közé fog esni függetlenül a d metrika megválasztásától. Ezt az eredményt többen általánosították arra az esetre is, amikor az X alakzat eloszlására semmilyen kikötés sincsen. (L. pl. Devroye [4].) Szeparábilis metrikus térben a legközelebbi szomszéd módszer konzisztens döntésfüggvények sorozatát fogja előállítani, ha a Bayes-hiba 0. A konvergencia sebessége persze függ d megválasztásától, ezért gyakorlati alkalmazásokban – ahol mindig véges elemszámú D_m tananyag áll rendelkezésre – nem közömbös milyen metrika alapján osztályozunk.

Short és Fukunaga [9] az $\mathcal{X} = \mathbb{R}^p$ vektortérben foglalkozott az optimális metrika megválasztásával. A szerzők az x osztályozandó vektor függvényében javasolják az Euklideszi-metrika alábbi módosítását:

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i) = |\mathbf{A}^T(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)|,$$

ahol

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{M}_1(\mathbf{x}) - \mathbf{M}(\mathbf{x}) \quad \text{és}$$

$$\mathbf{M}_1(\mathbf{x}) = \frac{1}{k_1} \sum_{i=1}^k (\mathbf{x} - \mathbf{x}_{\gamma_i}) \cdot I_{\{\mathbf{x}_{\gamma_i} \text{ az } l \text{ osztályhoz tartozik}\}},$$

$$M(\mathbf{x}) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k (\mathbf{x} - \mathbf{x}_{\gamma_i}), \quad k_1 = \sum_{i=1}^k I_{\{\mathbf{x}_{\gamma_i} \text{ az } 1 \text{ osztályhoz tartozik}\}},$$

és $\mathbf{x}_{\gamma_1}, \mathbf{x}_{\gamma_2}, \dots, \mathbf{x}_{\gamma_k}$ az \mathbf{x} legközelebbi k társa a D_m tananyagban. Az alkalmazott $A(\mathbf{x})$ súlyvektor nem más, mint az osztályozás négyzetes hibájához tartozó gradiens-vektor statisztikai becslése.

Brown és Koplowitz [1] egészen más elvek alapján javasolja a metrika kiválasztást. Módszerükkel nem reprezentatív tananyagok esetén lehet az osztályozási torzulást kiküszöbölni. A javasolt metrika $d^*(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i) = A_j d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i)$ alakú, ahol \mathbf{x}_i a j -edik osztályhoz tartozik, és A_j alkalmasan megválasztott súly.

Ebben a dolgozatban annak a lehetőségét vizsgáljuk, hogyan lehet adott \mathcal{X} alaphalmazhoz metrikafüggvények egy Δ halmazából az optimálisat kiválasztani, amivel egy tesztalmazon az osztályozási hiba relatív gyakoriságát minimalizáljuk. A leírás során az \mathcal{X} alaphalmaz a p -dimenziós \mathbb{R}^p vektortér lesz. Ennél általánosabban csak az 5. szakaszban fogjuk a problémát tárgyalni. Egy $d(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \sum_{i=1}^p \rho(x_i, u_i)$ szerkezetű bázismetrikából indulunk ki, ahol ρ egy metrika \mathbb{R} -en. Ilyen pl. az *Euklideszi*-, *Minkowsky*-, *city-blokk* vagy a *Canberra*-metrika.

A bázismetrikával generáljuk a

$$\Delta = \left\{ d_A; d_A(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \sum_{i=1}^p A_i \rho(x_i, u_i), A \geq \mathbf{0} \right\}$$

halmazt. Δ minden eleme metrika \mathbb{R}^p -n. A célkitűzésünk az, hogy ebből válasszuk ki az optimálisat.

Az n elemszámú tananyagot egy m elemszámú D_m és egy l elemszámú T_l részhalmazra bontjuk fel. ($n = m + l$). A továbbiakban D_m játsza a tananyag szerepét az osztályozáskor. T_l -et tesztanyagnak fogjuk nevezni. Jelölje a tananyagot

$$D_m = \{(\mathbf{x}_1, y_1), (\mathbf{x}_2, y_2), \dots, (\mathbf{x}_m, y_m)\},$$

ahol \mathbf{x}_i az i -edik *tanuló*pont, y_i az i -edik *tanítás*.

A tesztanyag

$$T_l = \{(\mathbf{x}_{m+1}, y_{m+1}), (\mathbf{x}_{m+2}, y_{m+2}), \dots, (\mathbf{x}_{m+l}, y_{m+l})\}$$

lesz, ahol \mathbf{x}_{m+j} az j -edik *teszt*pont.

Jelölje a Δ metrika-családhoz tartozó súlyozott metrikás legközelebbi társ döntésfüggvények halmazát C_m . A döntésfüggvényeket a kapcsolatos A skálázó-vektorral fogjuk indexelni.

A ϕ_A döntésfüggvényhez tartozó, a D_m feltételre vett feltételes döntési hiba valószínűségét $L(\phi_A) = P(\phi_A(\mathbf{X}) \neq Y \mid D_m)$ jelöli. A ϕ_A döntésfüggvény az $L(\phi_A) = \inf_{\phi \in C_m} L(\phi)$ különbséggel jellemezhető.

Jelölje $g_m^* \in C_m$ azt a döntésfüggvényt, amelynek

$$\hat{L}_{m,l}(g_m^*) = \min_{\phi_A \in C_m} \hat{L}_{m,l}(\phi_A),$$

ahol $\hat{L}_{m,l}(\phi_A) = \frac{1}{l} \sum_{i=1}^l I_{\{\phi_A(\mathbf{x}_{m+i}) \neq y_{m+i}\}}$ az $L(\phi_A)$ döntési hibaválósínúség empirikus becslése.

1. A skálázott metrikás osztályozás konvergencia sebessége

Ennek a pontnak a legfontosabb eredményeit az 1.1. Tételben foglaljuk össze. Ismeretes (Ld. pl. Devroye [4]), hogyha az L^* Bayes-hiba 0, a legközelebbi szomszéd döntésfüggvényeinek sorozata konzisztens tetszőleges olyan d metrika esetén, ahol (\mathcal{X}, d) metrikus tér szeparábilis. Tehát ebben a kedvező esetben minden $d \in \Delta$ metrika esetén biztos a legközelebbi társ döntésfüggvényeinek konzisztenciája. Továbbá igaz az is, hogy $E(L(\phi_m)) \rightarrow L_{NN}$ minden $\phi_m \in C_m$ és tetszőleges eloszlás esetén, ahol L_{NN} jelöli a legközelebbi társ döntési hibaválósínúségét. Nem mindegy azonban, hogy a fenti konvergencia milyen sebességgel történik meg, azaz a tananyag végeessége miatt nem közömbös a d metrika megválasztása. A 3. szakaszban adjuk meg azt az algoritmust, amely kiválasztja Δ -ból az empirikus hibát minimalizáló elemet. Ehhez a metrikához tartozó a $g_m^* \in C_m$ döntésfüggvényre igaz az alábbi tétel:

1.1. TÉTEL. Az $\hat{L}_{m,l}(\phi)$ empirikus hibaválósínúséget minimalizáló g_m^* döntésfüggvényre minden $\varepsilon > 0$ esetén fennáll, hogy

$$P\left(L(g_m^*) - \inf_{\phi \in C_m} L(\phi) > \varepsilon \mid D_m\right) \leq 4e^8 \left(l^2 \binom{m}{2}\right)^p e^{-\frac{l\varepsilon^2}{2}}.$$

Az 1.1. Tétel bizonyításához szükségünk lesz a döntésfüggvény-osztály struktúráját jellemző fogalmakra és állításokra, melyeket a Devroye–Györfi–Lugosi [5] könyvből vettünk át.

1.2. Definíció. Legyen \mathcal{A} \mathbb{R} -beli mérhető halmazok egy osztálya. Tekintsük a $\{\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \dots, \mathbf{z}_n\}$ p -dimenziós vektorhalmazt. Jelölje $\mathcal{N}_{\mathcal{A}}(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \dots, \mathbf{z}_n)$ azoknak a részhalmazoknak a számát, amelyek $\{\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \dots, \mathbf{z}_n\} \cap A$, $A \in \mathcal{A}$ alakúak. Ekkor az \mathcal{A} halmazosztály n -edik darabolási együtthatóján az

$$s(\mathcal{A}, n) = \max_{\{\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \dots, \mathbf{z}_n\}} \mathcal{N}_{\mathcal{A}}(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \dots, \mathbf{z}_n)$$

számot értjük.

Tehát maximum $s(\mathcal{A}, n)$ különböző részhalmaz lehet egy n -elemű \mathbb{R}^p -beli pontrendszerből \mathcal{A} -beli részhalmazokban. Szokás azt mondani, hogy \mathcal{A} maximum

$s(\mathcal{A}, n)$ részhalmazt „csíp ki” $\{\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \dots, \mathbf{z}_n\}$ -ből. Nyilván $s(\mathcal{A}, n) \leq 2^n$. Ha valamely $\{\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \dots, \mathbf{z}_n\}$ pontrendszer esetén $\mathcal{N}_{\mathcal{A}}(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \dots, \mathbf{z}_n) = 2^n$, akkor \mathcal{A} „összedarabolja” $\{\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \dots, \mathbf{z}_n\}$ -et. Ha viszont $s(\mathcal{A}, n) < 2^n$, akkor bármely $\{\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \dots, \mathbf{z}_n\}$ pontrendszer esetén van legalább egy olyan $\{\mathbf{z}_{i_1}, \mathbf{z}_{i_2}, \dots, \mathbf{z}_{i_k}\}$ részhalmaz, amely egyik $A \in \mathcal{A}$ -nak sem részhalmaza. Az is világos, hogy ha $s(\mathcal{A}, k) < 2^k$ valamely k -ra, akkor $s(\mathcal{A}, n) < 2^n$ is igaz minden $n > k$ -ra.

1.3. Definíció. Legyen \mathcal{A} \mathbb{R}^p -beli mérhető halmazok egy legalább kételemű családja. Azt a legnagyobb k egész számot, melyre $s(\mathcal{A}, k) = 2^k$ az \mathcal{A} halmazcsalád *Vapnik–Chervonenkis* dimenziójának (VC-dimenzió) nevezzük és $\mathcal{V}_{\mathcal{A}}$ -val jelöljük. Ha $s(\mathcal{A}, n) = 2^n$ minden n -re, akkor definíció szerint $\mathcal{V}_{\mathcal{A}} = \infty$.

(Tehát, ha $\mathcal{V}_{\mathcal{A}} < \infty$ és $n > \mathcal{V}_{\mathcal{A}}$, akkor szükségképpen $s(\mathcal{A}, n) < 2^n$.)

1.4. Definíció. Legyen C tetszőleges $\phi : \mathbb{R}^p \rightarrow \{0, 1\}$ döntésfüggvények halmaza. Tekintsük $p + 1$ -dimenziós vektorok alábbi \mathcal{A}_C halmazosztályát:

$$\mathcal{A}_C = \left\{ A; A = \left\{ \{\mathbf{x}; \phi(\mathbf{x}) = 1\} \times \{0\} \right\} \cup \left\{ \{\mathbf{x}; \phi(\mathbf{x}) = 0\} \times \{1\} \right\}, \phi \in C \right\}.$$

Ezen \mathcal{A}_C halmazosztály n -edik darabolási együtthatója lesz a C döntésfüggvények osztályának n -edik darabolási együtthatója: $S(C, n) = s(\mathcal{A}_C, n)$. C Vapnik–Chervonenkis dimenziója pedig $\mathcal{V}_C = \max_{S(C, n)=2^n} n$ lesz.

Használjuk az 1. szakaszban bevezetett jelöléseket. Az n elemszámú tananyagot egy m elemszámú D_m és egy l elemszámú T_l részhalmazokra bontottunk. ϕ_A jelöli a $d_A(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \sum_{i=1}^p A_i \rho(x_i, u_i)$ távolságfüggvényhez és D_m -hez tartozó legközelebbi szomszéd elven működő döntésfüggvényt, $C_m = \{\phi_A; A \geq 0\}$.

A C_m függvényrendszer l -edik darabolási együtthatójára vonatkozó egyenlőtlenséget fogunk kimondani. Ehhez először szükségünk van két segédételre. Az első segédételben megfogalmazott állítás bizonyítása megtalálható pl. Cover [2] cikkében is. Az itt közölt bizonyítás jelöléseit később használni fogjuk. Legyen $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^p$ tetszőleges. Ekkor a $H = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^p; \mathbf{n}^T \mathbf{x} = 0\}$ hipersíkkal az \mathbb{R}^p teret két részre partícionálhatjuk: az $A_1 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^p; \mathbf{n}^T \mathbf{x} > 0\}$ és $A_2 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^p; \mathbf{n}^T \mathbf{x} \leq 0\}$ partíciókra. Ha k darab különböző normálvektort tekintünk, akkor hipersíkokkal kialakítható partíciók számát jelölje $C(k, p)$.

1.5. SEGÉDTÉTEL. $C(k, p) = 2 \sum_{j=0}^{p-1} \binom{k-1}{j}.$

Bizonyítás. Nyilván $C(k, p) = C(k-1, p) + C(k-1, p-1)$, mert a k -adik hipersíkot az előző $k-1$ db hipersík éppen $C(k-1, p-1)$ partícióra bontja szét. Ugyanis p -dimenziós hipersíkok metszete is hipersík lesz, de a $p-1$ dimenziós al térben. Egyetlen hipersík 2 részre bontja a teret, tehát

$$C(1, p) = \begin{cases} 2 & \text{ha } p \geq 1 \\ 0 & \text{ha } p \leq 0. \end{cases}$$

Ekkor

$$\begin{aligned}
 C(k, p) &= C(k-1, p) + C(k-1, p-1) = \\
 &= C(k-2, p) + 2C(k-2, p-1) + C(k-2, p-2) = \\
 &= C(k-3, p) + 3C(k-3, p-1) + 3C(k-3, p-2) + C(k-3, p-3) = \\
 &= \dots = \sum_{j=0}^s \binom{s}{j} C(k-s, p-j) = \dots = \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k-1}{j} C(1, p-j) = \\
 &= 2 \sum_{j=0}^{p-1} \binom{k-1}{j}.
 \end{aligned}$$

□

1.6. SEGÉDTÉTEL. $C(k, p) \leq \sum_{i=0}^p \binom{k}{i} \leq k^p$, $k \geq p \geq 2$.

Bizonyítás.

$$\begin{aligned}
 C(k, p) &= 2 \sum_{j=1}^{p-1} \binom{k-1}{j} = \binom{k-1}{0} + \left[\binom{k-1}{0} + \binom{k-1}{1} \right] + \\
 &+ \left[\binom{k-1}{1} + \binom{k-1}{2} \right] + \dots + \left[\binom{k-1}{p-2} + \binom{k-1}{p-1} \right] + \binom{k-1}{p-1} = \\
 &= \binom{k}{0} + \binom{k}{1} + \dots + \binom{k}{p-1} + \binom{k-1}{p-1} \leq \sum_{i=0}^p \binom{k}{i}.
 \end{aligned}$$

Teljes indukcióval bizonyítunk. A $p = 2$ -nél tetszőleges $k \geq 2$ -ra igaz az állítás, hiszen $\sum_{i=0}^2 \binom{k}{i} = 1 + k + \frac{k(k-1)}{2} = k^2 + \left(\frac{k+2-k^2}{2} \right) \leq k^2$. Ezután legyen $p \geq 2$ tetszőleges. A $k = p$ esetére nyilván igaz:

$$\sum_{i=0}^p \binom{p}{i} = 2^p \leq p^p, \quad \text{ha } p \geq 2.$$

Tegyük fel, hogy az egyenlőtlenség igaz valamely $k \geq p$ -re: $\sum_{i=0}^p \binom{k}{i} \leq k^p$.

Ekkor

$$\sum_{i=0}^p \binom{k+1}{i} = 2 \sum_{i=0}^{p-1} \binom{k}{i} + \binom{k}{p} < 2k^{p-1} + k^p \leq pk^{p-1} + k^p \leq (k+1)^p. \quad \square$$

Vegyük ki az i -edik tesztpontot, \mathbf{x}_{m+i} -t T_l -ből. Számoljuk ki minden (j, k) indexkombinációval az $\mathbf{N}_{jk}^{(i)} = \mathbf{t}(\mathbf{x}_j, \mathbf{x}_{m+i}) - \mathbf{t}(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{m+i})$ vektorokat, ahol $\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = (\rho(x_1, u_1), \rho(x_2, u_2), \dots, \rho(x_p, u_p))^T$ jelöli az $\mathbf{x}, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^p$ vektorok távolságvektorát. A rögzített \mathbf{x}_{m+i} -hez D_m tanulópontjaival $\binom{m}{2}$ ilyen vektor készíthető el, tehát ha mind az l tesztpontot soravesszük, akkor $l \cdot \binom{m}{2}$ darab $\mathbf{N}_{jk}^{(i)}$ különbség-vektorunk lesz. Tekintsük most azokat a hipersíkokat \mathbb{R}^p -ben, melyeknek az $\mathbf{N}_{jk}^{(i)}$ vektorok a normálvektorai. A hipersíkok egyenletei $\mathbf{N}_{jk}^{(i)T} \mathbf{A} = 0$ alakban adhatók meg, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^p$.

Ezen előkészületek után becslést tudunk adni a C_m halmaz l -edik darabolási együttthatójára.

1.7. SEGÉDTÉTEL. $S(C_m, l) \leq (l \binom{m}{2})^p$.

Bizonyítás. Jelölje $T_l = \{\mathbf{x}_{m+1}, \mathbf{x}_{m+2}, \dots, \mathbf{x}_{m+l}\}$ a tesztpontok halmazát és legyen $\mathcal{F}_m = \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^p; \mathbf{u} = (\phi(\mathbf{x}_{m+1}), \phi(\mathbf{x}_{m+2}), \dots, \phi(\mathbf{x}_{m+l}))^T, \phi \in C_m\}$. Először azt bizonyítjuk be, hogy \mathcal{F}_m elemszáma nem lehet több, mint $(l \binom{m}{2})^p$. Tekintsük minden (j, s) indexkombinációval az $\mathbf{N}_{j,s}^{(i)} = \mathbf{t}(\mathbf{x}_j, \mathbf{x}_{m+i}) - \mathbf{t}(\mathbf{x}_s, \mathbf{x}_{m+i})$ vektorokat, ahol $\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = (\rho(x_1, u_1), \rho(x_2, u_2), \dots, \rho(x_p, u_p))^T$ jelöli az $\mathbf{x}, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^p$ vektorok távolságvektorát. (Lásd a 2.1. Definíciót.) A képletben \mathbf{x}_j és \mathbf{x}_s a D_m tananyag két tetszőleges pontja. Ily módon összesen $l \binom{m}{2}$ db ilyen $\mathbf{N}_{j,s}^{(i)} \in \mathbb{R}^p$ vektor készíthető el. Vegyük most az összes olyan hipersíkot \mathbb{R}^p -ben, melyeknek normálvektorai a kiszámolt $\mathbf{N}_{j,s}^{(i)}$ vektorok: $H_{j,s}^{(i)} = \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^p; (\mathbf{N}_{j,s}^{(i)})^T \mathbf{u} = 0\}$. A 1.6. Segédtétel szerint ez az összesen $k = l \binom{m}{2}$ db hipersík a teljes teret nem több mint $(l \binom{m}{2})^p$ partícióra bontja. Ha most \mathbf{a}_1 és \mathbf{a}_2 nemnulla vektorok ugyanabból a partícióból valók, a hozzájuk tartozó $\phi_{\mathbf{a}_1}, \phi_{\mathbf{a}_2} \in C_m$ döntésfüggvényekre fenn fog állni, hogy azonosan osztályozzák a T_l tesztthalmaz pontjait, azaz $\phi_{\mathbf{a}_1}(\mathbf{x}_{m+i}) = \phi_{\mathbf{a}_2}(\mathbf{x}_{m+i})$, $i = 1, 2, \dots, l$. Az \mathcal{F}_m halmaz elemszáma nem lehet tehát több, mint a partíciók száma, azaz $(l \binom{m}{2})^p$.

Vegyük most tetszőleges $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \dots, \mathbf{z}_l \in \mathbb{R}^p$ tanulópontokat, és hozzátartozóan $v_1, v_2, \dots, v_l \in \{0, 1\}$ tanításokat. Ezekkel a pontokkal fogjuk eljátszatni a tesztpontok szerepét, azaz tegyük fel egy pillanatra, hogy $\mathbf{z}_i = \mathbf{x}_{m+i}$ és $v_i = y_{m+i}$ ($i = 1, 2, \dots, l$). A korábban elmondott módon létrehozuk \mathbb{R}^p partícióit, melyek száma nem haladhatja meg $(l \binom{m}{2})^p$ -t. A C_m függvényosztályhoz tartozó \mathcal{A}_{C_m} halmazrendszer most

$$\mathcal{A}_{C_m} = \{\mathbf{A}_a; \mathbf{A}_a = \{\{\mathbf{x}; \phi_a(\mathbf{x}) = 1\} \times \{0\}\} \cup \{\{\mathbf{x}; \phi_a(\mathbf{x}) = 0\} \times \{1\}\}, a \in \mathbb{R}^p\}.$$

$S(C_m, l)$ azt a maximális részhalmaz számot jelenti, amit \mathcal{A}_{C_m} kicsippent $Z = \{\mathbf{z}_1 \times v_1, \mathbf{z}_2 \times v_2, \dots, \mathbf{z}_l \times v_l\}$ részhalmazai közül. Ha most \mathbf{a}_1 és \mathbf{a}_2 nemnulla vektorok ugyanabból a partícióból valók, és $\mathbf{A}_{\mathbf{a}_1} = \{\{\mathbf{x}; \phi_{\mathbf{a}_1}(\mathbf{x}) = 1\} \times \{0\}\} \cup \{\{\mathbf{x}; \phi_{\mathbf{a}_1}(\mathbf{x}) = 0\} \times \{1\}\}$, $i = 1, 2$, akkor $\mathbf{A}_{\mathbf{a}_1} \cap Z = \mathbf{A}_{\mathbf{a}_2} \cap Z$ lesz. Vagyis Z -ből nem

lehet több részhalmazt kicsípni, mint ahány partíció alakult ki benn a hipersíkok révén, azaz $S(C_m, l) \leq (l \binom{m}{2})^p$. \square

Ezek után rátérünk az 1.1. Tétel bizonyítására.

Bizonyítás. Becslést adunk a

$$P(L(\phi^*) - \inf_{\phi \in C_m} L(\phi) > \varepsilon \mid D_m)$$

feltételes valószínűsége, ahol

$$L(\phi) = P(\phi(\mathbf{X}) \neq Y \mid D_m).$$

A Devroye–Györfi–Lugosi [5] könyv 8.2. Lemmája szerint:

$$L(\phi^*) - \inf_{\phi \in C_m} L(\phi) \leq 2 \sup_{\phi \in C_m} |\hat{L}_{m,l}(\phi) - L(\phi)|.$$

A Devroye–Györfi–Lugosi [5] könyv 12.8. Tétele szerint:

$$P\left(\sup_{\phi \in C_m} |\hat{L}_{m,l}(\phi) - L(\phi)| > \varepsilon \mid D_m\right) \leq 4e^8 S(C_m, l^2) e^{-2l\varepsilon^2}.$$

Ezekből az egyenlőtlenségekből közvetlenül következik, hogy

$$P\left(L(\phi^*) - \inf_{\phi \in C_m} L(\phi) > \varepsilon \mid D_m\right) \leq 4e^8 S(C_m, l^2) e^{-\frac{l\varepsilon^2}{2}}.$$

Végül felhasználva az l^2 -edik darabolási együtthatóra vonatkozó becslést:

$$P\left(L(\phi^*) - \inf_{\phi \in C_m} L(\phi) > \varepsilon \mid D_m\right) \leq 4e^8 \left(l^2 \binom{m}{2}\right)^p e^{-\frac{l\varepsilon^2}{2}}.$$

A fenti becslés már eloszlásmentes, a felső korlát nem függ a véletlentől. Ezzel az 1.1. Tételt bebizonyítottuk. \square

1.8. MEGJEGYZÉS. A 1.1. Tétel állításának jobboldala

$$c_0 \exp\left(-l \cdot \left(c_1 + c_2 \frac{\ln l}{l} + c_3 \frac{\ln m}{l} + c_4 \frac{\ln(m-1)}{l}\right)\right)$$

alakú, ahol c_0, \dots, c_4 alkalmasan megválasztott konstansok. A $l \rightarrow \infty$ határátmenet során a kifejezés akkor lesz minimális, ha közben $\frac{\log m}{l} \rightarrow 0$ is fennáll. Ez utóbbi feltétel nyújt gyakorlati útmutatást arra vonatkozóan, hogy milyen arányban osszuk fel az adatainkat tananyag és teszhalmaz részekre. Tekintsük az $f(x, y) = \frac{\ln(y-x)}{x} = \frac{\ln\left(\frac{y}{x} - 1\right)}{x} + \frac{\ln x}{x}$ függvényt. Megmutatható, hogy $x = \frac{y}{\ln y}$ választással $y \rightarrow \infty$ esetén $x \rightarrow \infty$ és $f\left(\frac{y}{\ln y}, y\right) \rightarrow 0$. Tehát az $l \approx \frac{n}{\ln n}$, $m \approx n - \frac{n}{\ln n}$

választás esetén a becslő kifejezés minimalizálható az $n \rightarrow \infty$ átmenetkor, azaz viszonylag kis elemszámú tesztanyag leválasztásával pontossá tehető a metrikasúlyozásos osztályozás. Az alábbi táblázat azt mutatja, hogy n növekedtével hogyan alakul az l és m értéke, valamint az $\frac{l}{m}$ és $\frac{l}{n}$ arány.

n	l	m	$\frac{l}{m}\%$	$\frac{l}{n}\%$
100	22	78	27.74	21.71
200	38	162	23.26	18.87
300	53	247	21.26	17.53
400	67	333	20.3	16.69
500	80	420	19.18	16.09
600	94	506	18.53	15.63
700	107	593	18.01	15.26
800	120	680	17.59	14.96
900	132	768	17.23	14.70
1000	145	855	16.93	14.48
2000	263	1737	15.15	13.16
3000	375	2625	14.27	12.50
4000	482	3518	13.71	12.06
5000	587	4413	13.30	11.74
10000	1086	8914	12.18	10.86
100000	8686	91314	9.51	8.69

2. A legjobban skálázott metrika kiválasztásának előkészítő fázisa

Ebben a szakaszban azt fogjuk tárgyalni, hogy hogyan lehet a g_m^* döntésfüggvényhez tartozó A^* skálázó vektort előállítani, azaz hogyan lehet kiválasztani az optimális metrikát a Δ metrika-családból.

A leírásnál szükségünk van néhány jelölésre. A tananyag két osztályra osztható:

$$M_0 = \{x_i; x_i \in D_m, y_i = 0\} \quad \text{és} \quad M_1 = \{x_j; x_j \in D_m, y_j = 1\}.$$

Hasonlóképpen a teszthalmazt is két részre oszthatjuk:

$$O_0 = \{x_i; x_i \in T_l, y_i = 0\} \quad \text{és} \quad O_1 = \{x_j; x_j \in T_l, y_j = 1\}.$$

A dolgozatban használni fogjuk a vektorok és mátrixok között értelmezhető $\geq, \leq, <$ és $>$ féligrendezési relációkat. Az $x \geq u$ és $A \geq B$ ($\leq, >, <$) féligrendezési relációk akkor állnak fenn, ha minden koordinátában fennállnak.

2.1. *Definíció.* $t(x, u) = (\rho(x_1, u_1), \rho(x_2, u_2), \dots, \rho(x_p, u_p))^T$, az x és u távolságvektora.

2.2. MEGJEGYZÉS. $t(x, u) \geq 0$, és nyilvánvalóan igaz, hogy ha $t(x, u) \leq t(w, v)$, akkor tetszőleges $A \geq 0$ skálázó vektorral $d_A(x, u) \leq d_A(w, v)$ is fennáll.

2.3. *Definíció.* A $z \in O_0$ tesztpont távolságvektora az M_1 -től:

$$t(M_1, z) = t^*(z) = \left(\min_{u \in M_1} \rho(z_1, u_1), \min_{u \in M_1} \rho(z_2, u_2), \dots, \min_{u \in M_1} \rho(z_p, u_p) \right)^T.$$

2.4. MEGJEGYZÉS. Hasonlóan lehet értelmezni a $z \in O_1$ esetén a $t(M_0, z)$ távolságvektort is.

Az optimális $A^* \geq 0$ skálázó vektort úgy fogjuk előállítani, hogy felírjuk azt egy $GA \leq 0$, $A \geq 0$, $A \neq 0$ homogén lineáris egyenlőtlenség-rendszer megoldásaként, ahol a G mátrix minden sorában van legalább egy negatív komponens. A T_i teszhalmaz minden eleméhez megkísérlünk előállítani egy vagy több sorvektort a G mátrixban. Amelyik tesztpontnál ez nem sikerül, azokat rosszul fogja osztályozni még az optimális g_m^* döntésfüggvény is, de ezeket minden más $\phi_A \in C_m$ döntésfüggvény is rosszul osztályozná. Az ismertetendő algoritmus két fázisban oldja meg a feladatot. Az első fázisban megadjuk a G mátrixot, a másodikban pedig meghatározzuk a g_m^* -hoz tartozó $A^* \geq 0$ skálázó vektort. Ebben a pontban az algoritmus első fázisát ismertetjük.

Felhasználjuk, hogy $z \in O_0$ -t tekintve, az alábbi három eset valamelyike biztosan fennáll:

1. eset: Van olyan $x \in M_0$, melyre $t(x, z) \leq t^*(z)$. Ilyenkor tetszőleges A skálázó vektort használva z -t jól fogjuk osztályozni, hiszen $A^T t(x, z) \leq A^T t^*(z) \leq A^T t(u, z)$, minden $u \in M_1$ -re, azaz $\phi_A(z) = 0$ lesz.

2. eset: Minden $x \in M_0$ esetén $t(x, z) > t^*(z)$. Ekkor további két alesetet különböztetünk meg:

2/-a- Létezik $u \in M_1$, hogy minden $x \in M_0$ -re $t(x, z) > t(u, z)$ is. Ilyenkor semmilyen A skálázó vektornál sem tudjuk z -t jól osztályozni, hiszen $d_A(u, z) \leq d_A(x, z)$, azaz $\phi_A(z) = 1$.

2/-b- Minden $u \in M_1$ -hez létezik $x \in M_0$, hogy $t(x, z) \not> t(u, z)$. Ilyenkor az (x, u) párhoz kiszámítjuk a $g = t(x, z) - t(u, z)$ -t, és felvesszük azt a G mátrix sorvektorai közé. Ekkor majd A^* -gal teljesülni fog, hogy minden $u \in M_1$ -hez létezik $x \in M_0$: $d_{A^*}(u, z) \geq d_{A^*}(x, z)$, azaz z -t jól fogjuk osztályozni, mert $\phi_{A^*}(z) = 0$.

3. eset: Van olyan $x \in M_0$, melyre $t(x, z) \not> t^*(z)$, de $t(x, z) \not\leq t^*(z)$ is. Az ilyen $x \in M_0$ -ekre először maximalizáljuk a $\kappa(x) = \sum_{i=1}^p I_{\{\rho(x_i, z_i) < t_i^*(z)\}}$ függvényt, majd a $\kappa(x)$ -et maximalizáló x -ekre minimalizáljuk a $\zeta(x) = \sum_{i=1}^p \rho(x_i, z_i)$ függvényt.

Jelöljük az optimumot felvevő tanulópontot \mathbf{x}^* -gal. Ilyenkor $\mathbf{g} = \mathbf{t}(\mathbf{x}^*, \mathbf{z}) - \mathbf{t}^*(\mathbf{z})$ -t felvesszük azt a \mathbf{G} mátrix sorvektorai közé, és $\mathbf{A}^{*T} \mathbf{t}(\mathbf{x}^*, \mathbf{z}) \leq \mathbf{A}^{*T} \mathbf{t}^*(\mathbf{z})$ miatt $d_{\mathbf{A}^*}(\mathbf{u}, \mathbf{z}) \geq d_{\mathbf{A}^*}(\mathbf{x}^*, \mathbf{z})$ lesz minden $\mathbf{u} \in M_1$ -re, azaz \mathbf{z} -t jól fogjuk osztályozni.

Az algoritmus az első fázisban a fenti három eset figyelembevételével előállít egy \mathbf{G} mátrixot. A második fázisban megoldjuk a $\mathbf{G}\mathbf{A} \leq \mathbf{0}$, $\mathbf{A} \geq \mathbf{0}$, $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$ lineáris programozási feladatot, melynek bármely \mathbf{A}^* megoldása alkalmas skálázó vektor lesz a g_m^* döntésfüggvényhez. \mathbf{G} sorainak s számára igaz az alábbi egyenlőtlenség:

$$0 \leq s \leq \#M_1 \cdot \#O_0 + \#M_0 \cdot \#O_1, \text{ ahol pl. } \#M_1 = \sum_{i=1}^m I_{\{y_i=1\}}, \text{ az } M_1 \text{ halmaz szá-}$$

mossága. Az algoritmus az első fázisban meghatároz egy h^* értéket, amely azon tesztpontok számát adja meg melyekre a 2.-a- aleseténél leírt feltétel igaz. Ezeket egyik $\phi_{\mathbf{A}} \in C_m$ döntésfüggvénnyel sem lehet jól osztályozni, még g_m^* -gal sem. Igaz lesz továbbá az alábbi egyenlőtlenség:

$$\epsilon^* = \frac{h^*}{l} = \hat{L}_{m,l}(g_m^*) \leq \hat{L}_{m,l}(\phi_{\mathbf{A}}),$$

vagyis C_m -en g_m^* minimalizálja az $\hat{L}_{m,l}$ empirikus osztályozási hibát.

2.5. MEGJEGYZÉS. Ha az osztályok száma kettőnél nagyobb, azaz $\phi : \mathcal{X} \rightarrow \{1, 2, \dots, L\}$ alakú, akkor az O_1 tesztosztályon az épp vizsgált tesztpont osztályától eltérő osztályhoz nem tartozó tesztpontok halmazát kell érteni. Ily módon a leírt algoritmus kiterjeszthető az általánosabb esetre is. Második lépésben elhagyjuk az elsőnek kiválasztott osztály tanulópontjait. Az így redukált halmazban vesszük a második osztályt és ennek a tesztpontjai fogják játszani O_0 szerepét, a komplement halmaz pedig O_1 -ét. Az első lépésben megkezdett \mathbf{G} mátrix sorainak feltöltését az új szereposztásban folytatjuk, amíg az összes osztály feldolgozásra nem került.

A korábban tárgyalt három eset figyelembevételével megadjuk az \mathbf{A}^* -ot előállító algoritmus első fázisát, azaz előállítjuk a \mathbf{G} mátrixot.

Az algoritmus leírásában használni fogjuk a $:=$ jelet, amelynek jelentése: a jobboldal tartalmával felülírjuk a baloldal tartalmát.

Inicializálás: $h^* := 0$.

i^0 Vegyük egyenként a T_l halmaz tesztpontjait. (1. ciklus). A leírásban jelölje $\mathbf{z} \in T_l$ az éppen soron következő tesztpontot. (Ha már minden tesztpontot feldolgoztunk, az iv^0 pontra ugrunk) Tegyük fel, hogy $\mathbf{z} \in O_0$. Legyen $s, b := 0$. Számoljuk ki $\mathbf{t}(M_1, \mathbf{z}) = \mathbf{t}^*(\mathbf{z})$ -t.

ii^0 Sorravezesszük az M_0 osztály \mathbf{x} tanulópontjait, ezzel elindítjuk a 2. (belső) ciklust.

$ii^0/-a-$ Vegyük a következő $\mathbf{x} \in M_0$ tanulópontot, és számoljuk ki a $\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{z})$ távolságvektort. Ha már nincs több pont M_0 -ban, az $ii^0/-e-$ pontra ugrunk.

$ii^0/-b-$ Megvizsgáljuk a $t(x, z) \leq t^*(z)$ feltételt. Ha teljesül, akkor kilépünk a 2. ciklusból és az 1. ciklus végére lépünk véve a következő z tesztponthoz, azaz visszalépünk i^0 -re. Ha nem teljesül, a $ii^0/-c-$ pontra ugrunk.

$ii^0/-c-$ Megvizsgáljuk a $t(x, z) \not\leq t^*(z)$ relációt. Ha igaz, megvizsgáljuk, hogy x maximalizálja-e a $\kappa(x)$ és $\zeta(x)$ függvényeket. Ha igen, x^* -ot x -el felülírjuk, $s := s + 1$. Visszatérünk az $ii^0/-a-$ ponthoz.

$ii^0/-d-$ Ha nem igaz, akkor Visszatérünk az $ii^0/-a-$ ponthoz.

$ii^0/-e-$ Megvizsgáljuk az $s = 0$ feltételt. Ha igaz, elindítunk egy 3. ciklust, azaz ráugrunk a iii^0 -pontra. (Ilyenkor a fent tárgyalt 2. eset fordult elő.) Ha $s \geq 1$, akkor kiszámoljuk a $g = t(x^*, z) - t^*(z)$ -t és felvesszük a G mátrix sorvektorai közé, $b := b + 1$. (Vö. a 3. esetben leírtakkal.) Ráugrunk i^0 -ra.

iii^0 Sorravesszük az M_1 halmaz elemeit. Vegyük $u \in M_1$ -et. Elindítunk egy belső ciklust, ahol sorravesszük az $x \in M_0$ tanulópontokat. Megvizsgáljuk, hogy fennáll-e $t(x, z) \not\leq t(u, z)$.

Ha valamely x -re ez teljesül, kiugrunk a belső ciklusból, kiszámoljuk $g = t(x, z) - t(u, z)$ -t és tároljuk azt G -ben, $b := b + 1$. Visszatérünk i^0 -ra.

Ha a belső ciklus végigpörög és minden $x \in M_0$ -re $t(x, z) > t(u, z)$ adódott, 1-gyel megnöveljük az h^* számláló tartalmát és csak ekkor térünk vissza i^0 -ra.

iv^0 A feldolgozás befejeződött. A G mátrix sorainak száma b , oszlopainak száma p . h^* tartalma a T_1 -ben rosszul osztályozható pontok minimális száma.

3. Homogén lineáris egyenlőtlenség-rendszer nemnegatív megoldásának megkeresése

Belátható, hogy egy homogén lineáris egyenlőtlenségrendszer nemnegatív megoldásai egy véges konvex kúp elemeiként adhatók meg. Ebben a pontban ismertető eredményeket Farkas Gyula klasszikus cikke [7] alapján közöljük.

Legyen $G \in \mathbb{R}^{s \times p}$ egy tetszőleges olyan mátrix amelynek minden sorában van negatív komponens, azaz létezik $g_{ij} < 0$ ($i = 1, 2, \dots, s$). Hogyan konstruáljunk meg olyan $x \geq 0$, $x \neq 0$ vektort, melyre $Gx \leq 0$ lesz?

Az alábbi tétel Farkas Gyulától származik. A konstruktív bizonyításban használt jelöléseket az optimálisan skálázott metrikát meghatározó algoritmus második fázisának leírásakor fel fogjuk használni.

3.1. TÉTEL (Farkas). A $Gx \leq 0$, $x \geq 0$, $x \neq 0$ feladat megoldható, és minden megoldás előáll $x = H_1 H_2 \cdots H_s y$, $y \geq 0$, $y \neq 0$ alakban, ahol a $H_1, H_2, \dots, H_s \geq 0$ a bizonyítás során ismertető algoritmus által a G komponenseiből megkonstruált mátrixok.

Bizonyítás.

1. lépés: Jelölje \mathbf{g}_i a \mathbf{G} mátrix i -edik sorvektorát. Legyen

$$\mathbf{g}^{(0)} = \mathbf{g}_1 = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_p)^T.$$

Tegyük fel az egyszerűség kedvéért, hogy $\mathbf{g}^{(0)}$ első r db komponense 0, az ezeket követő k db komponense negatív, az utolsó l db komponense pedig pozitív ($r + k + l = p$). Ezután definiáljuk a

$$\mathbf{H}_1 = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{r+k}, \mathbf{H}_1, \dots, \mathbf{H}_{k \cdot l}) \in \mathbb{R}^{p \times (r+k+l)}$$

mátrixot, ahol \mathbf{e}_i az i -edik p -dimenziós egységvektor,

$$\mathbf{H}_1 = \gamma_{r+k+1} \mathbf{e}_{r+1} - \gamma_{r+1} \mathbf{e}_{r+k+1}, \dots, \mathbf{H}_{k \cdot l} = \gamma_p \mathbf{e}_{r+k} - \gamma_{r+k} \mathbf{e}_p.$$

Tehát \mathbf{H}_1 első $r + k$ oszlopa egységvektor, az utolsó $k \cdot l$ oszlopvektora pedig $\gamma_i \mathbf{e}_j - \gamma_j \mathbf{e}_i$ alakú, ahol $\gamma_i > 0$ és $\gamma_j < 0$. A konstrukcióból nyilvánvaló, hogy

$$\mathbf{H}_1 \geq 0 \quad \text{és} \quad \mathbf{g}^{(0)T} \mathbf{H}_1 \left(\underbrace{0, \dots, 0}_{r \text{ db}}, \gamma_{r+1}, \gamma_{r+2}, \dots, \gamma_{r+k}, \underbrace{0, \dots, 0}_{k \cdot l \text{ db}} \right) \leq 0.$$

2. lépés: Legyen

$$\mathbf{G}_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{g}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{g}_s^T \end{pmatrix} \cdot \mathbf{H}_1.$$

Jelölje $\mathbf{g}^{(1)}$ a \mathbf{G}_1 mátrix első sorának vektorát. Ismételjük meg $\mathbf{g}^{(1)}$ -gyel az 1. lépésben $\mathbf{g}^{(0)}$ -val leírt eljárást, előállítva most a $\mathbf{H}_2 \geq 0$ mátrixot. A \mathbf{H}_2 mátrix sorainak száma $r + k + kl$ lesz, az oszlopainak száma attól függ, mennyi 0, pozitív és negatív komponense van a $\mathbf{g}^{(1)}$ -nek. Ezután legyen

$$\mathbf{G}_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{g}_3^T \\ \vdots \\ \mathbf{g}_s^T \end{pmatrix} \cdot \mathbf{H}_2,$$

ennek $\mathbf{g}^{(2)}$ az első sorvektora A fenti eljárást ismételve $s - 1$ lépésben eljutunk a $\mathbf{G}_{s-1} = \mathbf{g}_s^T \mathbf{H}_{s-1} = \mathbf{g}^{(s-1)}$ mátrixhoz, ami már sorvektor. Végül jelölje a $\mathbf{g}^{(s-1)}$ -hez elkészített mátrixot \mathbf{H}_s .

3. lépés: Legyen most $\mathbf{y} \geq 0$, $\mathbf{y} \neq 0$ tetszőleges.

$$\mathbf{G} \mathbf{H} = \mathbf{G} \mathbf{H}_1 \mathbf{H}_2 \cdots \mathbf{H}_s = \begin{pmatrix} \mathbf{g}^{(0)T} \mathbf{H}_1 \mathbf{H}_2 \cdots \mathbf{H}_s \\ \mathbf{g}^{(1)T} \mathbf{H}_2 \mathbf{H}_3 \cdots \mathbf{H}_s \\ \vdots \\ \mathbf{g}^{(s-1)T} \mathbf{H}_s \end{pmatrix} \leq 0,$$

hiszen $\mathbf{g}^{(i)T} \mathbf{H}_{i+1} \leq \mathbf{0}^T$ és $\mathbf{H}_{i+2} \mathbf{H}_{i+3} \cdots \mathbf{H}_s \geq \mathbf{0}$ miatt a mátrix i -edik sorvektora nempozitív komponensű vektor lesz. Ekkor viszont minden $\mathbf{y} \geq \mathbf{0}$ vektorral $\mathbf{x} = \mathbf{H} \mathbf{y}$ -ra teljesül $\mathbf{G} \mathbf{x} = \mathbf{G} \mathbf{H} \mathbf{y} \leq \mathbf{0}$. \square

3.2. MEGJEGYZÉS. a.) Minden \mathbf{g}_i sorvektorhoz olyan \mathbf{H}_i mátrixot konstruálunk, hogy a $\mathbf{g}_i^T \mathbf{H}_i$ sorvektor nemnulla komponensei éppen \mathbf{g}_i negatív komponensei legyenek.

b.) Az algoritmus minden újabb sorvektor bevonásakor tovább tud lépni, hiszen $\mathbf{H}_{i-1} \geq \mathbf{0}$ és \mathbf{g}_i -nek van negatív komponense a feltételek szerint. Így nyilván $\mathbf{g}_i^T \mathbf{H}_{i-1} \leq \mathbf{0}^T$ lesz.

A Farkas-tétel alapján lehet az optimálisan skálázott metrikát kiválasztó algoritmus második fázisát leírni.

Inicializálás: $\mathbf{H}_0, \mathbf{P} := \mathbf{E} \in \mathbb{R}^{p \times p}$, ahol \mathbf{E} a $p \times p$ -es egységmátrix.

i^0 Egyetlen ciklusban sorravezsük a \mathbf{G} sorvektorait. A leírásban az i -edik sorvektort \mathbf{g}_i -vel fogjuk jelölni. Ebből kiszámítjuk $\mathbf{w}_i^T = \mathbf{g}_i^T \mathbf{H}_{i-1}$ -et. Jelölje $\theta(1), \theta(2), \dots, \theta(r)$ a $\mathbf{w}_i = (w_{i1}, w_{i2}, \dots, w_{ip})^T$ vektor zérus komponenseinek indexét, $\omega(1), \omega(2), \dots, \omega(k)$ a negatív, $\mu(1), \mu(2), \dots, \mu(l)$ pedig a pozitív komponenseinek indexeit. Ekkor \mathbf{w}_i -komponenseiből előállítjuk a \mathbf{H}_i mátrixot, amelynek $h_{\alpha, \beta}^{(i)}$ komponenseire teljesül, hogy:

$$h_{\alpha, \beta}^{(i)} = \begin{cases} 1 & \text{ha } \begin{cases} (1 \leq \beta \leq r \text{ és } \alpha = \theta(\beta)) \text{ vagy} \\ (r+1 \leq \beta \leq r+k \text{ és } \alpha = \theta(\beta-r)) \end{cases} \\ w_{i\gamma} & \text{ha } \begin{cases} \text{valamely } j = 1, 2, \dots, k\text{-ra:} \\ r+k+1+(j-1) \cdot l \leq \beta \leq r+k+1+j \cdot l \\ \alpha = \omega(j), \gamma = \mu(\beta-r-k) \end{cases} \\ -w_{i\gamma} & \text{ha } \begin{cases} \text{valamely } j = 1, 2, \dots, k\text{-ra:} \\ r+k+1+(j-1) \cdot l \leq \beta \leq r+k+1+j \cdot l \\ \alpha = \mu(\beta-r-k), \gamma = \omega(j) \end{cases} \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Végül: $\mathbf{P} := \mathbf{P} \cdot \mathbf{H}_i$.

ii^0 Minden $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ esetén a $\mathbf{P}\mathbf{x}$ vektor egy optimális skálázó-vektort állít elő. Legyen pl. $\mathbf{A}^* = \mathbf{P} \mathbf{1}$, ahol $\mathbf{1} = (1, 1, \dots, 1)^T$.

4. Metrikák keverése

Ebben a pontban általánosabban foglalkozunk az optimális metrika megválasztásával. Az alaptér most tetszőleges $\mathcal{X} \neq \emptyset$ halmaz lehet. Legyenek d_1, d_2, \dots, d_p különböző metrikák \mathcal{X} -hez. Ezekkel, mint bázismetrikákkal képezzük a

$$\Delta = \left\{ d_{\mathbf{A}}; d_{\mathbf{A}}(x, u) = \sum_{i=1}^p A_i d_i(x, u), \mathbf{A} \geq \mathbf{0} \right\}$$

metrika-halmazt. Feladatunk az, hogy D_m és T_l segítségével olyan $\mathbf{0} \leq \mathbf{A}^* = \mathbf{A}^*(D_m, T_l)$ skálázó vektort megadjunk, amivel $d_{\mathbf{A}^*}$ minimalizálja az

$$\hat{L}_{m,l}(\phi_{\mathbf{A}}) = \frac{1}{l} \sum_{i=1}^l I_{\{\phi_{\mathbf{A}}(x_{m+i}) \neq y_{m+i}\}}$$

hibabecslést. Legyen most

$$\mathbf{t}(x, u) = (d_1(x, u), d_2(x, u), \dots, d_p(x, u))^T$$

a távolságvektor és $z \in M_0$ esetén

$$\mathbf{t}(M_1, z) = \mathbf{t}^*(z) = \left(\min_{u \in M_1} d_1(z, u), \min_{u \in M_1} d_2(z, u), \dots, \min_{u \in M_1} d_p(z, u) \right)^T.$$

Ezekkel minden megismételhető, amit az optimális súlyvektorok előállításáról a 3. és 4. szakaszban elmondtunk. Ezzel a technikával jó metrikákból keverhetünk ki még jobb metrikát. Ugyanis, ha $W_i \subset T_l$ jelöli a teszhalmaz azon részét, melyet a d_i metrikával a legközelebbi társ módszerrel jól osztályozzuk, akkor a $d_{\mathbf{A}^*}$ metrikával a jól osztályozható tesztpontok halmaza $\bigcup_{i=1}^p W_i$ lesz.

Irodalom

- [1] Brown, T. A. and Koplowitz, J., The Weighted Nearest Neighbor Rule for Class Dependent Sample Sizes, *IEEE Transactions on Information Theory* 5 (1979), 617–620.
- [2] Cover, T., Geometrical and Statistical Properties of Systems of Linear Inequalities with Applications in Pattern Recognition, *IEEE Transactions on Electronic Computers*, Vol. 14. (1965), pp. 326–334.
- [3] Cover, T. and Hart, P., Nearest Neighbor Pattern Classification, *IEEE Transactions on Information Theory* 13 (1967), 21–27.
- [4] Devroye, L., On the Inequality of Cover and Hart in Nearest Neighbor Discrimination, *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, Vol. Pami-3., (1981), pp. 75–78.
- [5] Devroye, L., Györfi, L. and Lugosi, G., *A Probabilistic Theory of Pattern Recognition*, Springer-Verlag (New-York, 1996).

- [6] Duda, R. O., Hart, P. and Stork, D. G., *Pattern Classification and Scene Analysis (second edition)*, John Wiley & Sons (New York, 2000), ch. 4.
- [7] Farkas, J., Über die Theorie der einfachen Ungleichungen, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **124** (1902), 1–27.
- [8] Fukunaga, K., *Introduction to Statistical Pattern Recognition*, Academic Press (New York, 1976), ch. 6.
- [9] Short, R. D. and Fukunaga, K., The Optimal Distance Measure for Nearest Neighbor Classification, *IEEE Transactions on Information Theory* **5** (1981), 622–627.
- [10] Stone, C., Consistent Nonparametric Regression, *Annals of Statistics* **8** (1977), 1348–1360.

(Beérkezett: 2002. április 23.)

DR. KETSKEMÉTY LÁSZLÓ
 BUDAPEST MŰSZAKI ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI EGYETEM
 VILLAMOSMÉRNÖKI ÉS INFORMATIKAI KAR
 SZÁMÍTÁSTUDOMÁNYI ÉS INFORMÁCIÓELMÉLETI TANSZÉK
 VILLAMOSMÉRNÖKI ÉS INFORMATIKAI KAR
 1521 BUDAPEST, PF. 91
 E-MAIL: KELA@MATH.BME.HU

EFFECTIVENESS OF NEAREST NEIGHBOR CLASSIFICATION WITH OPTIMAL SCALING

LÁSZLÓ KETSKEMÉTY

In this paper the method of the selection of an optimal scaling vector $\mathbf{A}^* \geq \mathbf{0}$ for the $d_{\mathbf{A}}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \sum_{i=1}^p A_i \rho(x_i, u_i)$ metric function to \mathbb{R}^p is discussed. With this \mathbf{A}^* we can minimize the holdout estimation of the classification error

$$\hat{L}_{m,l}(\phi_{\mathbf{A}}) = \frac{1}{l} \sum_{i=1}^l I_{\{\phi_{\mathbf{A}}(\mathbf{x}_{m+i}) \neq y_{m+i}\}},$$

where

$$D_m = \{(\mathbf{x}_1, y_1), (\mathbf{x}_2, y_2), \dots, (\mathbf{x}_m, y_m)\}$$

denotes the training set, and

$$T_l = \{(\mathbf{x}_{m+1}, y_{m+1}), (\mathbf{x}_{m+2}, y_{m+2}), \dots, (\mathbf{x}_{m+l}, y_{m+l})\}.$$

is the test set. $\phi_{\mathbf{A}}$ is the NN decision function e.g. $\phi_{\mathbf{A}}(\mathbf{z}) = y_j$, when

$$d_{\mathbf{A}}(\mathbf{z}, \mathbf{x}_j) = \min_{k=1, \dots, m} d_{\mathbf{A}}(\mathbf{z}, \mathbf{x}_k).$$

(The problem is discussed when $y_i \in \{0, 1\}$, i.e. when only two classes are considered.) We show that the optimal scaling vector \mathbf{A}^* is a solution of a problem

$$(*) \quad \mathbf{G} \mathbf{x} \leq \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$$

of homogenous linear inequalities system where \mathbf{G} has at least one negative component in every rows. The solution of the general problem (*) was solved by G. Farkas in [1]. The key question is how to produce the matrix \mathbf{G} using sets D_m and T_l . The rows of the matrix \mathbf{G} are

$t(\mathbf{x}, \mathbf{z}) - t(\mathbf{u}, \mathbf{z})$ -formed vectors, where e.g. $t(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = (\rho(x_1, z_1), \rho(x_2, z_2), \dots, \rho(x_p, z_p))^T$ the distance vector of \mathbf{x} and \mathbf{z} . In the upper expression of difference of distance vectors $(\mathbf{x}, 0)$, $(\mathbf{z}, 0)$ and $(\mathbf{u}, 1)$ are applicable elements of the test set T_l . The discussed method is applicable to mix metrics, too. If d_1, d_2, \dots, d_p denotes p different metrics on the same basic space \mathcal{X} then an optimal metric

$d_{\mathbf{A}}(x, u) = \sum_{i=1}^p A_i d_i(x, u)$ can be mixed with which classifying the points in T_l the error $\hat{L}_{m,l}$

will become minimal. We prove that $P\left(L(\phi_{\mathbf{A}^*}) - \inf_{\phi \in C_m} L(\phi) > \varepsilon \mid D_m\right) \leq 4e^8 (l^2 \binom{m}{2})^p e^{-\frac{\varepsilon^2}{2}}$

for every $\varepsilon > 0$, where C_m is the class of the NN decision functions, $\phi_{\mathbf{A}^*} \in C_m$ denotes the chosen optimal NN decision function, $L(\phi) = P(\phi(X) \neq Y)$ is the error probability. This shows the effectiveness of the method.

NEMPARAMÉTERES FÜGGVÉNYBECSLÉSEK

ANTOS ANDRÁS ÉS PINTÉR MÁRTA

Budapest

1. Bevezetés

A matematikai statisztika alapvető célja valószínűségi törvények vagy azok jellemzőinek megtanulása adatokból. A klasszikus matematikai statisztika jobbára paraméteres szabályokból áll, amelyek arra az esetre vonatkoznak, amikor a statisztikusnak van valamilyen előzetes ismerete az aktuális problémáról, és így feltelezni tudja, hogy az ismeretlen valószínűségi törvény az eloszlások valamely paraméteres osztályához tartozik.

A nemparaméteres statisztika esetében nem áll rendelkezésre ilyen információ, ezért a szabályok konstruálása nem használhatja a törvény egyetlen speciális jellemzőjét sem, és a szabály alapvető tulajdonságainak eloszlásfüggetlennek kell lenniük.

Általános modellünk a következő: Legyen X egy vektor valószínűségi változó, melynek eloszlása ismeretlen. Szeretnénk megbecsülni X eloszlásának egy P jellemzőjét, amelynek értéke lehet egy függvény vagy akár maga az eloszlás. A becslés jóságát egy nemnegatív $l(\cdot, \cdot)$ veszteségfüggvény méri (pl. a függvények L_1 vagy L_2 -beli távolsága). Inputként adottak az X_1, \dots, X_n független minták. A becslést jelölje P_n , amely a minták minden egyes realizációjához P egy lehetséges becslését rendeli. Az $l(P_n, P)$ nullához való konvergenciáját vizsgáljuk.

Egy P_n becslés *gyengén konzisztens egy eloszlásra*, ha

$$l(P_n, P) \rightarrow 0 \quad \text{sztochasztikusan.}$$

Egy P_n becslés *gyengén konzisztens a \mathcal{D} eloszlásosztályon*, ha gyengén konzisztens minden \mathcal{D} -beli eloszlásra, és *gyengén univerzálisan konzisztens*, ha gyengén konzisztens X minden lehetséges eloszlására.

Egy P_n becslés erősen konzisztens egy eloszlásra, ha

$$l(P_n, P) \rightarrow 0 \quad 1 \text{ valószínűséggel,}$$

és a fentihez hasonlóan definiáljuk az erős konzisztenciát egy \mathcal{D} eloszlásosztályon és az erős univerzális konzisztenciát.

Gyakran, habár az eloszlást nem ismerjük, mégis van valamilyen előzetes ismeretünk X eloszlásáról az X_1, \dots, X_n adatokon kívül. Paraméteres esetben feltételezzük, hogy az eloszlás egy paraméterezett osztály tagja. Nemparaméteres esetben az ismeretünk vonatkozhat a sűrűségfüggvényre, pl. bizonyos esetekben tudhatjuk, hogy az „sima”, vagy regresszióbecslésnél a regressziófüggvényről lehet előzetes információnk, pl. hogy az monoton, vagy egy halmaz indikátora. Általánosságban tehát ilyenkor feltételezhetjük, hogy az eloszlás benne van egy \mathcal{D} eloszlásosztályban. Az ilyen esetben, konzisztens becslések által elérhető legjobb konvergenciasebességet ragadják meg a következő definíciók:

Egy a_n pozitív sorozatot a \mathcal{D} eloszlásosztályra nézve minimax alsó konvergenciasebességnek nevezünk, ha

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \inf_{P_n} \sup_{X \in \mathcal{D}} \frac{\mathbf{El}(P_n, P)}{a_n} > 0,$$

ahol az infimum az összes becslés, míg a szuprénum az összes \mathcal{D} -beli eloszlás fölött értendő.

Az a_n sorozat éles minimax konvergenciasebesség \mathcal{D} -re nézve, ha van olyan P_n becslés, hogy

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{X \in \mathcal{D}} \frac{\mathbf{El}(P_n, P)}{a_n} < \infty$$

és minimax alsó konvergenciasebesség \mathcal{D} -re nézve. Tehát ha létezik olyan becslő, aminek a hibája egyenletesen minden osztálybeli eloszlás esetén legalább úgy konvergál, mint a_n , de nem létezik olyan, amely ennél gyorsabban konvergálna.

Egy a_n pozitív sorozatot a \mathcal{D} eloszlásosztályra nézve individuális alsó konvergenciasebességnek nevezünk, ha

$$\inf_{\{P_n\}} \sup_{X \in \mathcal{D}} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{El}(P_n, P)}{a_n} > 0,$$

ahol az infimum az összes becsléssorozat, míg a szuprénum az összes \mathcal{D} -beli eloszlás fölött értendő.

Az a_n sorozat éles individuális konvergenciasebesség \mathcal{D} -re nézve, ha van olyan P_n becsléssorozat, hogy

$$\sup_{X \in \mathcal{D}} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{El}(P_n, P)}{a_n} < \infty$$

és minden $a'_n = o(a_n)$ sorozat individuális alsó konvergenciasebesség \mathcal{D} -re nézve.

A paraméteres statisztikában \mathcal{D} egy paraméterezett eloszláscsalád, és P a paraméter. Viszonylag enyhe és a gyakorlatban egyszerűen ellenőrizhető feltételek esetén megkonstruálható egy P_n becslés (többnyire a maximum likelihood becslés) úgy, hogy egyrészt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = P \quad 1 \text{ valószínűséggel}$$

minden P -re, azaz a becslés erősen konzisztens \mathcal{D} -n, másrészt az $\mathbf{E}\{|P_n - P|\}$ -re az $a_n = n^{-1/2}$ egy éles minimax és individuális konvergenciasebesség.

Nemparaméteres esetben a helyzet nem marad ilyen szép és egyszerű. Egyrészt – míg általában létezik erősen univerzálisan konzisztens becslés –, gazdag eloszláscsaládokra nem garantálható konvergenciasebesség, azaz bármely becsléssorozat konvergenciasebessége tetszőlegesen lassú lehet egyes eloszlásokra. Ez azt jelenti, hogy tetszőleges nullához tartó b_n sorozathoz és P_n becsléssorozathoz létezik egy eloszlás úgy, hogy

$$\mathbf{El}(P_n, P) \geq b_n$$

végtelen sokszor. Másrészt ilyenkor már a minimax konvergenciasebesség is jóval bonyolultabb alakú lehet, továbbá a minimax és az individuális konvergenciasebesség különböző lehet. Míg a minimax konvergenciasebesség minden n -re megadja az osztályban az (n -nel esetleg változó) legrosszabb esetre vonatkozó hibát, addig az individuális konvergenciasebesség az egyes fix eloszlásokra vonatkozó tényleges konvergenciasebességek közül adja meg a leglassabbat.

Cikkünk 2. fejezetében összefoglalunk az eloszlás- és sűrűségbecsléssel kapcsolatos konzisztencia- és konvergenciasebesség-eredményeket. A 3. fejezetben a regressziófüggvény becslésével, a 4.-ben pedig az alakfelismeréssel kapcsolatos – részben saját – eredményeket mutatjuk be.

2. Eloszlás- és sűrűségfüggvénybecslés

Az első példánk egy $F(x)$ eloszlásfüggvény becslésének feladata független, azonos eloszlású X_1, X_2, \dots, X_n mintákból, melyek \mathcal{R}^d -n veszik fel az értékeiket ($d \geq 1$). Azaz az eloszlás becslendő jellemzője F , és a veszteségfüggvény az $l(F_n, F) = \sup_{x \in \mathcal{R}^d} |F_n(x) - F(x)|$ szuprénum norma. Itt az $F_n(x)$ empirikus eloszlásfüggvény konstruálásának a módja egyrészt eloszlásfüggetlen, másrészt $F_n(x)$ egyenletes konvergenciája, a Glivenko–Cantelli-tétel teljesül minden $F(x)$ -re:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathcal{R}^d} |F_n(x) - F(x)| = 0 \quad 1 \text{ valószínűséggel,}$$

sőt alkalmas c konstansra

$$\mathbf{El}(F_n, F) \leq c \sqrt{\frac{d}{n}},$$

minden $F(x)$ -re, azaz $n^{-1/2}$ (minimax) konvergenciasebesség. A Glivenko–Cantelli-tétel valóban eloszlásfüggetlen, és a Kolmogorov–Szmirnov-távolságban való konvergencia egyenletes konvergenciát jelent, tehát úgy tűnik, hogy nincs is értelme ezzel tovább foglalkozni. Azonban, ha valaki például egy osztályozási problémánál (ld. 4. fejezet) két ismeretlen, folytonos eloszlásfüggvény empirikus eloszlásfüggvényeit akarja használni egyfajta „likelihood” teszt létrehozására, akkor ezek a becslések használhatatlannak bizonyulnak. Az derül ki, hogy erősebb hibakritériumot kell keresnünk.

Ebből a célból nyilvánvalóan érdemes megvizsgálni veszteségfüggvényként a totális variációt: ha μ és ν két valószínűségi mérték \mathcal{R}^d -n, akkor μ és ν totális variációja,

$$l(\mu, \nu) = V(\mu, \nu) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_A |\mu(A) - \nu(A)|,$$

ahol a szupremumot az összes A Borel-halmaz felett vesszük.

Azonban, ha μ jelöli az $\{X_i\}$ -k közös eloszlását és μ_n az empirikus eloszlást, akkor nematomos μ -re

$$V(\mu, \mu_n) = 1,$$

tehát az empirikus eloszlás totális variációban egy rossz eloszlásbecslés.

Esetleg azt vélhetnénk, hogy lehet találni kifinomultabb eloszlásbecslőknek egy olyan μ_n^* sorozatát, amely erősen univerzálisan konzisztens totális variációban, azaz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} V(\mu, \mu_n^*) = 0 \quad 1 \text{ valószínűséggel.}$$

Az alábbi eredmény szerint ez sem lehetséges.

2.1. TÉTEL (Devroye és Györfi [25]). *Eloszlásbecslők bármely μ_n^* sorozatához létezik olyan μ eloszlás, amelyre*

$$V(\mu, \mu_n^*) > 0.5 \quad \text{minden } n\text{-re } 1 \text{ valószínűséggel.}$$

Ennek a negatív eredménynek az az oka, hogy a totális variáció sokkal erősebb hibakritérium, mint a Kolmogorov–Szmirnov-távolság: nem lehet olyan eloszlásbecslőt konstruálni, amely totális variációban eloszlásfüggetlenül konzisztens. Ahhoz, hogy konzisztencia eredményeket kapjunk, vagy a halmazosztályt, amely felett a szupremumot vesszük $l(\cdot, \cdot)$ definíciójában, vagy a megengedett eloszlások osztályát le kell szűkítenünk.

Ha a halmazosztály valahol az eddig vizsgált két extrém eset (csak a „negyedek” illetve minden Borel halmaz \mathcal{R}^d -ben) között van, akkor a nevezetes Vapnik–Chervonenkis-elmélet azt adja, hogy ún. Vapnik–Chervonenkis-osztályokra (ld. 3.1. definíció) a helyzet ugyanaz, mint a Kolmogorov–Szmirnov-távolság esetén: erős univerzális konzisztencia és $n^{-1/2}$ (minimax) konvergenciasebesség.

Szűkítsük most a megengedett eloszlások osztályát. Ha μ és ν abszolút folytonos eloszlások egy σ -véges λ mértékre nézve és sűrűségfüggvényük f illetve g , akkor a Scheffé-tétel miatt

$$\|f - g\| := \int_{\mathcal{R}^d} |f(x) - g(x)| \lambda(dx) = 2 V(\mu, \nu).$$

Ez az összefüggés az L_1 -ben konzisztens sűrűségfüggvény-becslésen keresztül egy olyan eloszlásbecsléshez vezet, amely konzisztens totális variációban: tegyük fel, hogy f_n L_1 -ben (erősen) univerzálisan konzisztens, azaz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\| = 0 \quad 1 \text{ valószínűséggel.}$$

Vezessük be az f_n sűrűségbecslő segítségével definiált eloszlásbecslőt:

$$\mu_n^*(A) = \int_A f_n(x) \lambda(dx),$$

ekkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} V(\mu, \mu_n^*) = 0 \quad 1 \text{ valószínűséggel.}$$

Ha λ a Lebesgue-mérték, akkor L_1 -ben konzisztens sűrűségbecslésre standard példa a hisztogram és a magfüggvényes becslés (Devroye [19] és Devroye, Györfi [24]).

Legyen \mathcal{P}_n az \mathcal{R}^d -nek egy partíciója pozitív és véges Lebesgue-mértékű $\{A_{n,j}\}$ cellákkal. Ekkor a *hisztogram becslő* a következő:

$$f_n(x) = \frac{\mu_n(A_{n,j}(x))}{\lambda(A_{n,j}(x))},$$

ahol $A_n(x) = A_{n,j}$, ha $x \in A_{n,j}$.

2.2. TÉTEL. *Tegyük fel, hogy μ -nek létezik f sűrűségfüggvénye. Ha a hisztogramnál minden origó középpontú S gömbre*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{j: A_{n,j} \cap S \neq \emptyset} \text{diam}(A_{n,j}) = 0$$

és

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\#\{j: A_{n,j} \cap S \neq \emptyset\}}{n} = 0,$$

akkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\| = 0 \quad 1 \text{ valószínűséggel.}$$

Ha a cellák d -dimenziós kockák h_n oldalhosszúsággal, akkor a tétel feltételei azt jelentik, hogy $h_n \rightarrow 0$ és $nh_n^d \rightarrow \infty$.

A *magfüggvényes becslő*t a nemnegatív, mérhető $K(x)$ magfüggvény és a pozitív h_n sorozat határozza meg:

$$f_n(x) = \frac{1}{nh_n^d} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{x - X_i}{h_n}\right).$$

2.3. TÉTEL. Tegyük fel, hogy μ -nek létezik f sűrűségfüggvénye. Ha a magfüggvényes becslésnél

$$\int_{\mathcal{R}^d} K(x) \lambda(dx) = 1$$

és

$$(1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} h_n = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} nh_n^d = \infty,$$

akkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\| = 0 \quad 1 \text{ valószínűséggel.}$$

A 2.2. és 2.3. tételből a várhatóértékben való konzisztencia,

$$\mathbf{E}\{\|f(X) - f_n(X)\|\} \rightarrow 0$$

is következik. E tételek szépségét az adja, hogy az L_1 -ben való konzisztencia elérhető anélkül, hogy bármit feltennénk az f sűrűségfüggvényről, és így totális variációban konzisztens eloszlásbecslőt kaphatunk, ha μ abszolút folytonos a Lebesgue-mértékre nézve. A hisztogram becslők kiterjeszthetők olyan eloszlásbecslőkké, amelyek konzisztensek totális variációban, ha a μ nematomos része abszolút folytonos egy ismert σ -véges λ mértékre nézve (Barron, Györfi és van der Meulen [9]).

A paraméteres statisztikában a konzisztencia tisztázása után az a legfontosabb kérdés, hogy adott pontossághoz mekkora mintanagyság kell, azaz mi az illető becslés konvergenciasebessége. Ezért sűrűségfüggvénybecslés esetén is természetesen kérhetne valaki konvergenciasebességre vonatkozó eredményeket, de erre megint csak negatív válasz adható, mivel sűrűségbecslők minden f_n sorozatára a várható L_1 -hiba, $\mathbf{E}\{\|f - f_n\|\}$ konvergenciasebessége tetszőlegesen lassú lehet.

Sőt, egy ismert tartóhalmazú végtelen diszkrét eloszlást sem lehet totális variációban garantált konvergenciasebességgel becsülni:

2.4. TÉTEL (Devroye, Györfi és Lugosi [27]). Legyen μ egy valószínűségi mérték a pozitív egészek halmazán. Pozitív számok minden 0-hoz tartó $b_n \leq 1/16$ sorozatához és eloszlásbecslők minden μ_n^* sorozatához létezik μ valószínűségi mérték úgy, hogy

$$\mathbf{E}V(\mu_n^*, \mu) \geq b_n \quad \text{minden } n\text{-re.}$$

Ez azt jelenti, hogy minden 0-hoz tartó sorozat individuális alsó konvergenciasebesség a pozitív egészen való eloszlások osztályára nézve. A tételből levezethető a következő negatív eredmény sűrűségbecslőkre:

2.5. TÉTEL (Birgé [13], Devroye [20, 22]). Sűrűségbecslők minden f_n sorozatához és pozitív számok minden 0-hoz tartó $b_n \leq 1/32$ sorozatához létezik $f : [0, 1] \mapsto [0, 2]$ sűrűségfüggvény úgy, hogy

$$\mathbf{E}\{\|f - f_n\|\} \geq b_n \quad \text{minden } n\text{-re.}$$

Ez azt jelenti, hogy minden 0-hoz tartó sorozat individuális alsó konvergenciasebesség a $[0, 1] \mapsto [0, 2]$ sűrűségfüggvények osztályára nézve. Könnyű belátni, hogy a lassú konvergencia eredmény akkor is igaz az abszolút folytonos eloszlások \mathcal{D} osztályára nézve (totális variáció veszteségfüggvénnyel), ha bármilyen eloszlásbecslést megengedünk (nem csak abszolút folytonosakat), azaz minden 0-hoz tartó sorozat individuális alsó konvergenciasebesség \mathcal{D} -re nézve.

Ezek szerint van L_1 -ben konzisztens sűrűségbecslő, de konvergenciasebességet nem lehet garantálni, hacsak nem teszünk fel néhány dolgot az ismeretlen f sűrűségfüggvényről. Ilyen feltételek megfogalmazhatóak például a metrikus entrópia segítségével:

2.1. Definíció. Egy $\mathcal{M}(d)$ metrikus térre legyen az $N(\varepsilon, \mathcal{M})$ ε -lefedési szám az \mathcal{M} legkisebb olyan A részhalmazának a számossága, amelyre minden $x \in \mathcal{M}$ -hez létezik egy $y \in A$ úgy, hogy $d(x, y) < \varepsilon$. Legyen $\log N(\varepsilon, \mathcal{M})$ az \mathcal{M} -nek az ε -metrikus entrópiája.

Sűrűségfüggvények egy osztálya metrikus tér a $d(f, g) = \sup_{x \in \mathcal{R}^d} |f(x) - g(x)|$ távolsággal. Erre vonatkozik az alábbi eredmény:

2.6. TÉTEL (Birgé [13]). Ha \mathcal{D}^δ olyan sűrűségfüggvény osztály, amelynek ε -metrikus entrópiája $O(\varepsilon^{-\delta})$ amint $\varepsilon \rightarrow 0$, akkor alkalmas sűrűségfüggvény-becslővel elérhető a

$$n^{-\frac{1}{2+\delta}}$$

(minimax) konvergenciasebesség \mathcal{D}^δ -ra.

Az ε -metrikus entrópiája jól ismert pl. a következő ún. „sima” függvényosztályoknak:

2.2. Definíció. Adott $k \in \mathcal{N}_0$ -ra (ahol $\mathcal{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$), $0 < \beta \leq 1$ -re, $p = k + \beta$ -ra és $M > 0$ -ra, legyen $\mathcal{F}^{(p, M)}$ azon $f : \mathcal{R}^d \rightarrow \mathcal{R}$ függvények osztálya, amelyekre minden $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ vektorra, ahol $\alpha_i \in \mathcal{N}_0$, $\sum_{j=1}^d \alpha_j = k$

$$|D^\alpha f(x) - D^\alpha f(z)| < M \|x - z\|^\beta,$$

ahol D^α az α -hoz tartozó parciális deriváltat jelöli.

Jelölje $\mathcal{F}^{(p, M)}|_C$ az $\mathcal{F}^{(p, M)}$ -nek a megszorítását a $C \subset \mathcal{R}^d$ halmazra koncentráló sűrűségfüggvényekre.

Bármely belső ponttal rendelkező konvex kompakt $C \subset \mathcal{R}^d$ esetén $\mathcal{F}^{(p, M)}|_C$ -nek az ε -metrikus entrópiája $O(\varepsilon^{-d/p})$ nagyságrendű, és $\mathcal{F}^{(p, M)}|_C$ -re az $n^{-\frac{p}{2p+d}}$ éles minimax konvergenciasebesség (lásd pl. [13]). Birgé a következő erősebb állítást is bizonyította:

2.7. TÉTEL (Birgé [13]). *Bármely belső ponttal rendelkező $C \subset \mathcal{R}^d$ esetén $\mathcal{F}^{(p,M)}|_C$ -re és minden 0-hoz tartó b_n sorozatra*

$$b_n n^{-\frac{\nu}{2p+d}}$$

individuális alsó konvergenciasebesség.

Ez a tétel motiválta a 3. és 4. fejezetben található, regresszióbecslésre illetve alakfelismerésre vonatkozó hasonló eredményeket.

A várható L_1 -hibával szemben az L_1 -hiba véletlen része

$$\|f - f_n\| - \mathbf{E}\{\|f - f_n\|\}$$

$n^{-1/2}$ nagyságrendű, tehát az L_1 -hiba véletlen részének konvergenciája sokkal gyorsabb lehet, mint a várható L_1 -hibáé:

2.8. TÉTEL (Devroye [21]). *A hisztogram vagy a magfüggvényes sűrűségbecslőkre*

$$\mathbf{P}\left\{\left|\|f - f_n\| - \mathbf{E}\{\|f - f_n\|\}\right| > \varepsilon\right\} \leq 2e^{-n\varepsilon^2/2}.$$

Bizonyos feltételek mellett Berlinet, Devroye és Györfi [12] és Beirlant és Györfi [10] bebizonyította az L_1 -hiba $n^{-1/2}$ nagyságrendű aszimptotikus normalitását, és kiszámolta az aszimptotikus szórást.

Eloszlásbecsléshez más hibakritériumot is tekinthetünk. Ilyen hibakritériumokat vezetett be Csiszár [17], amelyeket f -divergenciáknak hívunk (lásd még Liese, Vajda [43] és Vajda [53]). A három legfontosabb f -divergencia a matematikai statisztikában a totális variáció, az információs divergencia és a χ^2 -divergencia.

Ha μ és ν valószínűségi mértékek \mathcal{R}^d -n, akkor μ és ν információs divergenciája (vagy I-divergencia, relatív entrópia, Kullback-Leibler-mérőszám)

$$I(\mu, \nu) = I(\mu, \nu) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\{A_j\}} \sum_j \mu(A_j) \log \frac{\mu(A_j)}{\nu(A_j)},$$

ahol a szuprémumot az összes véges Borel-mérhető $\{A_j\}$ partíció felett vesszük.

Az alábbi egyenlőtlenség, melyet Pinsker-egyenlőtlenségnek is neveznek, felső korlátot ad a totális variációra az I-divergencia függvényében (cf. [17], Kemperman [39] és Kullback [41]):

$$(2) \quad 2\{V(\mu, \nu)\}^2 \leq I(\mu, \nu).$$

Ha μ és ν abszolút folytonosak egy σ -véges λ mértékre nézve f illetve g sűrűségfüggvénnyel, akkor μ és ν I-divergenciája az f és g sűrűségfüggvényekkel is kiszámítható:

$$I(\mu, \nu) = \int_{\mathcal{R}^d} f(x) \log \frac{f(x)}{g(x)} \lambda(dx) \stackrel{\text{def}}{=} D(f, g).$$

Mostanában elég nagy az érdeklődés az $I(\mu, \nu)$ I-divergencia és a $D(f, g)$ divergencia iránt abban az esetben, amikor ν illetve g empirikus. Ha

$$\mu_n^* = \mu_n^*(\cdot; X_1, \dots, X_n)$$

a μ eloszlás becslése, akkor μ_n^* információs divergenciában erősen konzisztens, ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I(\mu, \mu_n^*) = 0 \quad 1 \text{ valószínűséggel.}$$

Analóg módon f_n erősen konzisztens információs divergenciában, ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D(f, f_n) = 0 \quad 1 \text{ valószínűséggel.}$$

A (2) Pinsker-egyenlőtlenség alapján az információs divergencia dominálja a totális variációt, tehát az 2.1. tétel miatt igaz, hogy eloszlásbecslők bármely μ_n^* sorozatához létezik μ valószínűségi mérték, amelyre a μ_n^* sorozat nem konzisztens információs divergenciában. A helyzet még rosszabb: ismert tartóhalmazú diszkrét eloszlást sem lehet információs divergenciában konzisztensen becsülni:

2.9. TÉTEL (Györfi, Páli és van der Meulen [35]). *Legyen μ valószínűségi mérték a pozitív egészekben. Eloszlásbecslők bármely μ_n^* sorozatához létezik véges $H(\mu) = -\sum_{i=1}^{\infty} \mu(\{i\}) \log \mu(\{i\})$ Shannon-entrópiájú μ valószínűségi mérték, amelyre*

$$I(\mu, \mu_n^*) = \infty \quad \text{minden } n\text{-re } 1 \text{ valószínűséggel.}$$

Ebből a tételből következik egy negatív eredmény a sűrűségbecslésre is:

2.10. TÉTEL (Györfi és van der Meulen [36]). *Sűrűségbecslők minden f_n sorozatához létezik véges $H(f) = -\int f(x) \log f(x) dx$ differenciális entrópiájú és tetszőlegesen sokszor deriválható f sűrűségfüggvény úgy, hogy*

$$D(f, f_n) = \infty \quad \text{minden } n\text{-re } 1 \text{ valószínűséggel.}$$

Barron [7] foglalkozott elsőként sűrűségfüggvény becslésével úgy, hogy a becslő I-divergenciában konzisztens. Eredményeit [9] általánosította. Megmutatták, hogy ha felteszünk bizonyos feltételeket arról az eloszlásosztályról, amelyből az ismeretlen eloszlás származik, nevezetesen azt, hogy létezik ismert ν valószínűségi mérték, amelyre $I(\mu, \nu) < \infty$, akkor tudunk konstruálni olyan eloszlásbecslőt, amely az osztály valamennyi eloszlására konzisztens információs divergenciában. Mint jól ismert, az $I(\mu, \nu) < \infty$ feltételből következik, hogy μ abszolút folytonos ν -re nézve, tehát érdemes olyan eloszlásbecslést készíteni, amelynek ν szerint van sűrűségfüggvénye. Vezessük be a következő jelölést

$$f(x) = \frac{d\mu}{d\nu}(x),$$

és egy $\mathcal{P}_n = \{A_{n,1}, A_{n,2}, \dots, A_{n,m_n}\}$, $0 < m_n < n$, $n \geq 2$ partícióra, legyen

$$\nu(A_{n,i}) = h_n = 1/m_n.$$

Adott a_n , $0 < a_n < 1$ sorozatra tegyük fel, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

Tekintsük a következő sűrűségbecslést:

$$f_n(x) = (1 - a_n)\mu_n(A_n(x))/h_n + a_n,$$

ahol μ_n az empirikus mérték. Ebből

$$a_n = \frac{1}{nh_n + 1}$$

választással a [7] által bevezetett sűrűségbecslőt kapjuk.

2.11. TÉTEL (Barron, Györfi és van der Meulen [9]). Ha $I(\mu, \nu) < \infty$ és

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h_n = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} nh_n = \infty,$$

és

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{nh_n a_n} \leq 1,$$

akkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D(f, f_n) = 0 \quad 1 \text{ valószínűséggel.}$$

3. Regresszióbecslés

Legyen Y valós értékű valószínűségi változó és legyen X d -dimenziós véletlen vektor (megfigyelés). X koordinátái különböző eloszlásúak lehetnek, lehet némelyik diszkrét (például bináris), mások lehetnek abszolút folytonosak. Így nem teszünk fel semmit X eloszlásáról. A regresszióanalízis célja Y becslése, ha X adott, azaz olyan z valós függvényt keresünk, amely X értékészletén van definiálva, és amelyre $z(X)$ „közel” van Y -hoz. Tegyük fel, hogy az analízis fő célja a négyzetes középhiba minimalizálása:

$$\min_z \mathbf{E}\{(z(X) - Y)^2\}.$$

Jól ismert, hogy a minimumot ($\mathbf{E}\{Y^2\} < \infty$ -re) az

$$m(x) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{E}\{Y \mid X = x\}$$

regressziófüggvény éri el, ugyanis minden z mérhető függvényre

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\{(z(X) - Y)^2\} &= \mathbf{E}\{(m(X) - Y)^2\} + \mathbf{E}\{(m(X) - z(X))^2\} \\ &= \mathbf{E}\{(m(X) - Y)^2\} + \int_{\mathcal{R}^d} |m(x) - z(x)|^2 \mu(dx), \end{aligned}$$

ahol μ az X eloszlását jelöli. A jobb oldal második tagját a z függvény integrált négyzetes hibájának nevezzük és $J(z)$ -vel jelöljük:

$$J(z) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathcal{R}^d} |m(x) - z(x)|^2 \mu(dx).$$

A négyzetes középhiba nyilván pontosan akkor lesz közel a minimumhoz, ha $J(z)$ közel van a 0-hoz. A sűrűségbecsléssel szemben, ahol az L_1 -hiba volt a legalkalmasabb hibakritérium, itt az L_2 -hiba a legfontosabb. Ráadásul a sűrűségbecslésnél az L_1 -teret a Lebesgue-mértékkel definiáltuk, míg a regresszióbecslésnél az L_2 -teret μ -vel definiáljuk.

A regresszióbecslés feladatánál adottak a $D_n = \{(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)\}$ független, azonos eloszlású példányai (X, Y) -nak. Ezek felhasználásával $m(x)$ -nek olyan

$$m_n(x) = m_n(x, D_n) : \mathcal{R}^d \times (\mathcal{R}^d \times \mathcal{R})^n \mapsto \mathcal{R}$$

becslését szeretnénk megkonstruálni, amelyre $J(m_n)$ kicsi, azaz az m_n regressziófüggvény becslés m -hez való $L_2(\mu)$ -konvergenciáját vizsgáljuk. Tehát most az X szerepét az (X, Y) pár játssza, P -nek m felel meg, a veszteségfüggvény pedig az $l(m_n, m) \stackrel{\text{def}}{=} J(m_n)$ négyzetes $L_2(\mu)$ -hiba.

Stone [51] mutatott rá először, hogy léteznek gyengén univerzálisan konzisztens becslők, ilyenek például a legközelebbi szomszéd becslők. Következő alakú becslőket vizsgált:

$$m_n(x) = \sum_{i=1}^n W_{ni}(x; X_1, \dots, X_n) Y_i.$$

Ezek a becslők lokális átlagoló típusúak, mivel a W_{ni} súlyok jellegzetesen nemnegatívak, összegük 1, továbbá W_{ni} „nagy”, ha x és X_i „közel” van egymáshoz, egyébként W_{ni} „kicsi” (Györfi, Kohler, Krzyżak és Walk [33]).

A k -legközelebbi szomszéd becslő esetében, $W_{ni}(x; X_1, \dots, X_n) = 1/k$, ha X_i az x k legközelebbi szomszédjának egyike X_1, \dots, X_n közül, különben W_{ni} nulla. Vegyük észre, hogy ekkor $\sum_{i=1}^n W_{ni} = 1$.

3.1. TÉTEL (Stone [51]). *Ha*

$$k_n \rightarrow \infty, \quad k_n/n \rightarrow 0$$

akkor a k_n -legközelebbi szomszéd becslő gyengén univerzálisan konzisztens.

3.2. TÉTEL (Devroye, Györfi, Krzyżak és Lugosi [26]). *Ha*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} k_n / \log n = \infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} k_n / n = 0$$

akkor a k_n -legközelebbi szomszéd becslő erősen univerzálisan konzisztens.

A hisztogram vagy partíciós becslő \mathcal{R}^d egy $\mathcal{P}_n = \{A_{n,1}, A_{n,2} \dots\}$ partíciója esetén az

$$m_n(x) = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i K_n(x, X_i)}{\sum_{i=1}^n K_n(x, X_i)}$$

függvény, ahol $K_n(x, u) = \sum_{j=1}^{\infty} I_{[x \in A_{n,j}, u \in A_{n,j}]}$ (I_A az A esemény indikátorfüggvényét jelöli), vagyis cellánként átlagoljuk az odaeső minták Y_i -értékeit. Gyenge és erős univerzális konzisztenciára vonatkozó eredményeket bizonyított Devroye, Györfi [23] és Györfi [32]-ben.

A regressziófüggvényt az

$$m_n(x) = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i K\left(\frac{x - X_i}{h_n}\right)}{\sum_{i=1}^n K\left(\frac{x - X_i}{h_n}\right)},$$

magfüggvényes becslővel is lehet becsülni ahol $h_n > 0$ egy n -től függő simító tényező, K egy abszolút integrálható függvény (a magfüggvény). Konzisztenciájához hasonló feltételekre van szükség, mint a magfüggvényes sűrűségbecslő esetében.

3.3. TÉTEL (Devroye és Wagner [30], Spiegelman és Sacks [50]). *Ha (1) teljesül és K egy kompakt tartójú, korlátos, nemnegatív függvény úgy, hogy rögzített origó körüli S gömbre $\inf_{x \in S} K(x) > 0$, akkor a magfüggvényes becslés gyengén univerzálisan konzisztens.*

A magfüggvényes becslés erősen konzisztens, ha Y egyenletesen korlátos, (1) teljesül, K Riemann-integrálható és $K \geq aI_S$, ahol $a > 0$ egy konstans és S egy origó körüli, pozitív sugarú gömb (Devroye és Krzyżak [28]). A magfüggvényes regresszióbecslő erős univerzális konzisztenciáját Györfi, Kohler és Walk [34] és Walk [58] bizonyította.

Sajnos robusztus eloszlásosztály esetén a lassú konvergencia (az alakfelismerésre vonatkozó 4.1. tétel és (3) következményeképpen) itt is fennáll:

3.4. TÉTEL (Devroye [18], Györfi, Kohler, Krzyżak és Walk [33]). *Regresszióbecslők minden m_n sorozatához, és pozitív számok minden monoton, 0-hoz tartó $1/64 \geq b_1 \geq b_2 \geq \dots$ sorozatához létezik (X, Y) -nak olyan eloszlása, amelyre X egyenletes eloszlású $[0, 1]$ -en, $Y = m(X)$ és*

$$EJ(m_n) \geq b_n \quad \text{minden } n\text{-re.}$$

Az eddig ismertetett regresszióbecslési módszerek a lokális átlagolás elvén alapultak. Létezik egy másik, hasonlóan természetes alapelv, az empirikus hibaminimalizálás, amely szintén elvezethet univerzálisan konzisztens becslésekhez. Választunk egy \mathcal{F}_n függvényosztályt, és a regresszióbecslés ebből az osztályból veszi az értékeit. Az \mathcal{F}_n kiválasztásakor vagy az m regressziófüggvényről szerzett ismereteinket vesszük figyelembe, vagy \mathcal{F}_n olyan függvényekből áll, amelyek számítógéppel bizonyos számítási bonyolultsággal realizálhatók.

Korábban már láttuk, hogy az m regressziófüggvény minimalizálja az L_2 -hibát,

$$\mathbf{E}\{(m(X) - Y)^2\} = \inf_f \mathbf{E}\{(f(X) - Y)^2\},$$

tehát mondhatná valaki, hogy minimalizáljuk $\mathbf{E}\{(f(X) - Y)^2\}$ -t az \mathcal{F}_n osztályon. Ez azonban nyilvánvalóan lehetetlen, mert a minimalizálandó függvény függ (X, Y) ismeretlen eloszlásától.

Az *empirikus hibaminimalizálás* alapötlete, hogy becsüljük az L_2 -hibát az

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n |f(X_j) - Y_j|^2$$

empirikus L_2 -hibával, és azt a függvényt válasszuk ki \mathcal{F}_n -ből, amelynek az empirikus hibája minimális.

Az ily módon választott m_n függvénynek a regressziófüggvénytől vett négyzetes távolságára teljesül, hogy

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{R}^d} |m_n(x) - m(x)|^2 \mu(dx) &\leq \\ &\leq 2 \sup_{f \in \mathcal{F}_n} \left| \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n |f(X_j) - Y_j|^2 - \mathbf{E}\{(f(X) - Y)^2\} \right| + \\ &\quad + \inf_{f \in \mathcal{F}_n} \int_{\mathcal{R}^d} |f(x) - m(x)|^2 \mu(dx). \end{aligned}$$

A jobboldalon szereplő első tag a becslési hiba, a második az approximációs hiba. A becslési hiba azt méri, hogy a becslő L_2 -hibája mennyivel tér el az osztálybeli legjobb függvény L_2 -hibájától, az approximációs hiba pedig azt, hogy mennyire jól lehet a regressziófüggvényt \mathcal{F}_n -beli függvényekkel közelíteni L_2 értelemben. Ahhoz, hogy univerzálisan konzisztens becslőt kapjunk, azt kell megmutatni, hogy mindkét tag nullához tart (X, Y) minden olyan eloszlására, amelyre $\mathbf{E}\{Y^2\} < \infty$.

Válasszuk az \mathcal{F}_n osztályt úgy, hogy minden \mathcal{F}_n -beli függvény abszolút értéke korlátos legyen, és a közös β_n korlát tartson végtelenhez. Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy Y korlátos, azaz $|Y| \leq L$ egy valószínűséggel. A konzisztenciára vonatkozó eredmények kiterjeszthetők nemkorlátos Y -ra is ([33]). A becslési hiba konvergenciájához azt kell megmutatni, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{g \in \mathcal{G}_n} \left| \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n g(Z_j) - \mathbf{E}\{g(Z)\} \right| = 0$$

1 valószínűséggel, ahol

$$Z = (X, Y), \quad Z_i = (X_i, Y_i), \quad i = 1, 2, \dots$$

és

$$\mathcal{G}_n = \{g : g(x, y) = |f(x) - y|^2, f \in \mathcal{F}_n\}$$

nemnegatív, $2\beta_n^2$ -tel felülről korlátozott függvények egy osztálya (elég nagy n -re).

Minden rögzített olyan g függvényre, melyre $\mathbf{E}\{|g(Z)|\} < \infty$ a nagy számok erős törvénye alapján

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n g(Z_j) - \mathbf{E}\{g(Z)\} \right| = 0$$

1 valószínűséggel. Másrészt a Hoeffding-egyenlőtlenség szerint minden $g : \mathcal{R}^d \times \mathcal{R} \rightarrow [0, 2\beta_n^2]$ függvényre

$$\mathbf{P} \left\{ \left| \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n g(Z_j) - \mathbf{E}\{g(Z)\} \right| > \varepsilon \right\} \leq 2e^{-\frac{n\varepsilon^2}{2\beta_n^4}}.$$

Ezt és az uniókorlátot felhasználva kapunk eredményt abban az esetben, ha a \mathcal{G}_n osztály véges:

$$\mathbf{P} \left\{ \sup_{g \in \mathcal{G}_n} \left| \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n g(Z_j) - \mathbf{E}\{g(Z)\} \right| > \varepsilon \right\} \leq 2|\mathcal{G}_n|e^{-\frac{n\varepsilon^2}{2\beta_n^4}}$$

([33]).

Ha nem véges az osztály, akkor is tudunk felső korlátot adni, ha \mathcal{G}_n Vapnik–Chervonenkis-dimenziója véges.

3.1. Definíció. Az \mathcal{R}^{d+1} -beli halmazok egy \mathcal{A} osztálya *szeparál* egy $G \subseteq \mathcal{R}^{d+1}$ halmazt, ha G minden részhalmaza előáll $A \cap G$ alakban valamely $A \in \mathcal{A}$ -ra. Az \mathcal{A} osztály $V_{\mathcal{A}}$ *Vapnik–Chervonenkis- (vc-) dimenziója* a legnagyobb n szám, amelyre még létezik olyan n pontból álló halmaz \mathcal{R}^{d+1} -ben, amelyet \mathcal{A} szeparál. Ha minden n -re létezik ilyen halmaz, akkor definíció szerint $V_{\mathcal{A}} = \infty$. Ha $V_{\mathcal{A}}$ véges, akkor \mathcal{A} -t *Vapnik–Chervonenkis- (vc-) osztálynak* mondjuk.

3.5. TÉTEL (Vapnik és Chervonenkis [56]). *Bármely ν valószínűségi mértékre és \mathcal{A} halmazosztályra, és minden n -re és $\varepsilon > 0$ -ra*

$$\mathbf{P} \left\{ \sup_{A \in \mathcal{A}} |\nu_n(A) - \nu(A)| > \varepsilon \right\} \leq 8n^{V_{\mathcal{A}}} e^{-n\varepsilon^2/32},$$

ahol ν_n az (X_i, Y_i) minták által meghatározott empirikus mérték.

Definiálható egy függvényosztály Vapnik–Chervonenkis-dimenziója is:

3.2. Definíció. Az $\mathcal{F} : \mathcal{R}^d \mapsto [0, \alpha]$ osztály *szeparáló együtthatója*, $s(\mathcal{F}, n)$, az a szám, ahány különböző részhalmazát tudjuk kiválasztani n pontnak \mathcal{F} -beli függvényekkel. Egy E részhalmazt kiválaszt egy f függvény, ha $f(x) \geq \alpha/2$, ha $x \in E$, és $f(x) < \alpha/2$, ha $x \notin E$.

Az \mathcal{F} osztály *Vapnik-Chervonenkis- (VC-) dimenziója* $V_{\mathcal{F}}$ a legnagyobb olyan n_0 szám, amelyre még létezik olyan n_0 pont, amelynek minden részhalmazát ki tudjuk választani \mathcal{F} -beli függvényekkel. Ha minden n -re létezik ilyen n pont, akkor $V_{\mathcal{F}} = \infty$.

Tehát, ha a \mathcal{G}_n osztály VC-dimenziója véges, akkor a Vapnik-Chervonenkis-egyenlőtlenség alapján

$$\mathbf{P} \left\{ \sup_{g \in \mathcal{G}_n} \left| \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n g(Z_j) - \mathbf{E}\{g(Z)\} \right| > \varepsilon \right\} \leq 8n^{V_{\mathcal{G}_n}} e^{-\frac{n\varepsilon^2}{32\beta_n^4}}.$$

Egy osztály nagyságát a dimenzióján kívül lefedési számaival is jellemezhetünk, és ezek segítségével is eljuthatunk felső korláthoz:

Az 2.1. definícióbeli metrikus térben a távolság lehet az empirikus L_1 -távolság, azaz $d_{1,n}(g, g') = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |g(z_i) - g'(z_i)|$. \mathcal{G}_n -nek az ezen távolságon alapuló ún. empirikus L_1 ε -lefedési száma legyen $N_1(\varepsilon, \mathcal{G}_n)$, ahol $z_1^n = (z_1, \dots, z_n)$.

Ha $Z_1^n = (Z_1, \dots, Z_n)$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók egy sorozata, akkor $N_1(\varepsilon, Z_1^n, \mathcal{G}_n)$ valószínűségi változó. Ekkor igaz a következő tétel

3.6. TÉTEL (Pollard [47]). Legyen \mathcal{G} a $g : \mathcal{R}^d \mapsto [0, M]$ függvények egy osztálya. Minden n -re és $\varepsilon > 0$ -ra,

$$\mathbf{P} \left\{ \sup_{g \in \mathcal{G}} \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(Z_i) - \mathbf{E}\{g(Z_1)\} \right| > \varepsilon \right\} \leq 8\mathbf{E}\{N_1(\varepsilon/8, Z_1^n, \mathcal{G})\} e^{-n\varepsilon^2/(128M^2)}.$$

Tehát véges L_1 lefedési számú osztály esetében is lehet felső korlátot adni a becslési hibára.

A konvergenciasebességre visszatérve, a 3.4. tétel állítását úgy is fogalmazhatjuk, hogy minden 0-hoz tartó pozitív sorozat individuális alsó konvergenciasebesség az $X = \text{Uniform}[0, 1]$ -t és $Y = m(X)$ -t teljesítő eloszlások osztályára nézve.

Most feltételezzük, hogy az (X, Y) eloszlása benne van egy szűkebb eloszlásosztályban. Az alsó és éles konvergenciasebességeket vizsgálhatjuk ilyen eloszlásosztályokra is, melyeket többek között pl. az határoz meg, hogy az m regressziófüggvény benne van egy adott függvényosztályban. Ez lehet pl. az $F^{(p, M)}$ „sima” függvényosztály (2.2. definíció):

3.3. Definíció. Legyen $\mathcal{D}^{(p, M)}(X, Y)$ azon eloszlásainak halmaza, amelyekre

- (I) X egyenletes eloszlású $[0, 1]^d$ -en,
- (II) $Y = m(X) + N$, ahol X és N függetlenek és N standard normális,
- (III) $m \in \mathcal{F}^{(p, M)}$.

3.7. TÉTEL (Barron, Birgé és Massart [8], Stone [52]). Az $n^{-\frac{2p}{2p+d}}$ sorozat a $\mathcal{D}^{(p,M)}$ eloszlásosztályra nézve minimax alsó konvergenciasebesség, és ez éles.

A minimax alsó korlát fő jellegzetessége, hogy mivel a legrosszabb esetet jelentő eloszlás igen bonyolult módon függhet a becslési algoritmustól, általában a bizonyítás nem konstruktív, pusztán a „rossz” eloszlás létezését tudjuk bebizonyítani. A bizonyítás fő eszköze a *randomizálás*: azt, hogy az eloszlásosztálybeli legrosszabb esetben a hiba „nagy”, úgy igazoljuk, hogy véletlenszerűen választunk egy eloszlást az osztályból, és az átlagos (várható) hibát becsüljük alulról. Az eloszlásosztály szimmetriái miatt ilyenkor kezelhetőbb formulát kapunk, amelyből kiküszöbölhetőek az adott becslési algoritmus tulajdonságai.

A véletlen választás, és így a „rossz” eloszlás a minimax alsó korlátoknál általában függ a mintamérettől. Az individuális alsó korlátoknál azonban ettől független eloszlást keresünk, így a mintaszámtól nem függhet sem a randomizálás, sem a konkrét véletlen választás. Ez általában bonyolultabb bizonyítást eredményez.

3.8. TÉTEL (Antos, Györfi és Kohler [5]). Legyen b_n egy tetszőleges nullához tartó pozitív sorozat. Ekkor a

$$b_n n^{-\frac{2p}{2p+d}}$$

sorozat a $\mathcal{D}^{(p,M)}$ eloszlásosztályra nézve individuális alsó konvergenciasebesség, azaz $n^{-\frac{2p}{2p+d}}$ éles individuális konvergenciasebesség.

4. Alakfelismerés

Az alakfelismerés esetében a $\{0, 1\}$ lehetséges értékű Y valószínűségi változó (címke, osztály) értékét kell eldönteni adott X d -dimenziós véletlen vektor (megfigyelés) alapján. A döntés vagy osztályozási szabály egy

$$g : \mathcal{R}^d \rightarrow \{0, 1\}$$

döntésfüggvény. Az osztályozási szabály minőségét az

$$L(g) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{P}\{g(X) \neq Y\}.$$

hibavalószínűség méri. Létezik optimális osztályozó, a lehető legjobb (legkisebb) hibavalószínűséget a Bayes-döntés adja:

$$g^*(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 0 & \text{ha } \eta^*(x) < 1/2, \\ 1 & \text{különben,} \end{cases}$$

ahol $\eta^*(x) = \mathbf{P}\{Y = 1 \mid X = x\}$ az a posztteriori valószínűségfüggvény, amely ebben az esetben megegyezik az $\mathbf{E}\{Y \mid X = x\}$ regressziófüggvénnyel. A Bayes-döntés hibáját, $L(g^*)$ -ot, Bayes-hibának nevezik, és L^* -gal is jelölik.

A Bayes-döntéshez ismernünk kellene Y -nak X feltétel melletti feltételes eloszlásait. Az alakfelismerés feladatánál ezek ismeretlenek, de – mint regresszióbecslésnél, itt is – rendelkezésünkre állnak a $D_n = \{(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)\}$ adatok, melyek (X, Y) független és azonos eloszlású példányai. Egy olyan adatoktól függő

$$g_n(x) = g_n(x, D_n) : \mathcal{R}^d \times (\mathcal{R}^d \times \{0, 1\})^n \mapsto \{0, 1\}$$

osztályozási szabályt szeretnénk megkonstruálni, amelyre

$$L_n \stackrel{\text{def}}{=} L(g_n) = \mathbf{P}\{g_n(X) \neq Y \mid D_n\}$$

közel van L^* -hoz. Tehát az X szerepét ismét az (X, Y) pár játksza, P -nek g^* felel meg, a veszteségfüggvény pedig az $l(g_n, g^*) \stackrel{\text{def}}{=} L_n - L^*$ hiba.

Most is kétfajta univerzális konzisztenciáról beszélhetünk:

A g_n osztályozási szabály *gyengén univerzálisan konzisztens*, ha

$$\mathbf{E}L_n = \mathbf{P}\{g_n(X) \neq Y\} \rightarrow L^*$$

(X, Y) minden eloszlására, illetve *erősen univerzálisan konzisztens*, ha

$$\mathbf{P}\{g_n(X) \neq Y \mid D_n\} \rightarrow L^* \quad 1 \text{ valószínűséggel}$$

(X, Y) minden eloszlására.

Mivel az $\eta^*(x)$ a poszteriori valószínűségfüggvény egy speciális regressziófüggvény, ezért sikeres η_n regresszióbecslésekből a

$$g_n(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } \eta_n(x) > 1/2, \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$

behelyettesítéssel sikeres osztályozási szabályok vezethetők le, ugyanis

$$(3) \quad L(g_n) - L^* = 2\mathbf{E} \left\{ I_{\{g_n(X) \neq g^*(X)\}} \left| \eta^*(X) - \frac{1}{2} \right| \right\} \\ \leq 2\mathbf{E} \left\{ I_{\{g_n(X) \neq g^*(X)\}} |\eta^*(X) - \eta_n(X)| \right\} \leq 2\sqrt{J(\eta_n)}$$

([27]). Tehát a konzisztens regresszióbecslésekből adódóan most is tekinthetjük a következő három, lokális többségen alapuló, univerzálisan konzisztens osztályozási szabályt:

A *k-legközelebbi szomszéd szabály* a

$$g_n(x) = \arg \max_{j \in \{0, 1\}} \sum_{i=1}^n W_{ni}(x) I_{\{Y_i = j\}}$$

döntéshüggvény, ahol W_{ni} az előző fejezetben definiált legközelebbi szomszéd súly.

A partíciós szabály a

$$g_n(x) = \arg \max_{j \in \{0,1\}} \sum_{i=1}^n I_{\{X_i \in A_n(x)\}} I_{\{Y_i=j\}}$$

döntéshüggvény, ahol $A_n(x)$ a \mathcal{P}_n azon cellája, amelybe x beleesik. Azaz minden cellán többségi döntést hoz az odaeső minták címkéi alapján.

A magfüggvényes szabály a

$$g_n(x) = \arg \max_{j \in \{0,1\}} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{X_i - x}{h_n}\right) I_{\{Y_i=j\}}$$

döntéshüggvény.

(3) miatt ezek az osztályozási szabályok (erősen) univerzálisan konzisztensek azon feltételek teljesülése esetén, amikor a megfelelő regresszióbecslők (erősen) univerzálisan konzisztensek ([27]).

Bár megmutatható, hogy az alakfelismerési feladat könnyebb, mint a regresszióbecslés, lassú konvergenciasebbségre vonatkozó eredmény itt is ismert:

4.1. TÉTEL (Devroye [18], Devroye et al. [27]). *Osztályozási szabályok minden $\{g_n\}$ sorozatához, és pozitív számok minden monoton, 0-hoz tartó $1/16 \geq b_1 \geq b_2 \geq \dots$ sorozatához létezik (X, Y) -nak olyan eloszlása, amelyre X egyenletes eloszlású $[0, 1]$ -en, $L^* = 0$ ($Y = \eta(X)$) és*

$$\mathbf{E}L_n = \mathbf{P}\{g_n(X) \neq Y\} \geq b_n \quad \text{minden } n\text{-re.}$$

A következő eredmény rámutat, hogy bizonyos feltételek mellett létezik konvergenciasebbség. Legyen most g_n a fentebb definiált partíciós szabály, m_n jelölje a partícióban szereplő cellák számát, és legyen R_n^* a Bayes-hibának a \mathcal{P}_n partícióra való megszorítása, azaz

$$R_n^* = \sum_{j=1}^{m_n} \min \{ \nu(A_{nj}), \mu(A_{nj}) - \nu(A_{nj}) \},$$

ahol $\nu(A) = \mathbf{E}\{Y I_{\{X \in A\}}\}$.

4.2. TÉTEL (Pintér [46]). *Ha létezik egy c konstans úgy, hogy minden n -re és j -re*

$$|\mu(A_{nj}) - 2\nu(A_{nj})| > c\mu(A_{nj}),$$

akkor

$$\mathbf{E}(L_n - R_n^*) \leq \frac{12}{c} \frac{m_n}{n}.$$

Ha még az is teljesül, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m_n^2}{n} = 0,$$

akkor

$$\sqrt{n}(L_n - R_n^*) \rightarrow 0$$

sztochasztikusan, ha $n \rightarrow \infty$.

Most ismét feltételezzük, hogy az (X, Y) eloszlása egy szűkebb eloszlásosztályból való. Tegyük fel, hogy az η^* a posztteriori valószínűségfüggvény (regressziófüggvény) benne van egy adott \mathcal{F} függvényosztályban. Ekkor a feladat az \mathcal{F} osztályból kiválasztani egy η függvényt úgy, hogy az általa meghatározott $g(x) = I_{\{\eta(x) \geq 1/2\}}$ döntés hibavalószínűsége kicsi legyen.

Az \mathcal{F} osztály megállapításában sokféle szempont játszhat szerepet, például az osztályozandó adat eloszlásáról rendelkezésre álló információ, számítási megfontolások. Az osztály elég nagy kell, hogy legyen ahhoz, hogy jó közelítést adjon az optimális megoldásra, de nem lehet túl nagy, mert akkor az adatok mennyisége nem elegendő arra, hogy jó döntést válasszunk ki belőle. Az, hogy hogyan érdemes mérni az osztály nagyságát, általában függ a módszertől, amellyel a választást végezzük. Regresszióbecslésnél láttuk, hogy egy osztály nagyságának jellemzésére alkalmas az osztály Vapnik–Chervonenkis-dimenziója:

Az $\mathcal{F} : \mathcal{R}^d \mapsto [0, 1]$ osztály szeparáló együtthatója, $s(\mathcal{F}, n)$, az \mathcal{F} -beli függvények által meghatározott döntésfüggvények osztályának szeparáló együtthatója, azaz az a szám ahányféleképpen n pontot az osztálybeli függvényekkel osztályozni lehet.

Az \mathcal{F} osztály szeparálja az x_1, \dots, x_n pontokat, ha minden $E \subseteq \{x_1, \dots, x_n\}$ -hez létezik olyan $\eta_E \in \mathcal{F}$, amelyre $\eta_E(x) \geq 1/2$, ha $x \in E$, és $\eta_E(x) < 1/2$, ha $x \in \{x_1, \dots, x_n\} \setminus E$, azaz az η_E által meghatározott g_E döntésfüggvény az E -beli pontokban 1-re, az $\{x_1, \dots, x_n\} \setminus E$ -beli pontokban 0-ra dönt. Ekkor $s(\mathcal{F}, n) = 2^n$.

Az \mathcal{F} osztály Vapnik–Chervonenkis-dimenziója $V_{\mathcal{F}}$ a legnagyobb olyan n_0 szám, amelyre még létezik olyan n_0 pont, amelyet \mathcal{F} szeparál. Ha minden n -re létezik ilyen n pont, akkor $V_{\mathcal{F}} = \infty$.

A Vapnik–Chervonenkis-dimenzióknak számos általánosítása létezik.

4.1. Definíció (Pollard [48]). Az $\mathcal{F} : \mathcal{R}^d \mapsto [0, 1]$ osztály P -szeparálja az x_1, \dots, x_n pontokat, ha létezik egy $s : \{x_1, \dots, x_n\} \mapsto \mathcal{R}$ függvény úgy, hogy minden $E \subseteq \{x_1, \dots, x_n\}$ -hez létezik olyan $\eta_E \in \mathcal{F}$, amelyre $\eta_E(x) > s(x)$, ha $x \in E$, és $\eta_E(x) \leq s(x)$, ha $x \in \{x_1, \dots, x_n\} \setminus E$. Az \mathcal{F} osztály P -dimenziója a legnagyobb olyan n_0 szám, amelyre még létezik olyan n_0 pont, amelyet \mathcal{F} P -szeparál. Ha minden n -re létezik ilyen n pont, akkor $P(\mathcal{F}) = \infty$.

A P -dimenzióval rokon a V -dimenzió (Vapnik [55]), a különbség, hogy ott a definícióban az $s(x)$ függvény helyett $\alpha \in \mathcal{R}$ konstans szerepel.

Az utóbbi dimenzióknak létezik paraméterezett, skálaérzékeny változata is.

4.2. Definíció (Kearns és Shapire [38]). Legyen γ pozitív valós szám. Az \mathcal{F} osztály P_γ -szeparálja az x_1, \dots, x_n pontokat, ha létezik egy $s : \{x_1, \dots, x_n\} \mapsto \mathcal{R}$ függvény úgy, hogy minden $E \subseteq \{x_1, \dots, x_n\}$ -hez létezik olyan $\eta_E \in \mathcal{F}$, amelyre $\eta_E(x) \geq s(x) + \gamma$, ha $x \in E$, és $\eta_E(x) \leq s(x) - \gamma$, ha $x \in \{x_1, \dots, x_n\} \setminus E$.

Az \mathcal{F} osztály P_γ -dimenziója a legnagyobb olyan n_0 szám, amelyre még létezik olyan n_0 pont, amelyet \mathcal{F} P_γ -szeparál. Ha minden n -re létezik ilyen n pont, akkor $P_\gamma(\mathcal{F}) = \infty$.

Hasonlóan definiálható a V -dimenzió skálaérzékeny változata is.

A definíciókból következik, hogy $V_\gamma(\mathcal{F}) \leq P_\gamma(\mathcal{F})$, $V_\gamma(\mathcal{F}) \leq V(\mathcal{F})$, $P_\gamma(\mathcal{F}) \leq P(\mathcal{F})$, valamint hogy $V_{\mathcal{F}} \leq V(\mathcal{F}) \leq P(\mathcal{F})$. Azonban könnyen belátható, hogy a Vapnik–Chervonenkis-dimenzió és a skálaérzékeny P_γ és V_γ dimenziók között nem állítható fel ilyen egyetemes kapcsolat. Ha \mathcal{F} az összes olyan \mathcal{R} -en értelmezett függvényt tartalmazza, melyek értéke a $[0, 1/2]$ -be esik, ha $x < 0$, és az $(1/2, 1]$ -be, ha $x \geq 0$, akkor $V_{\mathcal{F}} = 0$, de $P_\gamma(\mathcal{F}) = \infty$ minden γ -ra. Másrészt, ha \mathcal{F} az összes olyan, pozitív egészekben definiált függvényt tartalmazza, melyekre $|\eta(x) - 1/2| \leq e^{-x}/2$, akkor $P_\gamma(\mathcal{F}) = \lfloor -\log 2\gamma \rfloor$, de $V_{\mathcal{F}} = \infty$.

4.3. Definíció (Lugosi és Pintér [45]). Legyen $0 \leq \gamma \leq 1/2$. Az \mathcal{F} osztály γ -szeparálja az x_1, \dots, x_n pontokat, ha létezik egy $s : \{x_1, \dots, x_n\} \mapsto [1/2 - \gamma, 1/2 + \gamma]$ függvény úgy, hogy minden $E \subseteq \{x_1, \dots, x_n\}$ -hez létezik olyan $\eta_E \in \mathcal{F}$, amelyre $\eta_E(x) \geq s(x) + \gamma$, ha $x \in E$, és $\eta_E(x) < s(x) - \gamma$, ha $x \in \{x_1, \dots, x_n\} \setminus E$.

Az \mathcal{F} osztály γ -dimenziója a legnagyobb olyan n_0 szám, amelyre még létezik olyan n_0 pont, amelyet \mathcal{F} γ -szeparál. Ha minden n -re létezik ilyen n pont, akkor $d_\gamma(\mathcal{F}) = \infty$.

A definíciókból könnyen belátható, hogy $d_\gamma(\mathcal{F}) \leq P_\gamma(\mathcal{F})$ és $d_\gamma(\mathcal{F}) \leq V_{\mathcal{F}}$, azaz $d_\gamma(\mathcal{F}) \leq \min(P_\gamma(\mathcal{F}), V_{\mathcal{F}})$.

Ezen dimenziók segítségével jellemezhető az alakfelismerési módszerek egy nagy csoportja, az empirikus hibaminimalizáláson alapuló módszerek.

4.4. Definíció. Egy g döntésfüggvény empirikus hibaválószerűsége az

$$L_n(g) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I_{\{g(X_i) \neq Y_i\}},$$

mennyiség.

Az empirikus hibaminimalizálás módszere minimalizálja az empirikus hibát az adott függvényosztályon, tehát a

$$\tilde{g}_n(x) = \arg \min_{g(x) = I_{\{\eta(x) \geq 1/2\}} : \eta \in \mathcal{F}} L_n(g)$$

döntésfüggvényt választja.

4.3. TÉTEL (Vapnik és Chervonenkis [57]). Ha az η^* valódi regressziós függvény \mathcal{F} -beli, akkor

$$\mathbb{E}\{L(\tilde{g}_n)\} - L^* \leq K \max \left(\sqrt{\frac{L^* \log(s(\mathcal{F}, n))}{n}}, \frac{\log(s(\mathcal{F}, n))}{n} \right),$$

ahol K egy univerzális konstans.

Mivel a szeparáló együtthatóra igaz, hogy

$$s(\mathcal{F}, n) \leq \left(\frac{ne}{V_{\mathcal{F}}} \right)^{V_{\mathcal{F}}},$$

ezért

$$\mathbf{E}\{L(\tilde{g}_n)\} - L^* \leq K \max \left(\sqrt{\frac{L^* V_{\mathcal{F}} \log n}{n}}, \frac{V_{\mathcal{F}} \log n}{n} \right).$$

Az empirikus hibaminimalizálás módszere robusztus abban az értelemben, hogy ha feltevésünkkel ellentétben $\eta^* \notin \mathcal{F}$, akkor is elég jól működik. A fenti felső korlátban mindkét oldalon L^* helyére $\inf_{\eta \in \mathcal{F}} L(g)$ -t írva, az egyenlőtlenség továbbra is fennáll a becslési hibára.

Az empirikus négyzeteshiba-minimalizálás módszere az

$$\eta'_n(x) = \arg \min_{\eta \in \mathcal{F}} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\eta(X_i) - Y_i)^2$$

függvényt választja, azaz minimalizálja az empirikus L_2 -hibát. Az L_2 -hiba ugyan inkább a regresszióbecslésben alkalmazott hibakritérium, de láttuk, hogy ha L_2 értelemben jó regresszióbecslőt találunk, akkor abból kézenfekvően adódik jó osztályozási szabály.

4.4. TÉTEL (Lee, Bartlett és Williamson [42]). Ha $\eta^* \in \mathcal{F}$, akkor az így választott η'_n által meghatározott g'_n döntésfüggvényre, minden $\varepsilon > 0$ -ra

$$\mathbf{E}\{L(g'_n)\} - L^* \leq K \left(\sup_{x_1, \dots, x_n} \sqrt{\frac{\log N_{\infty}(\varepsilon, x_1^n, \mathcal{F})}{n}} + \varepsilon \right),$$

ahol $N_{\infty}(\varepsilon, x_1^n, \mathcal{F})$ az \mathcal{F} osztály a $d_{\infty, n}(\eta_1, \eta_2) = \max_{1 \leq i \leq n} |\eta_1(x_i) - \eta_2(x_i)|$ empirikus távolsághoz tartozó ε -lefedési száma.

A tétel felső korlátjában szereplő lefedési számot becsülni lehet az \mathcal{F} osztály egy P_{γ} -dimenziója segítségével (Alon, Ben-David, Cesa-Bianchi és Haussler [1]):

$$\sup_{x_1, \dots, x_n} N_{\infty}(\varepsilon, x_1^n, \mathcal{F}) \leq 2 \left(\frac{4n}{\varepsilon^2} \right)^{P_{\varepsilon/4} \log(2en/(P_{\varepsilon/4}))}.$$

Mivel vannak olyan esetek, amikor az \mathcal{F} osztály VC-dimenziója végtelen, de $P_{\gamma}(\mathcal{F})$ véges minden γ -ra, és fordítva, ezért a két módszer nem kompatibilis. Könnyű mutatni olyan szituációkat, amikor $V_{\mathcal{F}} = \infty$, tehát az empirikus hibaminimalizálás megbukik, de az empirikus négyzeteshiba-minimalizálás kis hibavalószínűséget ad, és fordítva.

A lefedésen alapuló becslések először kiválasztják az \mathcal{F} osztály egy valamilyen értelemben vett véges lefedését, azaz egy olyan $\mathcal{F}_{\varepsilon} \subseteq \mathcal{F}$ -et, amelyre teljesül, hogy

\mathcal{F} minden eleméhez van \mathcal{F}_ε -nak egy eleme, amely ε -nál „közelebb” van hozzá, majd ebből a lefedésből választanak empirikus hibaminimalizálással. A különböző módszerek abban különböznek egymástól, hogy hogyan mérik ezt a közelséget. Ilyen módszereket javasolt és vizsgált Benedek és Itai [11], Buescher és Kumar [15, 16], Dudley, Kulkarni, Richardson és Zeitouni [31], Kulkarni [40], Vapnik [54] és Devroye et al. [27].

Ha X eloszlása ismert, akkor azt felhasználhatjuk a lefedés kiválasztásához. [54] és [11] a $d_H(\eta, \eta') = \mathbf{P}\{g(X) \neq g'(X)\}$ Hamming-távolságban fedi le az osztályt, és ebből a lefedésből választ minimalizálva az empirikus hibát. [27] szuprémum normában $(\sup_{x \in \mathcal{X}} |\eta(x) - \eta'(x)|)$ fedi le \mathcal{F} -et.

Legyen most a „távolság” η_1 és η_2 között $\mathbf{E}\{2|\eta_1(X) - \eta_2(X)|I_{\{g_1(X) \neq g_2(X)\}}\}$, ahol g_i az η_i által meghatározott döntésfüggvény. Ezen távolság választását (3) indokolja.

Ekkor az $\mathcal{F}_\varepsilon^{(1)}$ lefedés az \mathcal{F} -beli függvények egy olyan minimális elemszámú osztálya, amelyre teljesül, hogy minden $\eta \in \mathcal{F}$ -hez létezik egy $\eta' \in \mathcal{F}_\varepsilon^{(1)}$ úgy, hogy

$$\mathbf{E}\{2|\eta(X) - \eta'(X)|I_{\{g(X) \neq g'(X)\}}\} < \varepsilon.$$

Most válasszuk ki $\mathcal{F}_\varepsilon^{(1)}$ azon elemét, amelynek empirikus hibája a legkisebb:

$$g_n(x) = \arg \min_{g(x)=I_{\{\eta(x) \geq 1/2\}} : \eta \in \mathcal{F}_\varepsilon^{(1)}} L_n(g).$$

4.5. TÉTEL (Lugosi és Pintér [45]). Ha $\eta^* \in \mathcal{F}$, akkor az ily módon választott g_n döntésfüggvényre

$$\begin{aligned} & \mathbf{E}\{L(g_n)\} - L^* \leq \\ & \leq \varepsilon + \max \left[\sqrt{\frac{22(L^* + \varepsilon) \log(n(|\mathcal{F}_\varepsilon^{(1)}| + 1))}{n}}, \frac{22 \log(n(|\mathcal{F}_\varepsilon^{(1)}| + 1))}{n} \right]. \end{aligned}$$

Az $\mathcal{F}_\varepsilon^{(1)}$ lefedés definíciójából következik, hogy

$$|\mathcal{F}_\varepsilon^{(1)}| \leq \min(N_1(\varepsilon/2, \mu, \mathcal{F}), N_H(\varepsilon/2, \mu, \mathcal{F})),$$

ahol $N_1(\varepsilon, \mu, \mathcal{F})$ az L_1 -távolsághoz $(d_1(\eta_1, \eta_2) = \mathbf{E}\{|\eta_1(X) - \eta_2(X)|\})$, $N_H(\varepsilon, \mu, \mathcal{F})$ pedig a Hamming-távolsághoz $(d_H(\eta_1, \eta_2) = \mathbf{P}\{g_1(X) \neq g_2(X)\})$ tartozó lefedési szám. Ezen lefedési számokra bebizonyítható, hogy ha $N_1(\varepsilon, x_1^n, \mathcal{F})$ és $N_H(\varepsilon, x_1^n, \mathcal{F})$ jelöli az empirikus L_1 -távolsághoz $(d_{1,n}(\eta_1, \eta_2) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |\eta_1(x_i) - \eta_2(x_i)|)$, illetve az empirikus Hamming-távolsághoz $(d_{H,n}(\eta_1, \eta_2) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I_{\{g_1(x_i) \neq g_2(x_i)\}})$ tartozó lefedési számot, akkor ha $n > c \frac{V_{\mathcal{F}}}{\varepsilon^2} \log \frac{1}{\varepsilon}$, akkor

$$N_H(\varepsilon/2, \mu, \mathcal{F}) \leq \sup_{x_1, \dots, x_n} N_H(\varepsilon/4, x_1^n, \mathcal{F}) \leq s(\mathcal{F}, n) \leq \left(\frac{ne}{V_{\mathcal{F}}} \right)^{V_{\mathcal{F}}},$$

valamint, ha $n \geq c \frac{P_{\varepsilon/256}}{\varepsilon^2} \log^2 \frac{1}{\varepsilon}$, akkor

$$N_1(\varepsilon/2, \mu, \mathcal{F}) \leq \sup_{x_1, \dots, x_n} N_1(\varepsilon/4, x_1^n, \mathcal{F}) \leq 2 \left(\frac{64n}{\varepsilon^2} \right)^{2P_{\varepsilon/16} \log(2en/P_{\varepsilon/16})}.$$

Így tehát a módszer konvergenciasebességét a két dimenzió (vc és P_γ) minimuma határozza meg. Ugyanakkor az algoritmus működhet akkor is, ha $\min(V_{\mathcal{F}}, P_\gamma) = \infty$ minden γ -ra. Gondoljunk például az összes $[0, \frac{1}{2} + \frac{\varepsilon}{4}]$ értékkészletű függvényt tartalmazó osztályra. Ekkor $\min(V_{\mathcal{F}}, P_\gamma) = \infty$, és könnyű meggondolni, hogy mind az empirikus hibaminimalizálás, mind az empirikus négyzeteshiba-minimalizálás hatalmas hibavalószínűségeket adhat. Ugyanakkor $|\mathcal{F}^{(1)}| = 1$, hiszen \mathcal{F} -et lefedi az $\eta \equiv \frac{1}{2} - \frac{\varepsilon}{4}$ függvény.

Ha nem ismerjük X eloszlását, akkor a „távolság” ilyenkor az adataink egy részétől függ, azaz az adataink egyik felének felhasználásával megkonstruáljuk egy lefedését \mathcal{F} -nek, majd ebből az adatok második felén empirikusan legjobb jelöltet választjuk. A lefedéshez használt metrika ilyenkor mindig más, mint az, amellyel a lefedésből kiválasztunk egy döntést.

A $D_n = ((X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n))$ adathalmazt vágjuk két részre:

$$D_m = ((X_1, Y_1), \dots, (X_m, Y_m))$$

és

$$T_{n-m} = ((X_{m+1}, Y_{m+1}), \dots, (X_n, Y_n)).$$

D_m segítségével konstruáljunk egy $\mathcal{F}_\varepsilon^{(2)}$ lefedését \mathcal{F} -nek az empirikus L_1 -távolság szerint, azaz legyen $\mathcal{F}_\varepsilon^{(2)}$ egy minimális elemszámú olyan részhalmaza \mathcal{F} -nek, amelyre minden $\eta \in \mathcal{F}$ -hez létezik egy $\eta' \in \mathcal{F}_\varepsilon^{(2)}$, amelyre

$$\frac{2}{m} \sum_{i=1}^m |\eta(X_i) - \eta'(X_i)| < \varepsilon.$$

Ekkor nyilván $|\mathcal{F}_\varepsilon^{(2)}| = N_1(\varepsilon/2, X_1^m, \mathcal{F})$. Válasszuk ki $\mathcal{F}_\varepsilon^{(2)}$ azon elemét, amelynek az adatok második felén (T_{n-m}) vett empirikus hibája minimális:

$$\begin{aligned} g_n(x) &= \arg \min_{g(x)=I_{\{\eta(x) \geq 1/2\}} : \eta \in \mathcal{F}_\varepsilon^{(2)}} L_{n-m}(g) = \\ &= \arg \min_{g(x)=I_{\{\eta(x) \geq 1/2\}} : \eta \in \mathcal{F}_\varepsilon^{(2)}} \frac{1}{n-m} \sum_{i=m+1}^n I_{\{g(X_i) \neq Y_i\}}. \end{aligned}$$

4.6. TÉTEL (Lugosi és Pintér [45]). Ha $\eta^* \in \mathcal{F}$, akkor minden n -re, $m = n/2$ -re és ε -ra

$$\mathbf{E}\{L(g_n)\} - L^* \leq 6\varepsilon + 3 \max \left[\sqrt{\frac{11L^* \log(2n\mathbf{E}N_1(\varepsilon/2, X_1^{n/2}, \mathcal{F}))}{n}}, \frac{512 \log(10n\mathbf{E}N_1(\varepsilon/32, X_1^{n/2}, \mathcal{F}))}{n} \right].$$

Az $N_1(\varepsilon/2, X_1^{n/2}, \mathcal{F})$ és $N_1(\varepsilon/32, X_1^{n/2}, \mathcal{F})$ lefedési számokra felső becslés adható a már látott módon \mathcal{F} valamely P_γ -dimenziójának függvényében.

Most vegyük \mathcal{F} egy lefedését a korábban látott

$$\mathbf{E}\{2|\eta_1(X) - \eta_2(X)|I_{\{g_1(X) \neq g_2(X)\}}\}$$

„metrika” empirikus változata szerint. Legyen $\mathcal{F}_\varepsilon^{(3)}$ az \mathcal{F} -beli függvények minimális elemszámú olyan osztálya, amelyre minden $\eta \in \mathcal{F}$ -hez van $\eta' \in \mathcal{F}_\varepsilon^{(3)}$ úgy, hogy

$$\frac{2}{m} \sum_{i=1}^m |\eta(X_i) - \eta'(X_i)| I_{\{g(X_i) \neq g'(X_i)\}} < \varepsilon.$$

És legyen

$$g_n(x) = \arg \min_{g(x) = I_{\{\eta(x) \geq 1/2\}} : \eta \in \mathcal{F}_\varepsilon^{(3)}} L_{n-m}(g).$$

Ekkor az $|\mathcal{F}_\varepsilon^{(3)}|$ lefedési szám függvényében lehet az előzőekhez hasonló felső korlátot adni a hibavalószínűsége ([45]).

Az $|\mathcal{F}_\varepsilon^{(3)}|$ lefedési számról pedig bebizonyítható az alábbi felső korlát:

4.7. TÉTEL (Lugosi és Pintér [45]). Ha $12m \geq \lceil 1/\varepsilon \rceil$, $\varepsilon \leq 1$, akkor X_1, \dots, X_m minden értékére

$$|\mathcal{F}_\varepsilon^{(3)}| \leq 2(6m)^{d_{\varepsilon/10} \log_2(2em/d_{\varepsilon/10}) + 1}.$$

Tehát ebben az esetben a konvergenciasebesség \mathcal{F} egy d_γ dimenziójától függ.

A lassú kovergenciára vonatkozó 4.1. tétel állítását úgy is fogalmazhatjuk, hogy minden nullához tartó pozitív sorozat individuális alsó konvergenciasebesség az $X = \text{Uniform}[0, 1]$ -t és $Y = \eta(X)$ -t teljesítő eloszlások osztályára nézve.

Vizsgáljuk most meg az $\mathcal{F} = \mathcal{F}^{(p,M)}$ „sima” függvényosztályokat (2.2. definíció) véve az alább definiált eloszlásosztályokra vonatkozó alsó és éles konvergenciasebességeket az alakfelismerés esetében is:

4.5. Definíció. Legyen $\mathcal{D}^{(p,M)}(X, Y)$ azon eloszlásainak halmaza, amelyekre

(I') X egyenletes eloszlású $[0, 1]^d$ -en,

(II') $Y \in \{0, 1\}$ 1 valószínűséggel,

(III') $\eta \in \mathcal{F}^{(p,M)}$.

4.8. TÉTEL (Yang [59]). Az $n^{-\frac{\nu}{2p+d}}$ sorozat a $\mathcal{D}^{*(p,M)}$ eloszlásosztályra nézve minimax alsó konvergenciasebesség, és ez éles.

4.9. TÉTEL (Antos [4]). Legyen b_n egy tetszőleges nullához tartó pozitív sorozat. Ekkor a

$$b_n n^{-\frac{\nu}{2p+d}}$$

sorozat a $\mathcal{D}^{*(p,M)}$ eloszlásosztályra nézve individuális alsó konvergenciasebesség, azaz $n^{-\frac{\nu}{2p+d}}$ éles individuális konvergenciasebesség.

A következőkben az alakfelismerés egy olyan speciális esetével foglalkozunk, amikor az $L^* = 0$, azaz Y az X függvénye. Ezt az esetet *tanulásnak* hívjuk. Legyen \mathcal{C} az \mathcal{R}^d részhalmazainak egy osztálya. \mathcal{C} elemeit koncepcióknak nevezzük, és \mathcal{C} egy koncepcióosztály. Legyen \mathcal{D} az (X, Y) azon eloszlásainak osztálya, amelyekre $Y = I_{\{X \in C\}}$ valamely $C \in \mathcal{C}$ -re. Tehát ebben az esetben egy ismeretlen $C \in \mathcal{C}$ koncepciót kell megtanulni a

$$D_n = \left((X_1, I_{\{X_1 \in C\}}), \dots, (X_n, I_{\{X_n \in C\}}) \right)$$

adatokból. Mivel $L^* = 0$, ezért $l(g, g^*) = L(g)$. Az (X, Y) együttes eloszlását az X eloszlásából és \mathcal{C} -ből álló *eloszlás-koncepció pár* határozza meg.

A minimax várható hibaválósínúság viselkedését is alapvetően a \mathcal{C} koncepcióosztály $V_{\mathcal{C}}$ VC-dimenziója (3.1. definíció) határozza meg:

4.10. TÉTEL (Vapnik és Chervonenkis [57], Haussler, Littlestone és Warmuth [37]). A $V_{\mathcal{C}}/n$ sorozat a \mathcal{D} eloszlásosztályra nézve minimax alsó konvergenciasebesség, és ez éles.

A fenti minimax alsó korlátok nem minden esetben terjeszthető ki individuális alsó korláttá (Antos [3]), azonban sok fontos „geometriai” koncepcióosztály esetében igen. A VC-dimenzió szerepét itt a koncepcióosztály paraméterszáma játsza. Az alábbi koncepcióosztályok VC-dimenziója megegyezik a k paraméterszámmal:

Legyen \mathcal{C}_k^1 a k darab „kezdszegmens” unióinak osztálya, azaz X tartója legyen $[0, 1] \times \{1, 2, \dots, k\}$ és

$$\mathcal{C}_k^1 = \left\{ \bigcup_{j=1}^k ([0, z_j] \times \{j\}) : z \in [0, 1]^k \right\}.$$

Legyen \mathcal{C}_k^2 a k -dimenziós „negyedek” osztálya \mathcal{R}^k -ban, azaz

$$\mathcal{C}_k^2 = \{ \{x \in \mathcal{R}^k : x_i \leq a_i, i = 1, \dots, k\} : a_1, \dots, a_k \in \mathcal{R} \}$$

ahol x_1, \dots, x_k az x vektor komponensei.

Legyen \mathcal{C}_k^3 a k -dimenziós „feltetek” osztálya \mathcal{R}^k -ban, azaz

$$\mathcal{C}_k^3 = \left\{ \left\{ x : \sum_{i=1}^k a_i x_i + a_0 \geq 0 \right\} : a_0, a_1, \dots, a_k \in \mathcal{R} \right\}.$$

([3]-ban további koncepcióosztályok is találhatóak, amelyekre szintén igazak az alábbi eredmények.)

4.11. TÉTEL (Antos és Lugosi [6], Schuurmans [49]). Ha \mathcal{C} a \mathcal{C}_k^1 , \mathcal{C}_k^2 és \mathcal{C}_k^3 egyike, akkor bármely g_n osztályozási szabály sorozatra létezik egy eloszlás és egy $C \in \mathcal{C}$ koncepció úgy, hogy minden $0 < \varepsilon < 1$ -re,

$$\mathbb{E}\{L(g_n)\} > (1 - \varepsilon) \frac{k}{2n} \quad \text{végtelen sok } n\text{-re,}$$

azaz k/n éles individuális konvergenciasebesség \mathcal{D} -re nézve.

Legyen g_n egy osztályozási szabály sorozat. A *kumulatív hiba*

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I_{\{g_i(X_{i+1}, D_i) \neq I_{\{X_{i+1} \in C\}}\}},$$

a sorozat által az első n lépésben elkövetett hibák relatív gyakorisága, ha mindig az első i mintát használjuk az $i + 1$ -edik minta címkéjének eldöntésére. Most a veszteségfüggvény az

$$l(\{g_i\}_{i=1}^n, g^*) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n L(g_i)$$

kumulatív hibavalószínűség.

4.12. TÉTEL (Haussler, Littlestone és Warmuth [37]). Ha \mathcal{C} a \mathcal{C}_k^1 , \mathcal{C}_k^2 és \mathcal{C}_k^3 egyike, akkor a várható kumulatív hibára a $k \log n/n$ sorozat a \mathcal{D} eloszlásosztályra nézve minimax alsó konvergenciasebesség, és ez éles.

A fenti minimax alsó korlátok következő individuális kiterjesztését bizonyítjuk:

4.13. TÉTEL (Antos és Lugosi [6]). Ha \mathcal{C} a \mathcal{C}_k^1 , \mathcal{C}_k^2 és \mathcal{C}_k^3 egyike, akkor bármely g_n osztályozási szabály sorozatra létezik egy eloszlás és egy $C \in \mathcal{C}$ koncepció úgy, hogy minden $0 < \varepsilon < 1$ -re,

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}\{L(g_i)\} > (1 - \varepsilon) \frac{k}{2n} \log n \quad \text{végtelen sok } n\text{-re,}$$

azaz a várható kumulatív hibára $k \log n/n$ éles individuális konvergenciasebesség \mathcal{D} -re nézve.

A várható hibavalószínűség hasznos mennyiség az L_n viselkedésének leírásához. Azonban inkább a

$$\mathbf{P}\{L_n \geq \varepsilon\}, \quad \varepsilon \in [0, 1]$$

farokvalószínűségek írják le teljesen a hibavalószínűség eloszlását. Most a veszteségfüggvény az

$$l(g_n, g^*) \stackrel{\text{def}}{=} I_{\{L_n \geq \varepsilon\}}$$

indikátor.

A VC-dimenzió a farokvalószínűségekre vonatkozó minimax alsó és felső korlátokat is jellemzi:

4.14. TÉTEL (Anthony et al. [2], Lugosi [44], lásd még Vapnik és Chervonenkis [57], Blumer et al. [14]). *Bármely koncepcióosztályra létezik g_n osztályozási szabály sorozat, hogy*

$$\sup_{(X,Y) \in \mathcal{D}} \mathbf{P}\{L_n \geq \varepsilon\} = O\left(\left(\frac{n^2 \varepsilon}{V_C}\right)^{V_C} e^{-n\varepsilon}\right).$$

4.15. TÉTEL (Devroye és Lugosi [29]). *Ha $V_C \geq 2$ és $\varepsilon < 1/4$, akkor az*

$$\left(\frac{n\varepsilon}{V_C}\right)^{(V_C-1)/2} e^{-4n\varepsilon/(1-4\varepsilon)}$$

sorozat a \mathcal{D} eloszlásosztályra nézve minimax alsó konvergenciasebesség.

Nyilván ε legérdekesebb értékei az $1/n$ -nek a konstans többszörösei, mivel ez az a tartomány, ahova egy jó g_n osztályozási szabály L_n hibavalószínűsége nagy valószínűséggel esik. Ilyen $\{\varepsilon = \varepsilon_n\}$ sorozatokra a fenti minimax korlátok következő típusú individuális kiterjesztését bizonyítjuk, ha \mathcal{C} a „geometriai” koncepcióosztályok egyike:

4.16. TÉTEL (Antos és Lugosi [6]). *Legyenek $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$ nemnegatív számok úgy, hogy $\{\gamma_n = n\varepsilon_n\}$ nem tart végtelenhez, amint $n \rightarrow \infty$. Ha \mathcal{C} a \mathcal{C}_k^1 , \mathcal{C}_k^2 és \mathcal{C}_k^3 egyike, akkor bármely $\{g_n\}$ osztályozási szabály sorozatra létezik egy eloszlás és egy $C \in \mathcal{C}$ koncepció úgy, hogy minden $\delta \in (0, 1)$ -re,*

$$\mathbf{P}\{L_n \geq \varepsilon_n\} \geq (1 - \delta) \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(c\gamma_n)^i}{i!} e^{-c\gamma_n} \quad \text{végtelen sok } n\text{-re,}$$

ahol $c = \log 256 \approx 5.545$, azaz $(cn\varepsilon_n/k)^{k-1} e^{-cn\varepsilon_n}$ és így $\{1\}$ individuális alsó konvergenciasebesség \mathcal{D} -re nézve.

Irodalomjegyzék

- [1] Alon, N., Ben-David, S., Cesa-Bianchi, N. and Haussler, D., Scale-sensitive dimensions, uniform convergence, and learnability, *Technical Report 143-95, DSI, University of Milan* (Italy, 1993),
- [2] Anthony, M., Biggs, N. L. and Shawe-Taylor, J., Bounding sample size with the Vapnik-Chervonenkis dimension, *Discrete Applied Mathematics* **42** (1993), 65–73.
- [3] Antos, A., *Performance limits of nonparametric estimators*, Ph.D. thesis, Technical University of Budapest, H-1521 Stoczek u. 2 (Budapest, Hungary, 1999).
- [4] Antos, A., Lower bounds for the rate of convergence in nonparametric pattern recognition, *Theoretical Computer Science* **284**(1) (2002), pp. 3–24. An extended abstract appeared in the Proceedings of the 4th European Conference on Computational Learning Theory (EU-ROCOLT'99).
- [5] Antos, A., Györfi, L. and Kohler, M., Lower bounds on the rate of convergence of nonparametric regression estimates, *Journal of Statistical Planning and Inference* **83**, No. 1 (2000), 91–100.
- [6] Antos, A. and Lugosi, G., Strong minimax lower bounds for learning, *Machine Learning* **30** (1998), 31–56.
- [7] Barron, A. R., The convergence in information of probability density estimates, *IEEE ISIT* (Kobe, Japan, 1988).
- [8] Barron, A. R., Birgé, L. and Massart, P., Risk bounds for model selection via penalization, *Probability Theory and Related Fields* **113** (1999), 301–413.
- [9] Barron, A. R., Györfi, L. and van der Meulen, E. C., Distribution estimates consistent in total variation and in two types of information divergence, *IEEE Trans. on Information Theory* **38** (1992), 1437–1454.
- [10] Beirlant, J. and Györfi, L., On the L_1 -error in histogram density estimation: the multidimensional case, *J. Nonparametric Statistics* **9** (1998), 197–216.
- [11] Benedek, G. M. and Itai, A., Learnability by fixed distributions, in: *Computational Learning Theory: Proceedings of the 1988 Workshop*, Morgan Kaufman (San Mateo, CA, 1988), pp. 80–90.
- [12] Berline, A., Devroye, L. and Györfi, L., Asymptotic normality of L_1 error in density estimation, *Statistics* **26** (1995), 329–343.
- [13] Birgé, L., On estimating a density using Hellinger distance and some other strange facts, *Probability Theory and Related Fields* **71** (1986), 271–291.
- [14] Blumer, A., Ehrenfeucht, A., Haussler, D. and Warmuth, M. K., Learnability and the Vapnik-Chervonenkis dimension, *Journal of the ACM* **36** (1989), 929–965.
- [15] Buescher, K. L. and Kumar, P. R., Learning by canonical smooth estimation, Part I: Simultaneous estimation, *IEEE Transactions on Automatic Control* **41** (1996), 545–556.
- [16] Buescher, K. L. and Kumar, P. R., Learning by canonical smooth estimation, Part II: Learning and choice of model complexity, *IEEE Transactions on Automatic Control* **41** (1996), 557–569.
- [17] Csiszár, I., Information-type measures of divergence of probability distributions and indirect observations, *Studia Sci. Math. Hungar.* **2** (1967), 299–318.

- [18] Devroye, L., Any discrimination rule can have an arbitrary bad probability of error for finite sample size, *IEEE Trans. Pattern Analysis and Machine Intelligence* PAMI-4 (1982), 154–157.
- [19] Devroye, L., The equivalence of weak, strong and complete convergence in L_1 for kernel density estimates, *Annals of Statistics* 11 (1983), 896–904.
- [20] Devroye, L., On arbitrary slow rates of global convergence in density estimation, *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete* 62 (1983), 475–483.
- [21] Devroye, L., Exponential inequalities in nonparametric estimation, in: *Nonparametric Functional Estimation* (ed. G. Roussas), NATO ASI Series, Kluwer Academic Publishers (Dordrecht, 1991), pp. 31–44.
- [22] Devroye, L., Another proof of a slow convergence result of Birgé, *Statistics and Probability Letters* 23 (1995), 63–67.
- [23] Devroye, L. and Györfi, L., Distribution-free exponential upper bound on the L_1 error of partitioning estimates of a regression function, in: *Proceedings of the Fourth Pannonian Symposium on Mathematical Statistics* (Konecny, F., Mogyoródi, J. and Wetz, W., eds.), Akadémiai Kiadó (Budapest, 1983), pp. 67–76.
- [24] Devroye, L. and Györfi, L., *Nonparametric Density Estimation: the L_1 View*, Wiley (1985).
- [25] Devroye, L. and Györfi, L., No empirical measure can converge in total variation sense for all distributions, *Annals of Statistics* 18 (1990), 1496–1499.
- [26] Devroye, L., Györfi, L., Krzyżak, A. and Lugosi, G., On the strong universal consistency of nearest neighbor regression function estimates, *Annals of Statistics* 22 (1994), 1371–1385.
- [27] Devroye, L., Györfi, L. and Lugosi, G., *A Probabilistic Theory of Pattern Recognition*, Springer Verlag (1996).
- [28] Devroye, L. and Krzyżak, A., An equivalence theorem for L_1 convergence of the kernel regression estimate, *Journal of Statistical Planning and Inference* 23 (1989), 71–82.
- [29] Devroye, L. and Lugosi, G., Lower bounds in pattern recognition and learning, *Pattern Recognition* 28 (1995), 1011–1018.
- [30] Devroye, L. and Wagner, T. J., Distribution-free consistency results in nonparametric discrimination and regression function estimation, *Annals of Statistics* 8 (1980), 231–239.
- [31] Dudley, R. M., Kulkarni, S., Richardson, T., and Zeitouni, O., A metric entropy bound is not sufficient for learnability, *IEEE Transactions on Information Theory* 40 (1994), 883–885.
- [32] Györfi, L., Universal consistencies of regression estimate for unbounded regression functions, in: *Nonparametric functional estimation and related topics* (G. Roussas, ed.), Kluwer Academic Publishers (Dordrecht, 1991), pp. 329–338.
- [33] Györfi, L., Kohler, M., Krzyżak, A., and Walk, H., *A Distribution-Free Theory of Nonparametric Regression*, Springer Verlag (2002).
- [34] Györfi, L., Kohler, M. and Walk, H., Weak and strong universal consistency of semi-recursive kernel and partitioning regression estimates, *Statist. Decisions* 16 (1998), 1–18.
- [35] Györfi, L., Páli, I. and van der Meulen, E. C., There is no universal source code for infinite alphabet, *IEEE Trans. on Information Theory* 40 (1994), 267–271.
- [36] Györfi, L. and van der Meulen, E. C., There is no density estimate consistent in information divergence for all densities, *Transactions of the Twelfth Prague Conference on Information Theory, Statistical Decision Functions, Random Processes* (1994), pp. 88–90.
- [37] Haussler, D., Littlestone, N. and Warmuth, M., Predicting $\{0, 1\}$ -functions on randomly drawn points, *Information and Computation* 115 (1994), 248–292.

- [38] Kearns, M. and Shapire, R. E., Efficient distribution-free learning of probabilistic concepts, *Journal of Computer Systems Sciences* **48** (1994), 464–497.
- [39] Kemperman, J. H. B., An optimum rate of transmitting information, *Ann. Math. Statist.* **40** (1969), 2156–2177.
- [40] Kulkarni, S. R., *Problems of computational and information complexity in machine vision and learning*, Ph.D. Thesis, Department of Electrical Engineering and Computer Science, MIT (1991).
- [41] Kullback, S., A lower bound for discrimination in terms of variation, *IEEE Trans. Information Theory* **13** (1967), 126–127.
- [42] Lee, W. S., Bartlett, P. and Williamson, R. C., Efficient agnostic learning of neural networks with bounded fan-in, *IEEE Transactions on Information Theory* **42** (1996), 2118–2132.
- [43] Liese, F. and Vajda, I., *Convex Statistical Distances*, Teubner (Leipzig, 1987).
- [44] Lugosi, G., Improved upper bounds for probabilities of uniform deviations, *Statistics and Probability Letters* **25** (1995), 71–77.
- [45] Lugosi, G. and Pintér (Horváth), M., Scale-sensitive dimensions and skeleton estimates for classification, *Discrete Applied Mathematics* **85** (1998), 37–61.
- [46] Pintér, M., On the rate of convergence of error estimates for the partitioning classification rule, *Theoretical Computer Science* **284**(1) (2002), 181–196. An extended abstract appeared in the Proceedings of the 4th European Conference on Computational Learning Theory (EU-ROCOLT'99),
- [47] Pollard, D., *Convergence of Stochastic Processes*, Springer-Verlag (New York, 1984).
- [48] Pollard, D., *Empirical Processes: Theory and Applications*, NSF-CBMS Regional Conference Series in Probability and Statistics, Institute of Math. Stat. and Am. Stat. Assoc (1990).
- [49] Schuurmans, D. E., *Effective classification learning*, Ph.D. thesis, University of Toronto (Toronto, CA, 1996).
- [50] Spiegelman, C. and Sacks, J., Consistent window estimation in nonparametric regression, *Annals of Statistics* **8** (1980), 240–246.
- [51] Stone, C. J., Consistent nonparametric regression, *Annals of Statistics* **5** (1977), 595–645.
- [52] Stone, C. J., Optimal global rates of convergence for nonparametric regression, *Annals of Statistics* **10** (1982), 1040–1053.
- [53] Vajda, I., *Theory of Statistical Inference and Information*, Kluwer Academic Publishers (1989).
- [54] Vapnik, V. N., *Estimation of Dependencies Based on Empirical Data*, Springer-Verlag (New York, 1982).
- [55] Vapnik, V. N., Inductive principles of the search for empirical dependencies, *Proceedings of the 2nd Annual Workshop on Computational Learning Theory* (1989).
- [56] Vapnik, V. N. and Chervonenkis, A. Ya., On the uniform convergence of relative frequencies of events to their probabilities, *Theory of Probability and its Applications* **16** (1971), 264–280.
- [57] Vapnik, V. N. and Chervonenkis, A. Ya., *Theory of Pattern Recognition*, Nauka (Moscow, 1974). (in Russian); German translation: *Theorie der Zeichenerkennung*, Akademie Verlag (Berlin, 1979).
- [58] Walk, H., Strong universal consistency of smooth kernel regression estimates, *Preprint 2002-8, Math. Institut A, Universität Stuttgart, Stuttgart* (2001) (submitted for publications)

- [59] Yang, Y., Minimax nonparametric classification — Part I: Rates of convergence, *IEEE Transactions on Information Theory* 45 (1999), 2271–2284.

(Beérkezett: 2002. május 10.)

ANTOS ANDRÁS
MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
SZÁMÍTÁSTECHNIKAI ÉS AUTOMATIZÁLÁSI KUTATÓ INTÉZETE,
INFORMATIKA KUTATÓ LABOR
ANTOS@SZIT.BME.HU

PINTÉR MÁRTA
BUDAPESTI MŰSZAKI ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI EGYETEM,
SZÁMÍTÁSTUDOMÁNYI ÉS INFORMÁCIÓELMÉLETI TANSZÉK
ÉS
MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
SZÁMÍTÁSTECHNIKAI ÉS AUTOMATIZÁLÁSI KUTATÓ INTÉZETE,
INFORMATIKA KUTATÓ LABOR
MARTI@SZIT.BME.HU

NONPARAMETRIC FUNCTION ESTIMATION

ANDRÁS ANTOS AND MÁRTA PINTÉR

The main purpose of this paper is to review the limits of nonparametric statistics in the fields of distribution estimation, density estimation, regression estimation and statistical pattern recognition (or classification).

The basic aim of mathematical statistics is to learn a probability law or its characteristics from data. The classical mathematical statistics consists mainly of parametric rules, when the statistician has some a priori information about the actual problem in order to assume that the unknown probability law belongs to a parametric class of distributions.

In case of nonparametric statistics the statistician has no such knowledge, therefore the construction of the rules applied cannot use any specific feature of the law, and the basic properties of the rule should be distribution-free.

We wish to estimate an unknown characteristic of the distribution of an observation. The estimation or prediction is based on previously collected data, independent samples from the distribution, and a loss function is defined to measure the quality of the estimate. For example, in regression estimation this loss function is the mean squared error, in pattern recognition it is the error probability, the probability that our decision is wrong in the sense that we classify the observation into an incorrect class.

An estimate is consistent if the loss function tends to zero (or its theoretical minimal value) in some sense as the sample size goes to infinity for any reasonable distribution. In each case, we can say that consistent estimates exist, but a universal rate of convergence cannot be guaranteed over all these distributions. However, for certain (nonparametric) classes of distributions, one can investigate uniform and individual convergence rates, and can also establish sharp lower bounds for these rates.

Quite often, in addition to the collected data, some supplementary information is also available about the distribution. Then we can exploit this knowledge using methods based on empirical loss minimization and we can give upper bounds on the rate of convergence in terms of appropriate dimensions of the distribution class.

ALSÓ ÉS FELSŐ KORLÁTOK RENDSZEREK MŰKÖDÉSI IDEJÉNEK VÁRHATÓ ÉRTÉKÉRE

HORVÁTH ALICE ÉS PRÉKOPA ANDRÁS

Budapest

A dolgozatban sorosan és párhuzamosan kapcsolt elemekből felépülő rendszerek működési idejének várható értékére adunk alsó és felső korlátot. E korlátok alkalmazását az teszi szükségessé, hogy bonyolult, nagy rendszerek esetében a működési idő várható értéke nem számítható ki numerikusan. A korlátok meghatározásakor a diszkrét momentum problémával kapcsolatos eredményekre támaszkodunk.

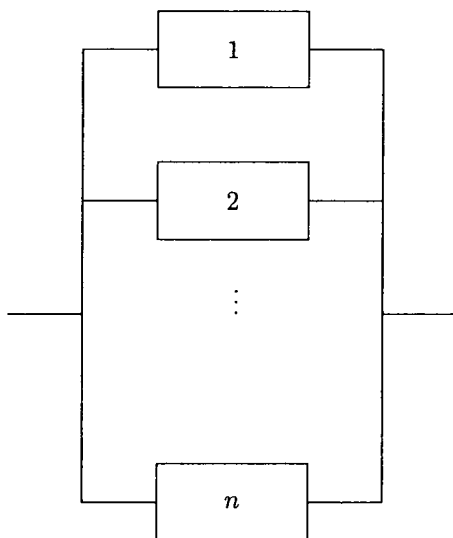
1. Bevezetés

Az ún. megbízhatósági rendszerek legegyszerűbb esetei a soros illetve párhuzamos kapcsolási rendszerek (ld. 1., 2. ábrák.)



1. ábra. Soros kapcsolási rendszer

A rendszerben szereplő 1-től n -ig számozott összetevőket komponenseknek nevezzük. A soros rendszer akkor és csak akkor működik, ha mindegyik komponense működik. A párhuzamos rendszer akkor és csak akkor működik, ha legalább egy komponense működik. Ha egyszerűség kedvéért feltételezzük, hogy az egyes komponensek egymástól függetlenül működnek, vagy nem működnek, és p_i jelöli annak a valószínűségét, hogy az i -edik komponens működik, akkor a soros, illetve párhuzamos



2. ábra. Párhuzamos kapcsolási rendszer

zamos rendszerek működési valószínűségét az alábbi képletek szolgáltatják:

$$(1.1) \quad r = p_1 p_2 \cdots p_n$$

$$(1.2) \quad r = 1 - (1 - p_1)(1 - p_2) \cdots (1 - p_n).$$

A gyakorlati problémákban az egyes komponensekkel kapcsolatban beszélhetünk azok élettartamáról. Ezekről feltesszük, hogy valószínűségi változók. Egyszerűség kedvéért tegyük fel azt is, hogy függetlenek. Ha az i -edik komponens élettartamát X_i jelöli és $F_i(t)$ ennek eloszlásfüggvénye,

$$(1.3) \quad F_i(t) = P(X_i \leq t), \quad i = 1, \dots, n,$$

akkor a rendszer t időpontbeli működési valószínűségét az (1.1), illetve (1.2) képletek szolgáltatják a

$$(1.4) \quad p_i = 1 - F_i(t), \quad i = 1, \dots, n$$

helyettesítéssel. A továbbiakban a rendszer működési valószínűségét a rendszer megbízhatóságának nevezzük. A gyakorlatban nemcsak a rendszer adott időpontbeli megbízhatóságának a valószínűségét akarjuk meghatározni, hanem más egyéb jellemző adatokat is. Ezek körében egyik legfontosabb a meghibásodásig eltelt idő várható értéke. Soros rendszer esetében a meghibásodásig eltelt időt az

$$(1.5) \quad X = \text{Min}(X_1, X_2, \dots, X_n),$$

párhuzamos rendszer esetében az

$$(1.6) \quad Y = \text{Max}(X_1, X_2, \dots, X_n),$$

valószínűségi változó adja meg.

Ezek várható értékét elvben meghatározhatjuk az alábbi módon. Ismeretes, hogy ha egy Z nemnegatív valószínűségi változó eloszlásfüggvénye $G(z)$, akkor

$$(1.7) \quad E(z) = \int_0^{\infty} [1 - G(z)] dz.$$

Első lépésben tehát az (1.4) és (1.5) képletekkel adott X, Y valószínűségi változók eloszlásfüggvényét kell meghatároznunk. Ez könnyen megtehető az $F_i(t)$, $i = 1, \dots, n$ eloszlásfüggvények ismeretében. Valóban, soros rendszer esetében azt kapjuk, hogy

$$(1.8) \quad \begin{aligned} F(t) &= P(X \leq t) = \\ &= P(\min(X_1, \dots, X_n) \leq t) = \\ &= 1 - P(\min(X_1, \dots, X_n) > t) = \\ &= 1 - P(X_1 > t, \dots, X_n > t) = \\ &= 1 - P(X_1 > t) \cdots P(X_n > t) = \\ &= 1 - (1 - F_1(t)) \cdots (1 - F_n(t)). \end{aligned}$$

Párhuzamos rendszer esetében viszont az adódik, hogy

$$(1.9) \quad \begin{aligned} G(t) &= P(Y \leq t) = P(\max(X_1, \dots, X_n) \leq t) = \\ &= P(X_1 \leq t, \dots, X_n \leq t) = \\ &= P(X_1 \leq t) \cdots P(X_n \leq t) = \\ &= F_1(t) \cdots F_n(t). \end{aligned}$$

A fentiek szerint a soros rendszer esetében a meghibásodásig eltelt idő várható értéke

$$(1.10) \quad \int_0^{\infty} [1 - F(t)] dt,$$

párhuzamos rendszer esetében pedig a várható érték

$$(1.11) \quad \int_0^{\infty} [1 - G(t)] dt.$$

Bonyolultabb esettel állunk szemben akkor, ha az X_1, \dots, X_n valószínűségi változók sztochasztikusan összefüggők.

A továbbiakban gyakran fel fogjuk használni az ún. szita formulát, mely tetszőleges A_1, \dots, A_n eseményekre érvényes:

$$(1.12) \quad P(A_1 \cup \dots \cup A_n) = S_1 - S_2 + S_3 - \dots + (-1)^{n-1} S_n,$$

ahol

$$(1.13) \quad S_k = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}), \quad k = 1, \dots, n.$$

E formulát gyakran Poincaré formulának nevezik, arra való tekintettel hogy ezt Poincaré (1896) dolgozatában közölte. A szakirodalom tanúsága szerint azonban a formulát, sőt ennek néhány általánosítását is C. Jordan (1867) dolgozata már tartalmazza. A szita formula módszerének történetét és alkalmazását illetően ld. Takács (1967) cikkét és Prékopa (1995) könyvét. Az (1.13) képlettel adott mennyiségeket binomiális momentumoknak nevezzük. Az elnevezést az alábbi tétel indokolja, melynek bizonyítása megtalálható az említett cikkben és könyvben.

1.1. TÉTEL. Jelölje V az A_1, \dots, A_n események közül azoknak a számát, amelyek bekövetkeznek. Nyilvánvaló, hogy a V valószínűségi változó lehetséges értékei $0, 1, \dots, n$. Azt állítjuk, hogy fennáll az alábbi egyenlőség

$$(1.14) \quad E \left[\binom{V}{k} \right] = S_k, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

Alkalmazzuk az (1.12) képletet az $X_i \leq (t)$, $i = 1, \dots, n$ eseményekre, figyelembe véve, hogy

$$(1.15) \quad F(t) = P(X \leq t) = P(\min(X_1, \dots, X_n) \leq t) = P(A_1 \cup \dots \cup A_n).$$

Mielőtt a formulát felírnánk, bevezetjük az alábbi jelöléseket:

$$(1.16) \quad F_{i_1, \dots, i_k}(t) = P(X_{i_1} \leq t_1, \dots, X_{i_k} \leq t), \quad 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$$

$$(1.17) \quad S_k(t) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} F_{i_1 \dots i_k}(t), \quad k = 1, \dots, n.$$

E jelölésekkel érvényes az alábbi egyenlőség:

$$(1.18) \quad F(t) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} S_k(t),$$

továbbá, az (1.7) formula szerint az alábbi egyenlőség is:

$$(1.19) \quad E(X) = \int_0^\infty [1 - F(t)] dt = \int_0^\infty \left[1 - \sum_{k=0}^n (-1)^k S_k(t) \right] dt.$$

Az (1.16), (1.17) képlethez hasonlóan értelmezzük az

$$(1.20) \quad \bar{F}_{i_1, \dots, i_k}(t) = P(X_{i_1} > t_1, \dots, X_{i_k} > t), \quad 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$$

$$(1.21) \quad \bar{S}_k(t) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \bar{F}_{i_1, \dots, i_k}(t), \quad k = 1, \dots, n.$$

függvényeket. Ezek segítségével felírhatjuk a párhuzamos rendszer működési idejének várható értékét. Fennáll az, hogy

$$\begin{aligned} (1.22) \quad 1 - G(t) &= P(Y > t) = P(\max(X_1, \dots, X_n) > t) = \\ &= P(\bar{A}_1 \cup \dots \cup \bar{A}_n) = \\ &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} P(\bar{A}_{i_1} \cap \dots \cap \bar{A}_{i_k}) = \\ &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \bar{S}_k(t). \end{aligned}$$

Innen pedig azt kapjuk, hogy

$$(1.23) \quad E(Y) = \int_0^\infty [1 - G(t)] dt = \int_0^\infty \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \bar{S}_k(t) dt.$$

Megjegyezzük még, hogy ha az (1.12) (1.13) formulában szereplő mennyiségeken (binomiális momentumokon) kívül bevezetjük még az

$$(1.24) \quad \bar{S}_k = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} P(\bar{A}_{i_1} \cap \dots \cap \bar{A}_{i_k}), \quad k = 1, \dots, n$$

mennyiségeket, akkor érvényes az alábbi összefüggés

$$(1.25) \quad \bar{S}_k = \binom{n}{k} + \sum_{i=1}^k \binom{n-i}{k-i} (-1)^i S_i, \quad k = 1, \dots, n.$$

Ugyanez nyilván érvényben marad akkor is, ha S_k helyébe \bar{S}_k szimbólumot és \bar{S}_k helyébe az S_k szimbólumot helyettesítjük. Ugyanis az (1.25) formulát alkalmazhatjuk az $\bar{A}_1, \dots, \bar{A}_n$ eseményekre is.

Az (1.19) és az (1.23) képleteknek elsősorban elvi, mintsem gyakorlati jelentőségük van. Ugyanis, ha n nagy szám, akkor, az $S_1(t), \dots, S_n(t)$ és az $\bar{S}_1(t), \dots, \bar{S}_n(t)$ binomiális momentumok közül csupán az alacsony indexűek számíthatók ki. Fontos tehát, hogy a $E(X)$ és $E(Y)$ várható értékekre a gyakorlatban használható alsó és felső korlátokat dolgozzunk ki, melyekben az előbb említett binomiális momentumok közül csupán az alacsony indexűek fordulnak elő.

2. A binomiális momentumprobléma

Legyen A_1, \dots, A_n tetszőleges események egy tetszőleges eseménytérben, és S_k , \bar{S}_k , $k = 1, \dots, n$ az (1.13) és az (1.24) képletekkel adott mennyiségek. Vezessük még be a

$$(2.1) \quad v_i = P(V = i), \quad i = 0, 1, \dots, n$$

jelölést. Az 1.1. Tétel szerint fennállnak az alábbi egyenlőségek (ahol $S_0 = 1$):

$$(2.2) \quad \sum_{i=0}^n \binom{i}{k} v_i = S_k, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

A (2.2) egyenlőségeket a v_0, v_1, \dots, v_n számokra nézve egyenletrendszernek tekinthetjük, melynek mátrixa az alábbi;

$$(2.3) \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ & 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ & & 1 & \binom{3}{2} & \dots & \binom{n}{2} \\ & & & 1 & \dots & \binom{n}{3} \\ & & & & \ddots & \vdots \\ & & & & & 1 \end{pmatrix},$$

ahol a fődiagonális alatt zérók állnak. A (2.3) mátrix nem szinguláris, inverze (ld. pl. Riordan 1968) az alábbi:

$$(2.4) \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & \dots & (-1)^{n+1} \\ & 1 & -2 & 3 & \dots & (-1)^n n \\ & & 1 & -\binom{3}{2} & \dots & (-1)^{n-1} \binom{n}{2} \\ & & & 1 & \dots & (-1)^{n-2} \binom{n}{3} \\ & & & & \ddots & \vdots \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

A (2.2) egyenletrendszerből tehát v_0, v_1, \dots, v_n meghatározhatók, eredményül azt kapjuk, hogy

$$(2.5) \quad v_i = \sum_{k=0}^n (-1)^{k-1} \binom{k}{i} S_k, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Nyilvánvaló, hogy fennáll a

$$(2.6) \quad P(V \geq 1) = v_1 + \dots + v_n$$

egyenlőség.

Tegyük most fel, hogy az S_k , $k = 0, 1, \dots, m$ binomiális momentumok közül csupán az S_k , $k \leq m$ értékek ismertek. Ekkor a (2.2) egyenlőségrendszerből csak az alábbiakat megtartva:

$$\sum_{i=0}^n \binom{i}{k} v_i = S_k, \quad k = 0, 1, \dots, m,$$

$$v_i \geq 0, \quad i = 0, 1, \dots, n$$

a nemnegativitási feltételeket előírva, a (2.6) egyenlőség jobb oldalán álló összeget pedig minimalizálva, illetve maximalizálva, két lineáris programozási feladatot kapunk. Ezek optimum értékei a $P(V \geq 1)$ valószínűségekre vonatkozólag alsó illetve felső korlátokat szolgáltatnak. Tekintsük tehát az alábbi lineáris programozási feladatokat:

$$\min (\max) \sum_{i=1}^n v_i$$

feltéve, hogy

(2.7)

$$\sum_{i=1}^n \binom{i}{k} v_i = S_k, \quad k = 0, 1, \dots, m$$

$$v_i \geq 0, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

A (2.7) feladatokban v_0, v_1, \dots, v_n döntési változók. Ha v_{\min} , illetve v_{\max} jelentik ezen feladatok optimum értékeit, akkor tehát fennáll az, hogy

$$(2.8) \quad v_{\min} \leq P(V \geq 1) \leq v_{\max}.$$

Ezen túlmenően azt is állíthatjuk, és ez a fenti megfogalmazásból nyilvánvaló, hogy a (2.8) alsó és felső korlátok élesek, vagyis csupán az S_k , $k \leq m$ binomiális momentumokra támaszkodva nem adhatók jobb korlátok.

A (2.7) feladatok mellett megfogalmazunk még egy másik feladatpárt, mely (2.7)-től abban különbözik, hogy nem szerepel bennük S_0 sora és v_0 oszlopa. Az új feladatpár tehát az alábbi:

$$\min (\max) \sum_{i=1}^n v_i$$

(2.9)

feltéve, hogy

$$\sum_{i=1}^n \binom{i}{k} v_i = S_k, \quad k = 1, \dots, n.$$

Jelöljék V_{\min} és V_{\max} a (2.9) feladatok optimum értékét. Könnyű belátni hogy a (2.9) minimum feladat optimum értéke megegyezik a (2.7) minimum feladat optimum értékével, vagyis $V_{\min} = v_{\min}$. Ugyanis a (2.9) feladat megengedett megoldásai között v_1, \dots, v_n valódi értékei is helyet foglalnak és így az optimum érték nem nagyobb 1-nél.

Másfelől a (2.9) feladat minden olyan megengedett megoldása, melyre $v_1 + \dots + v_n \leq 1$, kölcsönösen és egyértelműen megfeleltethető a (2.7) feladat $v_0 = 1 - v_1 - \dots - v_n$, v_1, \dots, v_n megengedett megoldásának és a megfelelő megengedett megoldásokon a célfüggvényértékek egyenlők.

A maximum feladatok optimum értékei nem feltétlenül egyenlők. A (2.9) maximumfeladat optimumértéke ugyanis lehet 1-nél nagyobb is. Fennáll azonban a

$$(2.10) \quad v_{\max} = \min(V_{\max}, 1)$$

egyenlőség. Ugyanis a (2.7) feladatot oly módon is megfogalmazhatjuk, hogy azt a feltételt, melyben v_0 szerepel, a $v_1 + \dots + v_n \leq 1$ feltétellel pótoljuk, és elhagyjuk a $v_0 \geq 0$ nemnegativitási követelményt is. Ekkor azonban a feltételek között helyet foglal egy olyan is, mely a célfüggvényre vonatkozólag ír elő felső korlátot (ti. azt, hogy $v_1 + \dots + v_n \leq 1$). Ilyen esetben a célfüggvényre vonatkozó korlátozó egyenlőtlenség elhagyható, viszont az így kapott optimum érték és a célfüggvény korlátjának a maximuma szolgáltatja a kívánt optimum értéket, esetünkben a (2.7) maximum feladat optimum értékét. Ezzel a (2.10) egyenlőséget beláttuk.

Érdekes még felírni a (2.9) feladatok duálisait. A (2.9) minimum feladat duálisa az alábbi:

$$(2.11) \quad \begin{aligned} & \text{Max} \sum_{k=1}^m S_k x_k \\ & \text{feltéve, hogy} \\ & \sum_{k=1}^m \binom{i}{k} x_k \leq 1, \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

A (2.9) maximum feladat duálisa pedig következő

$$(2.12) \quad \begin{aligned} & \text{Min} \sum_{k=1}^m S_k y_k \\ & \text{feltéve, hogy} \\ & \sum_{k=1}^m \binom{i}{k} y_k \geq 1, \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

A binomiális momentumproblémát Prékopa (1988) fogalmazta meg és vizsgálta legfontosabb tulajdonságait. E dolgozatban megtalálható a duális feladatok interp-

retációja is. A (2.11) és a (2.12) feladatokban a változók nincsenek nemnegativitási feltétellel korlátozva. Tekintsük az általános lineáris programozási feladatot:

$$(2.13) \quad \begin{aligned} &\min(\max) \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ &\text{feltéve hogy} \\ &\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \end{aligned}$$

ahol A $m \times n$ -es mátrix, \mathbf{c} , \mathbf{x} n -komponensű, \mathbf{b} m -komponensű vektor, $m \leq n$. Feltesszük, hogy A rangja m -mel egyenlő. Bevezetjük még az

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n), & \mathbf{b} &= (b_1, \dots, b_m)^T \\ \mathbf{x} &= (x_1, \dots, x_n)^T, & \mathbf{c} &= (c_1, \dots, c_n)^T \end{aligned}$$

jelöléseket.

1. *Definíció.* Ha az $\{\mathbf{a}_i, i \in I\}$, $|I| = m$ vektorok lineárisan függetlenek, akkor azt mondjuk, hogy ezek az $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\}$ vektorok egy bázisát alkotják. A bázis elnevezést a

$$\mathbf{B} = (\mathbf{a}_i, i \in I)$$

mátrixra is alkalmazzuk, ahol az oszlopvektorokat a növekvő indexek sorrendjében helyezzük el.

2. *Definíció.* A B bázist megengedettnek nevezzük, ha a $\mathbf{B}\mathbf{x}_B = \mathbf{b}$ egyenlet \mathbf{x}_B megoldására teljesül az $\mathbf{x}_B \geq \mathbf{0}$ egyenlőtlenség. Ha \mathbf{x}_B minden komponense pozitív, akkor a bázis nem degenerált. Ellenkező esetben degenerált.

3. *Definíció.* A B bázist duál megengedettnek nevezzük a minimum (maximum) feladatra nézve, ha teljesül az, hogy

$$(2.14) \quad \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{a}_i \leq (\geq) c_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Ha $i \in I$, akkor (2.14) egyenlőséggel teljesül. Ha minden olyan i esetén, melyre $i \in I$, a határozott egyenlőség teljesül (2.14)-ben, akkor a bázis duál nem-degenerált. Ellenkező esetben duál-degenerált.

A lineáris programozással kapcsolatos legfontosabb ismereteket illetően hivatkozunk Prékopa (1968, 1975) könyvére, illetve (1996) cikkére.

A továbbiakban néhány ismert tételt említünk meg. Az elsőhöz szükségünk van a (2.13) feladat duálisára:

$$(2.15) \quad \begin{aligned} &\max(\min) \mathbf{b}^T \mathbf{y} \\ &\text{feltéve hogy} \\ &\mathbf{A}^T \mathbf{y} \leq (\geq) \mathbf{c}. \end{aligned}$$

2.1. TÉTEL. A (2.15) feladat megengedett megoldásai által meghatározott konvex poliéder csúcsainak halmaza megegyezik azoknak az y vektoroknak a halmazával, amelyek megoldásai valamely $y^T B = c_B^T$ egyenletnek, ahol B a (2.13) feladat duál megengedett bázisa. A tétel közismert bizonyítása elemi módszerekkel elvégezhető.

2.2. TÉTEL (Gessel és Viennot (1985), Prékopa (1988)). A (2.3) mátrix minden olyan minora (egy négyzetes rész determinánsa), melyben a fődiagonálisban (és akkor fölötte is) pozitív elemek állnak, pozitív.

E tétel felhasználásával Prékopa (1988) bebizonyította az alábbi tételt:

2.3. TÉTEL. Tegyük fel, hogy a (2.13) feladat a (2.9) feladat tömör alakja. Ekkor a B bázis duál megengedett akkor és csak akkor, ha oszlopainak I index halmaza az alábbi típusú

	m páros	m páratlan
Min feladat	$i, i+1, \dots, j, j+1$	$i, i+1, \dots, j, j+1, n$
Max feladat	$1, i, i+1, \dots, j, j+1, n$	$1, i, i+1, \dots, j, j+1.$

A 2.3 un. duál megengedett bázis struktúra tétel igen fontos a (2.9) feladat algoritmikus megoldása szempontjából.

A feladatot ugyanis a duál módszer segítségével könnyen meg tudjuk oldani. Ebben két igen fontos egyszerűsítési lehetőség áll rendelkezésünkre: (1) induló duál megengedett bázist egyszerűen tudunk nyerni, nem kell mást tennünk, mint a 2.3. Tételnek megfelelő struktúrájú indexhalmazt és a hozzá tartozó vektorokat kiválasztani, (2) ha valamely lépésben a bázisból kimenő vektort meghatároztuk, akkor a bázisba bejövő vektor egyértelműen adott azáltal, hogy annak indexe a 2.3. Tétel szerinti struktúrát kell, hogy helyreállítsa. Ennek alapján a (2.9) feladat megoldására vonatkozó duál algoritmust az alábbiakban összegezhadjük.

1. Választunk egy B , a 2.3. Tételnek megfelelő induló, duál megengedett bázist.
2. Ellenőrizzük, hogy fennáll-e a $B^{-1}b \geq 0$ reláció. Ha igen, menjünk a 4. lépésre. Ha nem, akkor választunk egy olyan j indexet, melyre $(B^{-1}b)_j < 0$ és menjünk a 3. lépésre.
3. Távolítsuk el a bázisból a B mátrix j -edik vektorát, s helyette vonjuk be azt a vektort, amely a duál megengedett bázis struktúrát helyreállítja.
4. Stop, B optimális bázis.

Az alábbiakban bebizonyítunk egy fontos tételt, melynek egy gyengébb változata szerepel Boros és Prékopa (1990) cikkében.

2.4. TÉTEL. Jelöljük p_1, \dots, p_s a (2.11) feladat megengedett megoldásai K konvex poliéderének csúcsait. Tekintsük a K halmaz Carathéodory-féle (1911) előállításában szereplő (konvex) $\text{conv}(p_1, \dots, p_s)$ halmazt.

Ha $x \in \text{conv}(p_1, \dots, p_s)$, akkor komponensei alternáló előjelűek, pozitív előjellel kezdődően, továbbá

$$(2.16) \quad |x_1| \geq |x_2| \geq \dots \geq |x_m|.$$

Bizonyítás. Elegendő az állítást a megengedett megoldások konvex poliéderének csúcsain bizonyítani, ugyanis a $\text{conv}(p_1, \dots, p_s)$ halmaz minden egyéb vektora a csúcsok konvex kombinációjaként áll elő. Legyen x csúcsa a megengedett megoldások halmazának. Ekkor a 2.1. Tétel szerint x megoldása az

$$(2.17) \quad x^T B = c_B^T = (1, \dots, 1)^T$$

egyenletnek, valamely B duál megengedett megoldás esetén. Innen az adódik, hogy $x^T = c_B^T B^{-1}$. Ez a vektor viszont előfordul az

$$(2.18) \quad \begin{pmatrix} 1 & c_B^T \\ 0 & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -c_B^T B^{-1} \\ 0 & B^{-1} \end{pmatrix}$$

mátrix alsó sorában. Az

$$\begin{pmatrix} 1 & c_B^T \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

mátrix inverzének első sorát képezve olyan minorokat kell alternáló előjellel ellátni, melyek a 2.2. Tétel szerint pozitívak. Ebből következik, hogy az $(1, -c_B^T B^{-1})$ sorvektor komponensei is alternáló előjelűek, a $+$ jellel kezdődően.

A (2.16) reláció hasonlóan bizonyítható, mint Boros és Prékopa (1989) cikkében a megfelelő állítás. A binomiális momentumprobléma egy másik változata lehetőséget nyújt arra vonatkozólag, hogy legalább r esemény bekövetkezésének a valószínűségére adjunk alsó és felső korlátokat. Ekkor a (2.9) feladatok helyett az alábbiakat fogalmazzuk meg:

$$(2.19) \quad \min(\max) \sum_{i=r}^n v_i$$

feltéve, hogy

$$\sum_{i=0}^n \binom{i}{k} v_i = S_k, \quad k = 0, 1, \dots, m.$$

Ha $v_{\min}^{(r)}$ és $v_{\max}^{(r)}$ jelentik a (2.19) feladatok optimum értékeit, akkor fennállnak az alábbi egyenlőtlenségek:

$$(2.20) \quad v_{\min}^{(r)} \leq P(V \geq r) \leq v_{\max}^{(r)}$$

Vegyük észre, hogy most megtartottuk az S_0 -hoz tartozó sort és a v_0 -hoz tartozó oszlopot a feladatban. A gondolatmenet, amelyet alkalmaztunk akkor, amikor a (2.7) feladatot a (2.9) feladatra redukáltuk, most nem alkalmazható. Ha a (2.18) feladatot a (2.13) alakba írjuk, akkor az A mátrix $(m+1) \times (n+1)$ -es, az x és a c vektorok $n+1$ komponensűek, b pedig $m+1$ komponensű vektor. A c vektor $(0, \dots, 0, 1, \dots, 1)^T$ alakú, ahol a zérók száma r . Az így nyert feladat számunkra az $r = n$ esetben lesz fontos. Erre vonatkozólag fennáll az alábbi duál megengedett bázis struktúra tétel.

2.5. TÉTEL (Prékopa 1988). *A B bázis duál megengedett akkor és csak akkor, ha a bázis vektorainak I indexhalmaza ($|I| = m+1$) az alábbi struktúrák valamelyikébe tartozik:*

	$m+1$ páros	$m+1$ páratlan
Min feladat	$I \subset \{0, \dots, n-1\}$	$I \subset \{0, \dots, n-1\}$
	$i, i+1, \dots, j, j+1, n-1, n$	$0, i, i+1, \dots, j, j+1, n-1, n$
Max feladat	$0, i, i+1, \dots, j, j+1, n$	$i, i+1, \dots, j, j+1, n.$

Az $I \subset \{0, \dots, n-1\}$ esetekben a triviális, 0 alsó korlát adódik. Ez azt jelenti, hogy a feladat megoldásakor célszerű olyan induló bázist választani, melyre $I \not\subset \{0, \dots, n-1\}$. Az algoritmus során az a_n vektort benn tartjuk a bázisban, ameddig lehet. Ha az a_n vektort nem lehet már a bázisban tartani, akkor az új bázismegoldáson a célfüggvényérték 0, de egy ciklizálást elkerülő módszerrel tovább haladva, a_n esetleg visszatérhet és az optimum érték pozitív lehet.

3. Alkalmazás rendszerek működési ideje alsó és felső korlátjának meghatározására

Az 1. szakaszban bevezettük az egyes komponensek élettartamára az X_1, \dots, X_n , továbbá az $\{X_i \leq t\}$, $i = 1, \dots, n$ eseményekre az A_i , $i = 1, \dots, n$ jelöléseket. A soros rendszer élettartamára az X , a párhuzamos rendszer élettartamára pedig az Y jelölést alkalmazzuk. Ekkor

$$X = \min(X_1, \dots, X_n)$$

$$Y = \max(Y_1, \dots, Y_n),$$

E valószínűségi változók eloszlásfüggvényére korábban az $F(t)$, illetve a $G(t)$ jelölést vezettük be:

$$F(t) = P(X \leq t)$$

$$G(t) = P(Y \leq t).$$

Bevezetjük még az

$$\bar{F}(t) = 1 - F(t)$$

$$\bar{G}(t) = 1 - G(t)$$

jelöléseket is.

Ezek alapján felírhatjuk, hogy

$$(3.1) \quad \bar{F}(t) = 1 - F(t) = 1 - P(A_1 \cup \dots \cup A_n) = P(\bar{A}_1 \cap \dots \cap \bar{A}_n),$$

$$(3.2) \quad \bar{G}(t) = 1 - G(t) = 1 - P(A_1 \cap \dots \cap A_n) = P(\bar{A}_1 \cup \dots \cup \bar{A}_n).$$

Az A_1, \dots, A_n események is a t változó függvényei, ám ennek feltüntetésétől eltekintünk. A binomiális momentumok t -től való függését a továbbiakban feltüntetjük és S_k, \bar{S}_k helyett az $S_k(t), \bar{S}_k(t)$ jelöléseket alkalmazzuk.

Mind a soros, mind a párhuzamos rendszerek esetében két feladatpárt fogalmazhatunk meg annak a valószínűségnek a korlátozására, hogy a rendszer túlélje a t időpontot. Tekintsük előbb a soros rendszert. A (3.1) képlet szerint az $\bar{F}(t)$ valószínűség korlátainak meghatározására a $P(A_1 \cup \dots \cup A_n)$, vagy a $P(\bar{A}_1 \cap \dots \cap \bar{A}_n)$ valószínűség korlátait kell meghatároznunk. A $P(A_1 \cup \dots \cup A_n)$ valószínűség éles alsó és felső korlátjának meghatározására megfogalmazzuk a

$$(3.3) \quad \begin{aligned} & \min(\max) \sum_{i=1}^n v_i \\ & \text{feltéve, hogy} \\ & \sum_{i=1}^n \binom{i}{k} v_i = S_k(t), \quad k = 1, \dots, n \\ & v_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

lineáris programozási feladatokat.

Ezek optimum értékére bevezetjük a $V_{\min}(t)$ és a $V_{\max}(t)$ jelöléseket. Ekkor fennállnak az alábbi relációk:

$$(3.4) \quad V_{\min}(t) \leq P(A_1 \cup \dots \cup A_n) = 1 - \bar{F}(t) \leq \text{Min}(V_{\max}(t), 1)$$

$$(3.5) \quad \text{Max}(1 - V_{\max}(t), 0) \leq \bar{F}(t) \leq 1 - V_{\min}(t).$$

A (3.5) relációból integrálás után azt kapjuk, hogy

$$(3.6) \quad \int_0^\infty [1 - V_{\max}(t)]_+ dt \leq \int_0^\infty \bar{F}(t) dt = E(x) \leq \int_0^\infty (1 - V_{\min}(t)) dt,$$

ahol $[x]_+ = x$, ha $x \geq 0$ és $[x]_+ = 0$, ha $x < 0$. A soros rendszer működési ideje várható értékének becslésére felhasználhatjuk az $\bar{F}(t) = P(\bar{A}_1 \cap \dots \cap \bar{A}_n)$ egyenlőséget is. Ekkor az alábbi feladatot fogalmazzuk meg:

$$(3.7) \quad \begin{aligned} & \min (\max) v_n \\ & \text{feltéve, hogy} \\ & \sum_{i=1}^n \binom{i}{k} v_i = \bar{S}_k(t), \quad k = 0, 1, \dots, m \\ & v_i \geq 0, \quad i = 0, 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Ha ennek optimum értékeit $v_{\min}(t)$ és $v_{\max}(t)$ jelölik, akkor fennállnak az alábbi relációk:

$$(3.8) \quad v_{\min}^{(n)}(t) \leq P(\bar{A}_1 \cap \dots \cap \bar{A}_n) = \bar{F}(t) \leq v_{\max}^{(n)}(t)$$

$$(3.9) \quad \int_0^\infty v_{\min}^{(n)}(t) dt \leq \int_0^\infty \bar{F}(t) dt = E(X) = \int_0^\infty v_{\max}^{(n)}(t) dt.$$

Hasonlóképpen járunk el a párhuzamos rendszer esetében. Ha a $\bar{G}(t) = P(\bar{A}_1 \cup \dots \cup \bar{A}_n)$ egyenlőségből indulunk ki, akkor $\bar{G}(t)$ alsó és felső becslésének meghatározására az alábbi lineáris programozási feladatot írjuk fel:

$$(3.10) \quad \begin{aligned} & \min (\max) \sum_{i=1}^n v_i \\ & \text{feltéve, hogy} \\ & \sum_{i=1}^n \binom{i}{k} v_i = \bar{S}_k(t), \quad k = 1, \dots, m \\ & v_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Az optimum értékeket a $V_{\min}(t)$, $V_{\max}(t)$ szimbólumokkal jelölve, fennállnak az alábbi egyenlőtlenségek:

$$(3.11) \quad V_{\min}(t) \leq \bar{G}(t) \leq \text{Min}(V_{\max}(t), 1)$$

$$(3.12) \quad \int_0^\infty V_{\min}(t) dt \leq \int_0^\infty \bar{G}(t) dt = E(Y) \leq \int_0^\infty \text{Min}(V_{\max}(t), 1) dt.$$

Ha viszont a $\bar{G}(t) = 1 - P(A_1 \cap \dots \cap A_n)$ egyenlőségből indulunk ki, akkor az alábbi LP szolgáltatja a korlátokat:

$$(3.13) \quad \begin{aligned} & \min (\max) v_n \\ & \text{feltéve, hogy} \\ & \sum_{i=1}^n \binom{i}{k} v_i = S_k(t), \quad k = 0, 1, \dots, n \\ & v_i \geq 0, \quad i = 0, 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Ha $v_{\min}^{(t)}$ és $v_{\max}^{(n)}(t)$ jelölik az optimum értéket, akkor fennállnak az alábbi egyenlőtlenségek:

$$(3.14) \quad v_{\min}^{(n)}(t) \leq P(A_1 \cup \dots \cup A_n) = 1 - \bar{G}(t) \leq v_{\max}^{(n)}(t)$$

$$(3.15) \quad 1 - v_{\max}^{(n)}(t) \leq \bar{G}(t) \leq 1 - v_{\min}^{(n)}(t).$$

Az alábbi egyenlőtlenségből integrálással nyerjük a működési idő várható értékére vonatkozó korlátokat:

$$(3.16) \quad \int_0^{\infty} (1 - v_{\max}^{(n)}(t)) dt \leq \int_0^{\infty} \bar{G}(t) dt = E(Y) \leq \int_0^{\infty} (1 - v_{\min}^{(n)}(t)) dt.$$

A (3.6), (3.9), (3.12) és a (3.16) integrálok meghatározásában a problémát az okozza, hogy az optimális bázis a t változó függvényében változik, tehát az éles korlátok meghatározásakor nem támaszkodhatunk csupán egy bázisra. Mindamellett az

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_0^{\infty} \bar{F}(t) dt \\ E(Y) &= \int_0^{\infty} \bar{G}(t) dt \end{aligned}$$

várható értékekre vonatkozólag egyetlen bázisra támaszkodva is adhatunk korlátokat, ezek azonban gyengébbek lesznek a fent említettekénél. Mielőtt bemutatnánk mi módon lehetséges ez, megállapodunk abban, hogy a soros rendszer esetében a (3.3), a párhuzamos rendszer esetében pedig a (3.10) LP-re támaszkodunk. Ez azt jelenti, hogy a működési idő várható értékére a soros rendszer esetében a (3.6), a párhuzamos rendszer esetében pedig a (3.12) formula szolgáltatja a kívánt korlátokat. Ismeretes, hogy ha a (3.13) lineáris programozási minimum (maximum) feladatnak B egy duál megengedett bázisa, akkor fennáll az alábbi egyenlőtlenség

$$(3.17) \quad \begin{aligned} c_B^T B^{-1} b &\leq c^T x_{\text{opt}} \\ (c_B^T B^{-1} b &\geq c^T x_{\text{opt}}), \end{aligned}$$

ahol x_{opt} az optimális megoldás. A legjobb korlátokat akkor kapjuk, ha (3.17)-ben vesszük B -re vonatkozólag a maximumot (minimumot), vagy ami ugyanaz, vesszük az optimális B bázist.

Ezt az elvet alkalmazhatjuk az $E(X)$, $E(Y)$ várható értékek becslésére oly módon, hogy vesszük a (3.3) illetve a (3.10) feladatokban az adott duál megengedett B bázishoz tartozó célfüggvényértéket:

$$(3.18) \quad c_B^T B^{-1} S(t), \quad c_B^T B^{-1} \bar{S}(t),$$

ahol $c_B^T = (1, \dots, 1)^T$, $S(t) = (S_1(t), \dots, S_m(t))$, $\bar{S}(t) = (\bar{S}_1(t), \dots, \bar{S}_m(t))$ és az így nyert függvények integráljai segítségével képezzük a korlátokat.

Ha a (3.6), (3.9) formulákra támaszkodva alkotjuk meg a korlátokat, akkor azt mondjuk, hogy ezek (t szerint) változó bázishoz tartozó korlátok. Ha pedig a (3.18) függvények integrálása révén nyerjük a korlátokat, akkor azt mondjuk, hogy ezek rögzített bázishoz tartozó korlátok. Ebben az utóbbi esetben is van lehetőségünk optimalizálásra, amint a későbbiekben kitűnik.

4. A feltételtér felbontása poliedrikus kúpokra

A (2.13) lineáris programozási feladatban szereplő b vektorok terét, tehát az \mathbb{R}^m teret feltételtérnek nevezzük. Az x vektorok \mathbb{R}^n terének pedig megoldástér a neve.

A (2.13) feladatot a (3.3), vagy a (3.7) feladatra fogjuk specializálni, midőn t rögzített pozitív szám.

Mind a (3.3), mind a (3.7) feladatok bázisai duál nem-degeneráltak. Ha egy bázis duál megengedett, akkor ahhoz, hogy optimális legyen, primál megengedettnak is kell lennie. Ha B egy duál megengedett bázis, akkor a bázis optimalizálásának szükséges és elegendő feltétele a $B^{-1}b \geq 0$ egyenlőség.

Soroljuk fel képezetben a duál megengedett bázisokat: B_1, \dots, B_r . Minthogy mindegyik duál nem-degenerált, a

$$(4.1) \quad B_1^{-1}b \geq 0, \dots, B_r^{-1}b \geq 0$$

relációk közös belső pont nélkül poliedrikus kúpokra osztják fel a

$$(4.2) \quad \{b \mid Ax = b, x \geq 0\}$$

poliedrikus kúpot. A (4.2) halmaz azoknak a b vektoroknak a halmaza, melyekre a (2.13) feladatnak van megengedett megoldása. A (4.2) halmaz fent említett típusú felosztása abból következik, hogy a (2.13) LP (mely a (3.3) és a (3.7) feladatok valamelyikét jelenti) rendelkezik megengedett megoldással és véges optimummal (megengedett megoldás azért van, mert a b vektort ténylegesen létező valószínűségi változókkal kapcsolatos eseményekből számítjuk; véges optimuma pedig azért

van, mert a megengedett megoldások halmaza korlátos) és a bázisok duál nem-degeneráltak.

Vezessük be b helyett a $b(t)$ jelölést. Egy rögzített t esetén a felosztó poliedrikus kúpok határpontjaitól eltekintve, csak egy teljesül a (4.1) egyenlőtlenségek közül. Ha ez a $B_i^{-1}b(t) \geq 0$ egyenlőtlenség, akkor az optimum érték az adott t esetén, egyenlő a

$$(4.3) \quad c_B^T B_i^{-1} b(t)$$

értékkel.

Ha meg akarjuk kapni a (3.4) - (3.6) relációkban szereplő $V_{\min}(t)$ és $V_{\max}(t)$ értékeket minden $t \geq 0$ számra, akkor erre két lehetőség adódik, ezek a következők.

I. Felsoroljuk a B_1, \dots, B_r duál megengedett bázisokat és mindegyik B_i esetben meghatározzuk a t értékeknek azt az intervallumát, amelyre teljesül az, hogy

$$(4.4) \quad B_i^{-1}b(t) \geq 0, \quad t \in J_i.$$

A $J_i, i = 1, \dots, r$ intervallumok egyesítése egyenlő a $\{t \mid t \geq 0\}$ halmazzal, közülük bármely kettőnek legfeljebb csak a határpontjai lehetnek közösek.

II. A t változót növeljük 0-tól ∞ -ig és közben regisztráljuk, hogy mely bázisokra teljesül a primál megengedethez. Most is ugyanezeket a $J_i, i = 1, \dots, r$ intervallumokat kapjuk, legfeljebb más sorrendben.

Ha B_1, \dots, B_r a (3.3) feladatra specializált (2.13) minimum feladat duál megengedett bázisai, akkor a (3.6) egyenlőtlenségben szereplő jobb oldali integrálra azt kapjuk, hogy

$$(4.5) \quad \int_0^{\infty} (1 - V_{\min}(t)) dt = \sum_{i=1}^r \int_{J_i} (1 - c_B^T B_i^{-1} b(t)) dt.$$

Ha viszont B_1, \dots, B_r a maximum feladat duál megengedett bázisai, akkor a

$$(4.6) \quad \int_0^{\infty} [1 - V_{\max}(t)]_+ dt = \sum_{i=1}^r \int_{J_i} \text{Max}(1 - c_B^T B_i^{-1} b(t), 0) dt$$

reláció adódik. Teljesség kedvéért felírjuk a (3.6) egyenlőtlenség jobb és bal oldalán álló integrálokat is ilyen alakban.

Ha B_1, \dots, B_r a (3.3) feladatra specializált (2.13) minimum feladat duál megengedett bázisai, akkor azt kapjuk, hogy

$$(4.7) \quad \int_0^{\infty} (1 - V_{\min}(t)) dt = \sum_{i=1}^r \int_{J_i} (1 - c_B^T B_i^{-1} b(t)) dt.$$

Ugyanígy, ha a bázisok a maximum feladat esetében duál megengedettek, akkor a

$$(4.8) \quad \int_0^{\infty} [1 - V_{\max}(t)]_+ dt = \sum_{i=1}^r \int_{J_i} (1 - c_{B_i}^T B_i^{-1} b(t), 0) dt$$

reláció adódik. Ha valamely J_i intervallum degenerált, vagyis egy pontra zsugorodik, akkor az ezen vett integrál 0, ez az integrál az összegből elhagyható. Felvetődik a kérdés, hogy sok, vagy kevés J_i intervallum megjelenésére számíthatunk-e a fenti összegekben? Illusztrációként egy egyszerű példát veszünk, melyben valamennyi duál megengedett bázis előfordul az összegben. Tegyük fel, hogy x_1, \dots, x_n exponenciális eloszlásúak, $\lambda = 1$ paraméterrel és legyen $n = 2$. Ekkor

$$(4.9) \quad S_1(t) = n(1 - e^{-t}), \quad S_2(t) = \binom{n}{2} (1 - e^{-t})^2.$$

A (3.3) minimum feladat duál megengedett bázisai

$$(4.10) \quad B_i = (a_i, a_{i+1}), \quad i = 1, \dots, n-1.$$

A maximumfeladatnak egyetlen duál megengedett bázisa van:

$$(4.11) \quad B = (a_1, a_n)$$

Hivatkozások

- [1] Barlow, R. E., and Proschan, F., *Statistical Theory of Reliability and Life Testing.*, Holt, Rhinehart & Winston (New York, 1981).
- [2] Boros, E., and Prékopa, A., Probabilistic Bounds and Algorithms for the Maximum Satisfiability Problem, *Annals of Operations Research* **21** (1989), 109–126.
- [3] Carathéodory, C., Über den Variabilitätsbereich der Fourierschen Konstanten von positiven harmonischen Funktionen, *Rediconti del Circolo Matematico di Palermo* **32** (1911), 193–217.
- [4] Gessel, I. and Viennot, G., Binomial Determinants, Paths, and Hook Length Formulae, *Advances in Mathematics* **58** (1985), 300–321.
- [5] Prékopa, A., *Stochastic Programming*, Kluwer Academic Publishers (Dordrecht, 1995).
- [6] Prékopa, A., *Lineáris programozás*, Bolyai Matematikai Társulat (Budapest, 1968).
- [7] Prékopa, A., Boole–Bonferroni Inequalities and Linear Programming, *Operations Research* **36** (1988), 145–162.
- [8] Prékopa, A., A Brief Introduction to Linear Programming, *Mathematical Scientist* **21** (1996), 85–111.
- [9] Rade, L., Expected Time Failure of Reliability Systems, *Mathematical Scientist* **14** (1989), 24–37.
- [10] Riordan, J., *Combinatorial Identities*, Wiley (New York, 1968).

- [11] Takács, L., On the Method of Inclusion and Exclusion, *Journal of the American Mathematical Association* **62** (1967), 102–113.

(Beérkezett: 2002. június 24.)

HORVÁTH ALICE
ELTE TOFK
1126 BUDAPEST
KISS JÁNOS ALTÁBORNAGY U. 40.

PRÉKOPA ANDRÁS
ELTE TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR
OPERÁCIÓKUTATÁSI TANSZÉK
1053 BUDAPEST, KECSKEMÉTI U. 10-12.
PREKOPA@CS.ELTE.HU

RUTCOR, RUTGERS CENTER FOR OPERATIONS RESEARCH
RUTGERS UNIVERSITY
640 BARTHOLOMEW ROAD
PISCATAWAY, NJ 08854-8003
PREKOPA@RUTCOR.RUTGERS.EDU

LOWER AND UPPER BOUNDS FOR THE EXPECTED TIME TO FAILURE OF SYSTEMS

ALICE HORVÁTH AND ANDRÁS PRÉKOPA

In large series-parallel systems the exact calculation of the expected time to failure is frequently impossible because there are too many arithmetic operations involved. However, lower and upper bounds can be given so that they may serve as approximations for that value. In this paper we present bounds for the expected time to failure by the use of some recent results in connection with discrete moment problems.

HASH-FÁK ÉS SZÓFÁK AZ ADATBÁNYÁSZATBAN

BODON FERENC

Budapest

Napjainkban a gyakori minták kinyerése az adatbányászat talán leggyorsabban fejlődő területe. A gyakori mintákat leginkább elemhalmazok vagy epizódok formájában keressük egyre újabb algoritmusok segítségével, amelyek gyorsabban, vagy kisebb memóriaigénnyel találják meg azokat. Az összes lehetséges minta száma túl nagy lehet, ezért az algoritmusok ún. jelölmintázatokat állítanak elő. Ezek előfordulását határozzák meg, majd kiválogatják közülük a gyakoriakat. Az egyes módszerek elsősorban a jelölmintázatok definíciójában és előállításában különböznek egymástól, emellett általában elhanyagolják a megfelelő adatstruktúra kiválasztásának kérdését. Írásomban bemutatom, hogy az adatstruktúra helyes megválasztása nagyobb hatással lehet az algoritmusok idő- és tárigényére, mint a jelölmintázatok kiválasztásának módja.

Bevezetés

Az adatbáziskezelő-rendszerek az élet szinte minden területén elterjedtek. Ez elsősorban a velük való munka leegyszerűsödésének és az árcsökkenésnek köszönhető. Az elektronikus tárolás fontos előnye, hogy könnyen és biztonságosan lehet nagy mennyiségű adatot tárolni. Ezen felül gyors az adatok visszakeresése és az alapvető statisztikai értékek (minimum, maximum, átlag, stb.) meghatározása. Az adatok tárolása és keresése mellett a 90-es évek elején egy új igény fogalmazódott meg összefüggések, kapcsolatok, mintázatok felfedezésére az adatokban. Ez az igény keltette életre az *adatbányászatot*, amely napjainkra a számítástudomány egyik leggyorsabban fejlődő és legjobban kutatott területévé nőtte ki magát. Megélénkült a klaszteranalízis, az osztályozás, a sorozatelemzés, és létrejött egy új kutatási terület, ahol az asszociációs és epizód szabályok kinyerését vizsgálják. Ez utóbbi új terület első és egyben legfontosabb lépése a gyakori elemhalmazok megtalálása.

A gyakori elemhalmaz-kinyerésnél adott az elemhalmazok egy sorozata. Egy elemhalmaz gyakori, amennyiben egy küszöbszámnál több elemnek részhalmaza

a sorozatban. Célunk a sorozatban a gyakori elemhalmazokat megkeresése. Epi-zódkutatásnál az elemhalmazok időbélyeggel is el vannak látva, így itt gyakori részsorozatokat keresünk.

A probléma színre lépése után [1] egyre hatékonyabb algoritmusok jelentek meg [2] [15] [5] [19] [23]. A hatékonyságot a futási idővel és a memóriaszükséglettel mérik. Összefüggéseket, mintázatokat általában nagy adatbázisokban keresünk (például szupermarketek tranzakciós adatbázisában), így ezek a paraméterek kiemelten fontosak az adatbányászati algoritmusokban.

Nyilvánvaló, hogy az adathalmaz mindössze 1 végigolvasására van szüksége annak az algoritmusnak, amely egyesével vizsgálja a sorozat elemeit és minden olyan elemhalmaznak növeli a számlálóját, ami részhalmaza a sorozat aktuális elemének. A probléma ezzel kapcsolatban az, hogy egy sok elemet tartalmazó halmaznak olyan sok részhalmaza van, hogy már azok számlálói sem férnének el a memóriában. A sorozat elemeinek feldolgozása előtt nem tudjuk, hogy melyik számlálót kell majd növelnünk, így a legtöbb idő a számlálók háttértárra mentésével és azok betöltésével telne.

A gyakorlatban alkalmazott algoritmusok ezért nem az összes elemhalmaz előfordulását tartják számon, hanem csak az ún. *jelöltekét*. Ezek olyan halmazok, amelyek esélyesek arra, hogy gyakoriak legyenek. Az egyes megoldások különböző elemhalmazokat választanak jelölteknek. Az egyre hatékonyabb algoritmusokban egyre kevesebb az ún. hamis jelölt, az olyan jelölt, amelyről később kiderül, hogy nem gyakori elemhalmaz. A gyakori elemhalmazok kinyerésének legidőigényesebb és ezért a legfontosabb lépése a jelöltek előfordulásának meghatározása. Az írásokban ennek részleteiről, a felhasznált adatstruktúráról kevés szó esik. Többségében átveszik az APRIORI algoritmusban [2] bemutatott megoldást, ahol a jelölteket hash-fában tárolták.

Látni fogjuk, hogy a szófa számos tekintetben jobb a hash-fánál, a két struktúra ötvözése pedig még több előnnyel jár. Írásunkban a két adatstruktúrát vesszük nagytól alá. Megvizsgáljuk előnyeiket, hátrányaikat, hangolási lehetőségeiket, továbbá azt, hogy miként ötvözhető a két módszer.

Az írás felépítése a következő: az 1. részben formalizáljuk a problémát, majd leírjuk a legismertebb algoritmust. A 2. részben ismertetjük a hash-fát, a 3.-ban a szófát. A 4. részben megvizsgáljuk, hogy miként lehet növelni a két adatstruktúra teljesítményét különböző trükkökkel, majd „egyesítjük” a két adatstruktúrát. Az 6. részben elméleti szinten hasonlítjuk össze a két különböző módszer hatékonyságát. Ezt a 7. részben teszteredményekkel is alátámasztjuk, végül levonunk néhány következtetést.

1. Gyakori elemhalmazok kinyerése

Adott az *elemek* $\mathcal{T} = \{t_1, t_2, \dots, t_M\}$ halmaza, továbbá a *kosarak* $\mathcal{K} = \langle k_1, k_2, \dots, k_N \rangle$ sorozata. Minden kosár egy elemhalmaz, tehát $\forall i$ -re: $k_i \subseteq \mathcal{T}$. Azt mondjuk, hogy k_i kosár *tartalmazza* az X elemhalmazt, ha $X \subseteq k_i$.

1. *Definíció.* Az $X \subseteq \mathcal{T}$ elemhalmaz *támogatottsága* (support) azon kosarak számának aránya az összes kosár számához mérten, amelyek tartalmazzák az X -et. Az X támogatottságát $\text{supp}_{\mathcal{K}}(X)$ -el jelöljük, tehát

$$\text{supp}_{\mathcal{K}}(X) = \frac{|\{k_i \in \mathcal{K} : k_i \text{ tartalmazza } X\text{-et}\}|}{N}$$

Az X elemhalmaz *előfordulásán* (vagy abszolút támogatottságán) a $\text{supp}_{\mathcal{K}}(X) \cdot N$ szorzatot értjük. A támogatottság fontos tulajdonsága, hogy monoton fogyó halmazfüggvény. *Gyakori elemhalmaznak* nevezzük azokat az elemhalmazokat, amelyek támogatottsága egy előre megadott konstansnál (jelöljük ezt \min_supp -al) nagyobb. *Ritka* egy elemhalmaz, ha nem gyakori.

Feladat egy adott kosárhalmazban a gyakori elemhalmazok megtalálása, ami már önmagában is érdekes lehet, de még fontosabbak az ezekből kinyert ún. asszociációs szabályok.

2. *Definíció.* Legyenek $c, s \in \mathbb{R}^+$. A \mathcal{K} kosárhalmazban c bizonyosságú, s támogatottságú $X \xrightarrow{c,s} Y$ *asszociációs szabály* fennáll, ha X, Y diszjunkt elemhalmazok, azaz $X, Y \subseteq \mathcal{T}$, $X \cap Y = \emptyset$ és

$$c = \frac{\text{supp}_{\mathcal{K}}(X \cup Y)}{\text{supp}_{\mathcal{K}}(X)},$$

$$s = \text{supp}_{\mathcal{K}}(X \cup Y)$$

A szabály bal oldalát *feltétel résznek*, a jobb oldalát pedig *következmény résznek* nevezzük.

Asszociációs szabályokat először vásárlási szokások feltárására alkalmaztak. Ha például egy műszaki áruház vásárlásait elemezzük vásárlói szokások felfedezése céljából, akkor a DVD lejátszó $\xrightarrow{90\%, 5\%}$ DVD lemez egy hasznos információ. A fenti szabály szerint, azok akik DVD lejátszót vesznek, 90%-ban mindjárt DVD lemezt is vásárolnak. A szabály támogatottsága pedig azt mutatja, hogy a két termék együtt a vásárlások 5%-ában szerepelt. Megjegyezzük, hogy ennek az alkalmazási területnek a hatására az elemeket sokszor termékeknek hívjuk, a kosarakat pedig tranzakcióknak.

A gyakori elemhalmazok kettébontásával (feltétel- és következményrészre) asszociációs szabályokat nyerhetünk. Bennünket általában a magas bizonyosságú szabályok érdekelnek. *Érvényes asszociációs szabályoknak* hívjuk azon asszociációs szabályokat, amelyek támogatottsága és bizonyossága az előre megadott korlátok felett vannak.

A gyakori elemhalmazok kinyerésének igénye az adatbányászat egyre több területén merül fel. Az asszociációs szabályok mellett előkerül például az epizódoktatásban [3] [21] [12], de a funkcionális függőségek kinyerésénél alkalmazott algoritmusok [9] [8] is ezen alapokra épülnek. Az adatbányászat elterjedésével egyre több helyen merült fel az igény asszociációs szabályok bányászatára. Legfontosabb területe a marketing, azon belül is a már említett vásárlási szokáselemzés, de megjelent az orvostudományban, a telekommunikációs hálózatok elemzéseiben, a pénzügyi szektorban stb.

1.1. APRIORI algoritmus

Fontos részfeladat a gyakori elemhalmazok meghatározása. Ennek alapmódszere az APRIORI algoritmus. Az APRIORI algoritmus az egész adatbányászat egyik legmeghatározóbb algoritmus. A napjainkban felbukkanó új problémákat (asszociációs szabályok Galois-lezártja [17] [18] [16], ciklikus asszociációs szabályok [14], időleges asszociációs szabályok [11], asszociációs szabályok változó támogatottsági küszöbvel [24], on-line asszociációs szabálybányászat [6] [7] [13] [20] [22]) mind ezen algoritmus módosításával, kiterjesztésével oldják meg. Az APRIORI algoritmus egy szintenként haladó algoritmus. Ezekre az a jellemző, hogy az adatbázis (kosarak) első végigolvasásánál a gyakori elemeket, a második végigolvasásnál a gyakori elempárokat, az i -edik olvasásnál pedig az i elemű gyakori termékhalmozokat határozzák meg.

Az algoritmus csak az ún. jelöltek előfordulását vizsgálja. A támogatottság monotonitásából következik, hogy egy gyakori termékhalmoz minden részhalmaza gyakori. Ebből született az ötlet, hogy azok és csak azok a termékhalmozok legyenek jelöltek, melyeknek minden részhalmaza gyakori. Az i -elemű jelölteket az adatbázis i -edik átolvasásának megkezdése előtt állítjuk elő. Egy jelöltet két olyan $i - 1$ -elemű gyakori elemhalmaz egyesítésével kapunk, amelyeknek $i - 2$ közös elemük van. Az egyesítés után ellenőriznünk kell, hogy a jelölt minden $i - 1$ elemű részhalmaza gyakori-e.

Az algoritmus idő és tár szempontjából legkényesebb lépése a jelöltek támogattságának meghatározása. Az lenne a legegyszerűbb, ha minden kosárnál sorban megvizsgálnánk az összes jelöltet, hogy tartalmazza-e azt a kosár. Ennek az egyszerű megoldásnak legfőbb hátránya a lassúsága. A gyorsítás érdekében a jelölteket egy speciális adatstruktúrában, az ún. hash-fában szokás tárolni. Ezt az adatstruktúrát arra találták ki, hogy gyorsan el lehessen döntení egy adott kosárról, hogy az mely jelölteket tartalmazza.

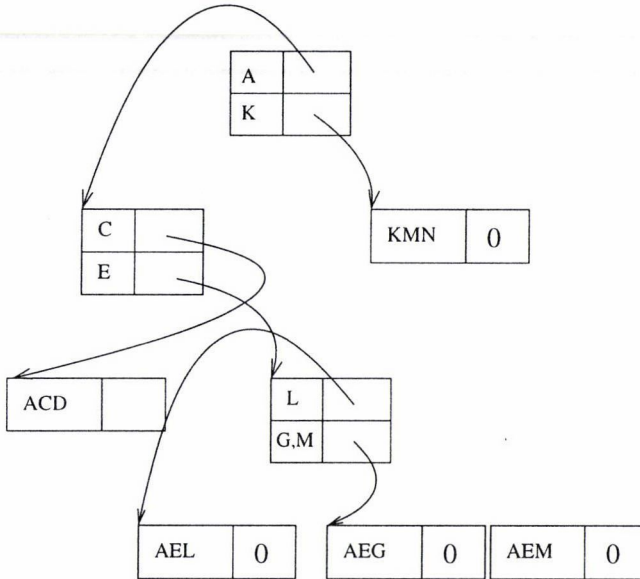
Mielőtt ismertetjük ennek részleteit, térjünk ki röviden arra az esetre, amikor a jelöltek mérete egy. Amennyiben ismerjük a termékek számát (vagy erre egy nem túl nagy felső korlátot), akkor semmilyen kifinomult adatstruktúrára nincs szükségünk. A támogatottságok meghatározhatóak egy egysoros táblázat segítségével. A táblázat i . eleme tartalmazza az i sorszámú termékhez tartozó előfordulások számlálóját. Egy kosár vizsgálatakor a kosárban található termékekhez tartozó ele-

mek számlálóját kell növelni. Látjuk tehát, hogy a speciális adatstruktúra csak abban az esetben lehet érdekes, ha a jelöltek mérete legalább 2.

2. Hash-fa

A hash-fa egy olyan fa, amelynek belső csomópontjai hash-táblák¹, a levelekben pedig jelöltek és számlálók találhatók. Az i -edik szintű hash-táblák az $i + 1$ -edik szintre mutatnak, a hash-fa gyökere a nulladik szinten van. A hash-fa célja az, hogy a kosár elemeinek egyszeri végigolvasásával megkapjuk azokat a leveleket, amelyekben található jelöltek a kosárban előfordulhatnak. Mivel a hash-táblákban lehetnek ütközések, a hash-fa nem biztosítja, hogy az így talált levelekben lévő minden jelölt előfordul a kosárban. Az viszont biztos, hogy nincs jelölt, ami egyik levélben sem fordul elő, de kosárban megtalálható. A hash-fa célja tehát az, hogy a vizsgálandó jelöltek számát csökkentse. A talált levelekben lévő jelöltek száma általában jóval kisebb, mint az összes jelölté.

Az 1. ábrán az $\{ACD\}$, $\{AEL\}$, $\{AEG\}$, $\{AEM\}$, $\{KMN\}$ jelölteket tartalmazó hash-fát láthatjuk. Egy elem (betű) hash-értéke megegyezik az angol ábécé szerinti sorszámanak modulo 6 maradékával.



1. ábra. 5 jelöltet tartalmazó hash-fa

¹ A hash-elési technikáról részletes információk a [10]-ban található

A k elemű kosárban a j elemű jelölteket úgy találjuk meg, hogy a gyökérből kiindulva bejárjuk a fa bizonyos részfáit. Ha egy l szintű hash-táblához a kosár i -edik elemének hash-elésén keresztül jutunk, akkor elő kell állítanunk az összes $k - j + l \geq i' > i$ sorszámú i' elem hash-értékét. Ezek közül egyesek sehova, mások hash-fába, a maradék pedig levélbe mutat. Ha levélbe jutunk, akkor a levélben található összes jelölthalmazt meg kell nézni egyesével, hogy tartalmazza-e őket a kosár. A számlálókat ez alapján kell növelni eggyel.

A hash-fa felépítése az alábbi módon történik. Kezdetben a hash-fa üres, a gyökér nem más, mint egy levél. A jelölteket, 0 kezdeti értékű számlálóikkal, a gyökérbe (nulladik szint) tesszük addig, amíg a gyökérben található jelöltek száma el nem éri az előre megadott korlátot. Ekkor a gyökér hash-táblává alakul, amely hash-függvénye a jelöltek első elemére vonatkozik. Hash-értéktől függően az eddig gyökérben tárolt jelöltek az újonnan felvett levelekben kerülnek szétosztásra.

További jelöltek beszúrásánál a jelölt már nem a gyökérbe kerül, hanem az elemeinek hash-értéke alapján meghatározott levélbe. Ha egy az l -edik szinten található levélben a jelöltek száma meghaladja a korlátot, akkor belső csomóponttá alakul, és a benne található jelöltek az $l + 1$ -edik elemük alapján kerülnek szétosztásra. Ez csak abban az esetben lehetséges, ha a jelöltek mérete legalább $l + 1$. Ezek szerint a jelöltek méretével megegyező szinten nem garantálható az, hogy a levélben a levélkorlátnál kevesebb jelölt van.

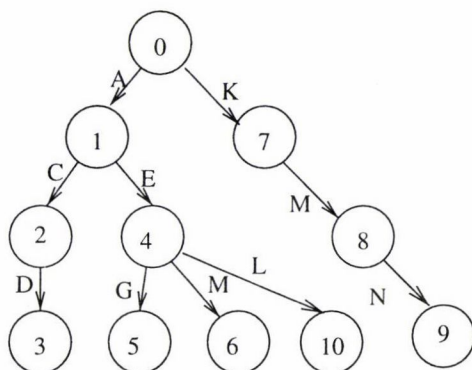
Az l -edik szinten található hash-táblák a jelöltek $l + 1$ -edik elemére vonatkoznak. A hash-függvények bemenete tehát egyetlen elem, így céljainknak tökéletesen megfelel a legegyszerűbb hash-függvény, a modulus függvény. Az i -edik termék (t_i) hash-értéke legyen $h(t_i) = i \bmod m$, ahol m -et a továbbiakban a hash-fa modulusának nevezzük.

Az implementáció egyszerűsítése érdekében a fentitől egy kis mértékben eltérő hash-fát alkalmaztunk. Esetünkben a hash-fa gyökere mindig hash-tábla, tehát legfeljebb az első szinten lehetnek levelek. Könnyű utánagondolni, hogy ez a hash-fa kevésbé érzékeny a rosszul megadott levélkorlát paraméterre, mint az a hash-fa, amelynek a gyökere kezdetben egy levél.

3. Szófa

A szófát eredetileg szavak tárolására és gyors visszakeresésére találták ki [10]. Ezen túl azonban tetszőleges halmazok tárolására is alkalmas, így jogosan merül fel az adatbányászatban való használatának lehetősége. A szófa is egy lefelé irányított gyökeres fa. Egy i -edik szintű pontból egy élen keresztül juthatunk el egy $i + 1$ -edik szintű pontba. A gyökeret 0. szintűnek tekintjük. A szófa élein címkék találhatók, amik szótárak esetében egy betűnek felelnek meg, elemhalmazok tárolása esetén elemnek (vagy elemsorszámnak). Minden pont egy elemhalmazt reprezentál, amely a gyökérből ebbe a pontba vezető éleken található elemekből áll. Sejtethető, hogy minden levél egy jelöltet reprezentál, ezért a levelekhez egy előfordulási számláló is

tartozik. A 2. ábrán egy szófát láthatunk, amely ugyanazokat a termékhalmazokat tárolja, mint az előző példában bemutatott hash-fa.



2. ábra. 5 jelöltet tartalmazó szófa

A k elemű kosárban a j elemű jelölteket úgy találjuk meg, hogy a gyökekből kiindulva bejárjuk a fa bizonyos részfáit. Ha egy l szintű belső ponthoz a kosár i -edik elemén keresztül jutunk, akkor a $k - j + l \geq i' > i$ sorszámú i' elemeken keresztül lépünk eggyel mélyebb szintre. Ha eljutunk egy j szintű ponthoz, az azt jelenti, hogy a pont által reprezentált termékhalmazt a vizsgált kosár tartalmazza, így ennek a pontnak az előfordulási mutatóját kell növelnünk eggyel.

A ritka elemhalmazok törlésénél azon leveleket kell törölnünk, amelyek számlálói az előfordulási korlátnál kisebbek. Egy pont törlésénél törölnünk kell azokat az éleket is, amelyek a pontra mutatnak. Ha nem akarjuk végignézni az összes pontot, akkor célszerű minden ponthoz felvenni egy mutatót, amely a pont szülőjére mutat. Ezáltal a szófa állapotainak egyszeri átnézésével az összes ritka levél törölhető, és eközben a szófa állapotait úgy összehúzzuk, hogy ne tartalmazzon lyukakat (azaz állapotainak sorszámozása folytonos lesz). A szófa implementációját, továbbá a törlést megvalósító lépéseket a [4] írásban részleteztük.

A következőkben kitérünk egy olyan kérdésre, amivel az irodalom tudomásunk szerint nem foglalkozik, a tesztek azonban alátámasztották, hogy komoly hatással van a támogatottságok meghatározásának futási idejére. Amikor a szófa egy pontjában el kell döntenünk, hogy melyik pontba lépünk tovább egy elem hatására, akkor végig kell nézni a pontból kiinduló élek címkéit. Egyezés esetén követni kell a megfelelő élt.

A címkék gyors átnézése érdekében az éleket címkék szerint növeően rendezve tároljuk, és bináris keresést végzünk. Ha csak az összehasonlítások számát tekintjük, akkor a bináris keresés mindig gyorsabb a lineáris keresésnél, hiszen $\log_2 d < d$, ha $d > 0$. A gyakorlatban azonban nem ilyen egyszerű a helyzet, hiszen az összehasonlítás mellett értékadások is szerepelnek, amelyek szintén időt rabolnak. Nézzük meg, miként megy végbe a bináris és a lineáris keresés (3. ábra).

```

Bemenet: V:   elemek vektora
          v:   keresendő elem
Kimenet: 1: ha  $v \in V$ , különben 0
          i: index ami a  $v$  sorszámát adja meg,
             vagy azt a pozíciót, ahova a  $v$ -t be kellene szűrni

```

Bináris keresés:

```

  Átmeneti változók:
    also_index=0,
    felso_index=|V|;

    while (also_index<felso_index+1)
    {
        index=(also_index+felso_index)/2;
        if (V[index]<v) also_index=index+1;
        else if (V[index]>v) felso_index=index-1;
        else return (1,index)
    }
    if (V[index]<v) index++;
    return (0,index);

```

Lineáris keresés:

```

    for (index=0;index<|V|;index++)
        if (V[index]<v) return (0,index);
        else if (V[index]==v) return (1,index);

```

3. ábra. Bináris és a lineáris keresés

Egy d elemű rendezett tömbben egy elem bináris keresésénél kezdetben 2 értékadásra van szükség, majd legfeljebb $\log_2 d$ -szer kell végrehajtani az összeadás, osztás, (esetleg két) feltétel-ellenőrzés és értékadás műveleteket. Lineáris keresésnél legfeljebb d -szer kell végrehajtani az értékadás és feltétel-ellenőrzés műveleteket. Ha tehát az élek száma kicsi, akkor a lineáris keresés gyorsabb a binárisnál. Célszerű tehát egy bizonyos küszöbnél kisebb értékekre lineáris keresést futtatni, míg a küszöbnél nagyobbakra binárist. Azt, hogy mi a küszöb pontos értéke, nem az adatok karakterisztikája szabja meg, hanem az implementációs környezet (pontosabban az, hogy mekkora az ezen elemi műveletek végrehajtásának ideje). A mi tesztkörnyezetünkben (linux operációs rendszeren 2.95.3-as gcc fordító) a 10-es elemszám alatt végeztünk lineáris keresést. A mintaadatbázisunkon végrehajtott tesztek azt mutatták, hogy ez a hibrid (lineáris, bináris) keresés átlagosan 40%-al volt gyorsabb a tisztán bináris keresésnél.

A hash-fát és a szófát is a jelöltek tárolására alkalmazzuk. Maguk a gyakori termékhalmozok és azok előfordulásai más adatstruktúrákban vannak. Legegyszerűbb és talán leghelytakarékosabb egy lexikografikusan rendezett, változó sorhosszúságú tömb használata. A tömb i . sora tárolja lexikografikusan rendezve az i -elemű gyakori termékhalmozokat.

A hash-fával ellentétben a szófát használhatjuk a gyakori termékhalmozok tárolására is. Ennek a következő előnyei vannak:

1. Egyszerű a jelöltgenerálás, hiszen elég csak azokból a termékhalmazokból generálnunk jelöltet, amelyeknek ugyanazok a szülei (ez pontosan annak felel meg, hogy az utolsó elem kivételével a termékhalmazok megegyeznek).
2. Csak egy adatstruktúrát kell implementálnunk, így a programkód egyszerűbb (és ennek következtében könnyebben ellenőrizhető) lesz.
3. Azonnal elő tudjuk állítani az ún. *esélyes jelölteket*, amelyek jónéhány APRIORI-alapú algoritmusban (on-line asszociációs szabálybányászat [22], mintavételezésen alapuló algoritmusok [23], stb.) fontos szerepet játszanak.
4. Magukat az asszociációs szabályokat is gyorsabban tudjuk előállítani, hiszen gyorsabban tudjuk kikeresni egy termékhalmaz előfordulását (a szófát eredetileg pont azért alkalmazták, hogy egy szótár szavait tárolják benne, és gyorsan meg lehessen találni egy dokumentumban a szótárban nem szereplő szavakat).

Általában egy szófában gyorsabban lehet keresni, mint egy lexikografikusan rendezett listában, ugyanakkor a memóriaigénye is nagyobb. Az imént felsorolt előnyök mellett sajnos számolhatunk azzal, hogy a memóriaigény nagyobb lesz.

4. Gyorsított szófa

Az előző részben bemutatott szófa kis változtatásával nagymértékben lehet növelni a sebességet. Ezeket a változtatásokat, trükköket mutatjuk be ebben a részben.

4.1. Maximális út hossza

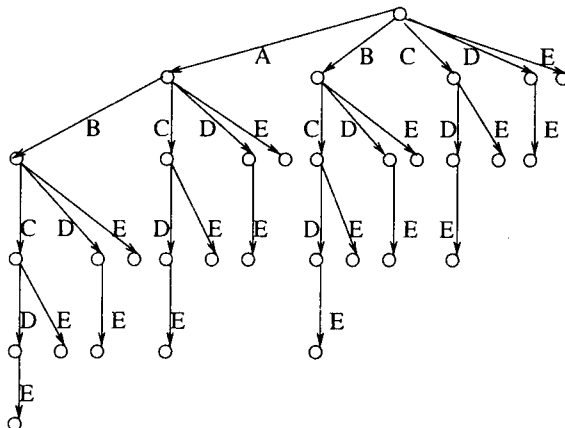
Tekintsük a 4. ábrán látható szófát, amely egy 5-elemű jelöltet és a gyakori termékhalmazokat tárolja.

Amennyiben az $\{A, B, C, D, E, F, G, H, I\}$ termékeket tartalmazó kosárban található 5-elemű jelölteket akarjuk meghatározni, akkor az algoritmus be fogja járni a teljes szófát. Nyilvánvaló, hogy ez szükségtelen, hiszen csak egyetlen 5 hosszú út van, tehát csak egyetlen úton lehet jelöltig eljutni. A felesleges „kacsázgatások” elkerülése érdekében tároljuk minden csomópontban a belőle kiinduló leghosszabb út hosszát.

A j -elemű jelöltek keresésénél ezt úgy használhatjuk fel, hogy a szófa l -edik szintjén csak azon pontokra lépünk tovább, amelyek leghosszabb út mutatója $j - l - 1$. Ezt a keresést alkalmazva a fenti példában az algoritmus kizárólag az egyetlen szóba jövő úton fog haladni.

A maximális út hosszát minden ponthoz tárolnunk kell, így ennek a szófának nagyobb lesz a memóriaigénye, mint az eredetinek.

Észre kell vennünk, hogy amennyiben a szófában csak a jelölteket tároljuk, akkor a fenti probléma nem jelentkezik, hiszen minden út ugyanolyan hosszú a gyökértől a levélig, és jelöltet reprezentál.



4. ábra. Egy 5-elemű jelöltet tartalmazó szófa

4.2. Másodszintű kódolás

Megtárgyaltuk, hogy lineáris keresést végzünk azon pontoknál, amelyekből kevés él indul ki. Lineáris keresésnél kiolvassuk az első elemet és összehasonlítjuk a termékkel: ha nagyobb a sorszáma, akkor nincs ilyen címkéjű él, ha kisebb, akkor a következő elemre lépünk, ha megegyezik, befejezzük a keresést. Ha pechesek vagyunk, és a leggyakoribb termék kapta a legnagyobb sorszámot, akkor mindannyiszor el kell vándorolnunk a sor végéig, valahányszor ezt a terméket keressük.

Összességében gyorsabb lesz a keresés, ha a kódok sorrendje megegyezik a gyakoriság szerinti sorrenddel. A gyakoriság szerinti sorrendet a teljes adatbázis első végigolvasása után pontosan tudjuk, így minden adat rendelkezésünkre áll, hogy a szófat ne az eredeti, hanem másodszintű kódokkal építsük fel: egy termék másodszintű kódja i , ha σ az i . leggyakoribb termék. A másodszintű kódok és azok inverzeinek tárolása csak kis mértékben növeli a memóriaszükségletet, cserébe viszont nagymértékben gyorsíthatja a keresést.

Elemezzük, hogy ez a gyorsítási technika mennyivel gyorsíthatja a keresést. Tegyük fel, hogy m darab gyakori elem van és az i -edik leggyakoribb elemet n_i -szer kell megkeresnünk ($n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_m$) és $n = \sum_{i=1}^m n_i$. Ha egy elem a j -edik pozícióba került, akkor ennek megkeresése $c \cdot j$ költségű, ahol c egy konstans. A továbbiakban az átláthatóság érdekében c -t elhagyjuk. A másodszintű kódokat alkalmazó keresés összköltsége (arányossági tényező erejéig) $\sum_{i=1}^m i \cdot n_i$.

Mennyi lenne az összköltség, ha nem a másodszintű kódok alapján rendeznénk sorba az elemeket? Ezt pontosan nem tudjuk, hiszen nem tudjuk, ki kerülne az első pozícióba, ki a másodikba, stb. Meg tudjuk határozni viszont az összköltség várható értékét, ha azzal a feltételezéssel élünk, hogy minden sorrend egyenlően valószínű. Az egyenletességi feltevés miatt minden permutáció $\frac{1}{m!}$ valószínűséggel

fordul elő. Tehát

$$E[\text{összköltség}] = \sum_{\pi} \frac{1}{m!} \cdot (\pi\text{-hez tartozó költség}) = \frac{1}{m!} \sum_{\pi} \sum_{i=1}^m \pi(i) n_{\pi(i)}.$$

Itt π az $1, 2, \dots, m$ permutációkon fut végig, és π i -edik elemét $\pi(i)$ -vel jelöltük. Mivel minden elem egy pozícióba pontosan $(m-1)!$ -szor fog kerülni, ezért

$$E[\text{összköltség}] = \frac{1}{m!} (m-1)! \sum_{j=1}^m n_j \sum_{i=1}^m i = \frac{1}{m} \frac{(m+1)m}{2} \sum_{j=1}^m n_j = \frac{m+1}{2} n.$$

$E[\text{összköltség}]$ -ről csak azt tudjuk belátni, hogy nagyobb vagy egyenlő, mint a másodsztintú kódokat alkalmazó keresés összköltsége (az $n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_m$ feltétel miatt). Mi ennél többet szeretnénk megtudni, mégpedig, hogy mennyi lehet a

$$(1) \quad \frac{\sum_{i=1}^m i \cdot n_i}{n \frac{m+1}{2}}$$

hányados értéke. Legrosszabb esetben ($n_1 = n_2 = \dots = n_m$) a hányados 1, legjobb esetben ($n_1 = n - m + 1, n_2 = n_3 = \dots = n_m = 1$) pedig könnyű látni, hogy 0-hoz tart ha $n \rightarrow \infty$.

Ennél többet nem tudunk mondani, csak abban az esetben, ha ismerjük a gyakori termékek előfordulásának valószínűségét. Az alkalmazások nagy részében jellemző, hogy a gyakori elemek között van néhány nagyon gyakori elem, a ritka elemek előfordulásának valószínűsége pedig kis mértékben tér el egymástól. Ezért döntöttünk az exponenciális csökkenés mellett. Modellünkben az i -edik leggyakoribb termék előfordulásának valószínűsége $p_i = ae^{bi}$, ahol $a > 0$, $b < 0$ két olyan paraméter, amelyekre $ae^b \leq 1$ fennáll. A b paraméter felfogható úgy, mint az eloszlás meredeksége. Az a paraméter adja az eloszlás „nagyságát”, vagyis a kiindulási pontját határozza meg.

Tudjuk, hogy az n_i előfordulások aránya megegyezik a valószínűségek arányával, tehát $n_1 : n_2 : \dots : n_m = p_1 : p_2 : \dots : p_m$. Ebből, és az $n = \sum_{i=1}^m n_i$ feltételből adódik, hogy $n_i = n \frac{p_i}{\sum_{j=1}^m p_j}$. Felhasználva a mértani sor összegére vonatkozó képletet és bevezetve az $x = e^b$ jelölést, kapjuk, hogy

$$n_i = n \frac{x^i(x-1)}{x^{m+1}-1} = n \frac{x-1}{x^{m+1}-1} \cdot x^i.$$

Innen ki lehet számítani az összköltséget:

$$\sum_{i=1}^m i \cdot n_i = \frac{n(x-1)}{x^{m+1}-1} \sum_{i=1}^m i \cdot x^i.$$

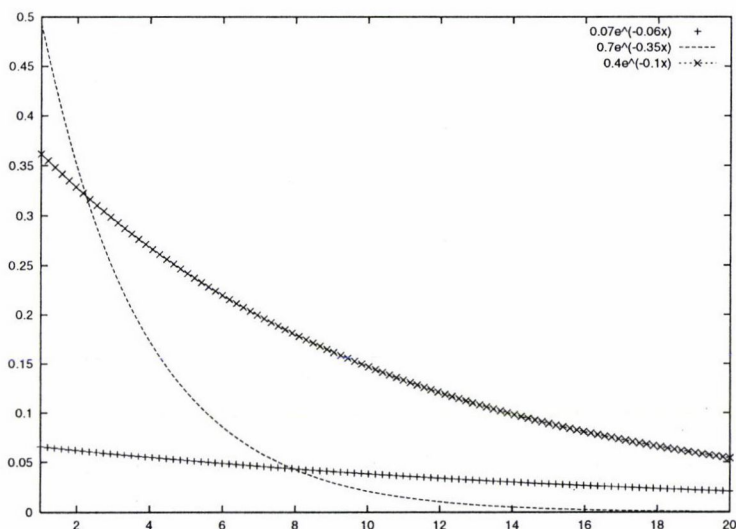
Számítsuk ki a $\sum_{i=1}^m i \cdot x^i$ mennyiséget:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m i \cdot x^i &= \sum_{i=1}^m (i+1) \cdot x^i - \sum_{i=1}^m x^i = \left(\sum_{i=1}^m x^{i+1} \right)' - \sum_{i=1}^m x^i = \\ &= \frac{mx^{m+2} - (m+1)x^{m+1} + x}{(x-1)^2}. \end{aligned}$$

A költségarány értékét is kifejezhetjük zárt alakban:

$$(2) \quad \text{költségarány} = \frac{2x(mx^{m+1} - (m+1)x^m + 1)}{(x^{m+1} - 1)(x-1)(m+1)},$$

ahol $x = e^b$. Látható, hogy a megtakarítás a -tól független. Az 5. ábrán 3 különböző eloszlást láthatunk. Az első eloszlásnak nagy a meredeksége, a másodiknak közepes, a harmadik eloszlást pedig lankásnak nevezhetjük.



5. ábra. Az elemek előfordulási valószínűségének 3 különböző eloszlása

Ha behelyettesítjük az eloszlások b paramétereit a 2-es képletbe és m értékének 10-et adunk, akkor 0,39-et, 0,73-at és 0,8-at kapunk, ami teljesen megfelel az elvárásainknak: az olyan eloszlásnál, amelynél az előfordulások nagyban eltérnek egymástól, a másodsztű kódok bevezetésével a keresés sebessége többszörösére nőhet. Természetesen a fenti képlet csak egy felső korlát a sebesség növekedésére. Nem szabad elfelejtenünk, hogy a másodsztű kódoknak nincs hatásuk azon ponttoknál, ahol bináris keresést végzünk.

5. A hash-fa és a szófa összehasonlítása

Ebben a részben áttekintjük a két adatstruktúra előnyeit és hátrányait. Két szempontot veszünk figyelembe: a sebességet és a memóriaszükségletet. Tegyük fel, hogy az adatstruktúrákban található jelöltek mérete j .

A hash-fának két paramétere van. A levélkorlát azt határozza meg, hogy egy levélbe maximálisan hány termékhalmaz kerülhet, a modulus pedig a hashtáblák méretét befolyásolja. Nyilvánvaló, hogy minél nagyobb a modulus, annál inkább szét lesznek osztva a jelöltek a levelekben, hiszen annál kisebb a termékek hashértékei közötti ütközések valószínűsége. A nagy modulus érték azonban nagy hashtáblákat, így nagy helyigényű belső pontokat eredményez.

A levélkorlát szintén mindkét mutatóra hatással van. Nagy értéknél ugyanis sok termékhalmaz kerülhet egy levélbe. Ezekről mind el kell dönteni, hogy tényleg előfordulnak-e a kosárban, ami lassú művelet. Cserébe viszont kevesen lesznek a nagy helyigényű belső pontok, így kicsi lesz a memóriaigény.

A hash-fát tehát nem lehet egyértelműen összehasonlítani a szófával, hiszen a két paraméter nagy befolyással van a sebességre és a memóriaigényre. Vizsgáljuk meg, hogy pontosan miből áll egy támogatott jelölt meghatározása a szófában és a hash-fában.

A hash-fában el kell jutnunk egy levélig, majd a levélben található jelölteket egyesével meg kell vizsgálnunk. A levélhez maximum j darab hash-értéket kell kiszámítanunk. Tegyük fel, hogy a hash-értékek gyorsan számíthatóak, vagy előfeldolgozás során minden termék hashértékét előre tároltuk. A levélben minden jelöltről explicite el kell döntenünk, hogy előfordul-e a kosárban. Ez a legrosszabb esetben a kosár elemszámával megegyező számú összehasonlítást igényel. Érezhető, hogy a hash-fában gyorsan eljutunk a levelekig, azonban ott sokat időzhetünk.

Ezzel szemben a szófában a levelekig való eljutás tarthat sokáig, viszont további vizsgálatra nincs szükség. Ha levélhez érünk, akkor tudjuk, hogy a kosár biztosan tartalmazza a levél által reprezentált jelöltet. Az egy szinttel való lejjebb lépés lassabb művelet, mint a hash-fánál. Ha az élek címkék szerint rendezve vannak, akkor egy szinttel való lejjebb jutáshoz $\log_2 d_i$ összehasonlításra van szükség, amennyiben az aktuális csúcsból d_i darab él indul. Ha a gyakori elemhalmazokat is a szófában tároljuk, akkor az egy csúcsból induló élek száma nem nőhet ahogy haladunk a szófában lefelé, sőt azt várjuk el (és a teszteredmények is ezt mutatják), hogy minél lejjebb vagyunk a szófában, annál kevesebb él indul egy csúcsból. Tulajdonképpen ez az észrevétel adta az ötletet a szófa hash-eléssel való ötvözéséhez.

6. Hibrid adatstruktúrák

Esetünkben hibrid adatstruktúrát két irányból indulva hozhatunk létre. Egyrésztől a hash-fát „gyúrhatjuk át”, hogy elkerüljük az ütközéseket, másrésztől a szófában alkalmazhatunk hash-elési technikákat.

6.1. Hash-fa perfekt hash-eléssel

A másodszintű kódokon alapuló perfekt hash-elést a hash-fánál is bevezethetjük. Ekkor nem kell előre megadni a hash függvényt, hanem az a gyakori termékek számától függően, az adatbázis első végigolvasásakor alakul ki. Nyilvánvaló, hogy ennek csak előnye van abban az esetben, ha eredetileg mi nagyobb modulust akarunk beállítani, hiszen elkerüljük az ütközéseket, és kisebb lesz a belső pontok helyigénye.

Természetesen abból, hogy tökéletes hash-elést alkalmazunk, nem következik, hogy a levelekbe csak egy jelölt fog kerülni. Ennek oka a hash-fa felépítésében keresendő: csak akkor alakítunk át egy levelet belső ponttá, ha a benne található jelöltek száma egy bizonyos korlát fölé emelkedik. A perfekt hash-táblák alkalmazásával tehát nem tudjuk kiváltani a keresés második fázisát, amikor minden jelöltet egyenként végig kell nézni, hogy ténylegesen tartalmazza-e azt a kosár. Igaz lesz viszont az alábbi tulajdonság.

6.1. TULAJDONSÁG. *Ha a kosárban található jelöltek keresésénél egy l -edik szinten található levélbe jutunk, akkor a levélben található jelöltek első l darab termékét a kosár biztosan tartalmazza.*

Ebből a tulajdonságból pedig közvetlenül adódik, hogy ha a jelöltek méretével megegyező levélbe jutunk, akkor az ott található egyetlen jelöltet a kosár biztosan tartalmazza. Ilyenkor megtakarítjuk a keresés második fázisát.

Emlékeztetünk, hogy a hagyományos hash-fánál nem mindig teljesül levélkorlát-feltétel az utolsó szinten található levelek esetében, azaz itt a korlátnál több jelölt is kerülhet egy levélbe. A fenti tulajdonság miatt a perfekt hash-elést használó hash-fára igaz az, hogy tetszőleges levélben található jelöltek száma mindig a korlát alatt lesz.

6.2. Szófa hash-eléssel

A szófán alapuló támogatottság-meghatározás akkor lassú, amikor olyan belső pontokból kell továbblépni, amelyekből sok él vezet, hiszen a megfelelő él kiválasztása sok összehasonlítást igényelhet. Tudjuk, hogy az egy pontból induló élek száma nem nőhet, ahogy haladunk lefelé egy út mentén, sőt tapasztaltuk, hogy eleinte egy csúcsnak sok fia van, majd ahogy haladunk lefelé a gyermekek száma nagymértékben csökken.

Gyorsítani tudjuk a keresést, ha a szófa belső csúcsainál hash-táblákat alkalmazunk. Ekkor egyetlen hash-érték kiszámításába kerül az egy szinttel lejjebb lépés. Mivel a szófának szeretnénk megőrizni azt a tulajdonságát, ami szerint egy levél pontosan egy elemhalmazt reprezentál, így perfekt hash-táblákat kell alkalmaznunk. Erre tökéletesen megfelelnek a másodszintű kódok, hiszen a szófában csak gyakori termékek szerepelnek.

Nem célszerű minden belső pontot lecserélni hash-táblára, hiszen egy hash-tábla jóval több memóriát igényel, mint az élek címke szerint rendezett halmaza. Csak azokat a belső pontokat cseréljük ki hash-táblára, amelyekből kiinduló élek száma egy ésszerű l korlát felett van.

A szófa építésénél tehát, egy új belső pont létrehozásakor a rá mutató csúcsnál ellenőriznünk kell, hogy meghaladta-e az éleinek száma l -et. Amennyiben meghaladta, akkor a csúcsot hash-táblává alakítjuk. A ritka jelöltek törlésénél éleket is törölünk, így a fenti transzformáció inverzét is meg kell valósítanunk.

A szófa esetünkben úgy fog kinézni, hogy a gyökérhez közeli csúcsok hash-táblák lesznek, az alsóbb szinten találhatók pedig hagyományos csúcsok. Következésképpen, ahol eddig lassú volt a keresés, ott villámgyorssá válik, ahol pedig amúgy is gyors volt – az élek kis száma miatt –, ott gyors marad.

7. Kísérleti eredmények

Ebben a részben bemutatjuk, hogy miként szerepeltek az egyes adatstruktúrák kísérleteinkben. Két paramétert vizsgáltunk: egyrészt, hogy mennyi idő alatt találja meg az algoritmus a gyakori termékhalmozokat, másrészt, hogy ezalatt mekkora a maximális memóriafogyasztása.

A feladat minden esetben egy 31 Mbyte-os szövegfájlban található kosarak feldolgozása volt. A fájl közel 990 ezer kosarat tartalmazott, egy kosár átlagosan 8.1 terméket. Összesen 41270 különböző termék volt az adatbázisban. A tesztek egy linux alapú (kernel verzió 2.4.2), 1.5 Ghz-es Pentium IV-es processzorral ellátott 1 Gbyte memóriával rendelkező PC-n futottak. Az algoritmus futási idejét a `\usr\bin\time` parancs `%U` és `%S` opcióival kaptuk meg. A memóriaszükségletet a program változóinak (tömbök, vektorok, segédváltozók) helyfoglalásával mértük. A terjedelmi korlátok miatt nem soroljuk fel az összes teszt eredményét, csak a legjellemzőbbeket próbáljuk kiragadni közülük. Aki többet szeretne megtudni, az a <http://www.mit.bme.hu/~bodon/magyar/adatbanyaszat/teszt> oldalon további részleteket talál.

Elsőként nézzük meg a közismert hash-fa eredményeit. A következő két ábrán egy alacsony és egy magas támogatottsági küszöb mellett elvégzett teszt eredményei láthatók. Azokon a helyeken, ahol nincs bejegyzés, ott vagy a memóriaigény, vagy a futási idő lépte át az általunk megengedett küszöböt.

A fenti táblázatokból egyértelműen kiderül a hash-fa legnagyobb hátránya: rendkívül érzékeny a paraméterekre, a két paraméter bármelyikének rossz beállítása óriási memóriafogyasztást, vagy rendkívül lassú futást eredményezhet. A táblázatokból az is kiderül, hogy ugyanannál az adathalmaznál két olyan paraméter, amelyekkel a hash-fa jó eredményt adott (bizonyos támogatottsági küszöbnél), más küszöb mellett gyengén szerepel.

Nézzük meg, hogyan szerepeltek a szófa különböző változatai tesztjeinkben (3-as táblázat). A *szófa_marút* jelöli azt a szófát, amely a leghosszabb út hosszát is tárolja, a *szófa_keskeny* pedig azt, ami csak jelölteket tárol. A gyakori termékhalmozokat ebben az esetben (hasonlóan a hash-fához) lexikografikus listákban tároltuk. Azért illettük ezt a szófát a keskeny jelzővel, mert mélysége megegyezik a többi szófáéval, szélessége viszont kisebb azokénál. A *szófa_újkód* a másodszintű kódok-

Modulus	levélkorlát						
	5	10	40	100	500	2500	10000
10	19,3	19,3	19,3	19,0	17,6	17,6	17,6
40	31,9	31,9	28,2	18,2	18,2	18,2	18,2
100	51,9	50,7	34,9	18,9	18,9	18,9	18,9
500	158,0	145,0	62,2	22,9	22,9	22,9	22,9
2500	646,0	584,6	208,9	42,5	42,5	42,5	42,5
10000	2477,0	2232,0	758,0	115,7	115,7	115,7	115,7
40000	9801,0	8824,0	2955,0	408,7	408,7	408,7	408,7

Maximális memória szükséglet (kbyte)

Modulus	levélkorlát						
	5	10	40	100	500	2500	10000
10	3766,7	473,5	167,0	159,8	172,7	172,7	172,7
40	196,0	142,4	125,1	135,6	135,7	135,7	135,7
100	116,0	109,8	108,3	121,0	121,0	121,0	121,0
500	94,6	93,7	96,6	111,2	111,2	111,2	111,2
2500	93,4	92,1	94,2	108,3	108,3	108,3	108,3
10000	95,8	94,1	94,8	108,6	108,6	108,6	108,6
40000	96,5	94,7	95,1	108,6	108,6	108,6	108,6

Futási idő (sec.)

1. táblázat. Hash-fa min _ supp = 0,01 mellett

ból felépített és a leghosszabb utak hosszát is tartalmazó szófa. Azt várjuk, hogy ez az adatstruktúra lesz a leggyorsabb, ugyanis minden gyorsítási lehetőséget tartalmaz. A másodsztű kódokkal felvértezett keskeny szófát nem implementáltuk, de a tesztek alapján következtethetünk tulajdonságaira.

A tesztek a várt eredményt hozták. A gyorsítási lehetőségek minden esetben gyorsabb futást eredményeztek. Természetesen ezzel egyidejűen a memóriaigény is növekedett, hiszen a maximális utak hosszát, a másodsztű kódokat és azok inverzeit tárolni kell. A memóriaigény növekedése azonban csekély, minden esetben 10% alatt maradt. Ha ezt összevetjük azzal, hogy az algoritmus futási ideje az eredeti 11-ed részére csökkent, akkor csak azt a következtetést vonhatjuk le, hogy mindenképpen célszerű a gyorsítási lehetőségeket alkalmazni.

A táblázatot böngészve egy – az elképzeléseinknek ellentmondó – részletre figyelhetünk fel. A karcsú szófa maximális memóriaigénye szinte egyáltalán nem tér el a többi szófaváltozatétól. Korábban arra jutottunk, hogy gyakori termékhalmozok lexikografikus listában való tárolása kevesebb helyet foglal, mint a szófában

Modulus	levélkorlát						
	5	10	40	100	500	2500	10000
10							
40			1921,9	1921,9	1921,9	1920,5	1893,9
100		2068,3	2068,7	2068,7	2064,2	1915,4	1894,4
500		3937,1	3907,2	3845,5	2751,7	1902,6	1902,6
2500		10587,7	10287,5	9565,6	3185,1	1924,6	1924,6
10000		31235,1	29761,7	26778,6	5722,3	1997,9	1997,9
40000			107251,9	95479,0	15830,0	2290,9	2290,9

Maximális memória szükséglet (kbyte)

Modulus	levélkorlát						
	5	10	40	100	500	2500	10000
10							
40			28399,6	7427,4	6056,0	6946,3	11295,8
100		11087,1	3612,5	3153,1	3357,7	6577	7735,5
500		1788,8	1713,5	1739,6	2179,0	4275,8	4678,8
2500		1882,6	1816,5	1819,5	1892,9	3361,6	3712,2
10000		1896,6	1815,8	1802,9	1796,6	3265,0	3619,6
40000			1812,3	1809,1	1791,1	3270,8	3628,9

Futási idő (sec.)

2. táblázat. Hash-fa min _ supp = 0, 002 mellett

tárolás. Ezzel szemben az eredmények azt mutatják, hogy az eredeti szófa és a karcsú szófa maximális memóriaigénye hajsza pontosan megegyezik².

Az ellentmondás okára rájöhethetünk, ha megnézzük a gyakori termékhalmozok karakterisztikáját. A szakirodalomban tapasztaltaknak megfelelően a kételemű jelöltek száma a legnagyobb, méghozzá kiemelkedően. n gyakori termék esetén a 2 elemű jelöltek száma $\binom{n}{2}$, amelyek többségéről általában kiderül, hogy ritkák, így a 3 elemű jelöltek száma nemhogy $\binom{n}{3}$ -at, de még a 2 elemű jelöltek számát sem éri el. Ez természetesen tapasztalati tény, hiszen elvben a j elemű jelöltek száma akár $\binom{n}{j}$ is lehet, például abban az esetben, ha a minimális támogatottsági küszöböt 0-nak választjuk (vagy olyan kicsinek, hogy még a \mathcal{T} is gyakori). A 2 elemű jelöltek tárolásához pedig az eredeti szófának kevesebb memóriára van szüksége, mint a keskeny szófának és az 1 elemű gyakori termékhalmozokat tároló lexikografikus listának együttvéve. Ennek oka az, hogy minden gyakori terméket (1 kivételével) első

²A valóságban minimális eltérés azért van. Ez azonban nem látszik, mivel az értékek csak 1 tizedes jegy pontosságig szerepelnek a táblázatokban.

min_supp	szófa	szófa_ maxút	szófa_ sovány	szófa_ újkód
0,05	1,3	1,4	1,3	1,4
0,01	34,8	37,7	34,9	37,8
0,005	287,4	310,9	287,5	311,0
0,003	1129,8	1199,9	1129,8	1199,9
0,002	3787,4	4007,0	3787,4	4007,0
0,001	18589,9	19683,1	18589,9	19683,1

Maximális memória szükséglet (kbyte)

min_supp	szófa	szófa_ maxút	szófa_ sovány	szófa_ újkód
0,05	58,9	55,7	55,6	36,7
0,01	105,8	93,4	83,7	52,5
0,005	206,5	156,9	136,3	83,1
0,003	414,4	258,6	191,5	133,4
0,002	2296,4	695,9	557,6	353,6
0,001	29618,7	5163,4	4963,7	2681,5

Futási idő (sec.)

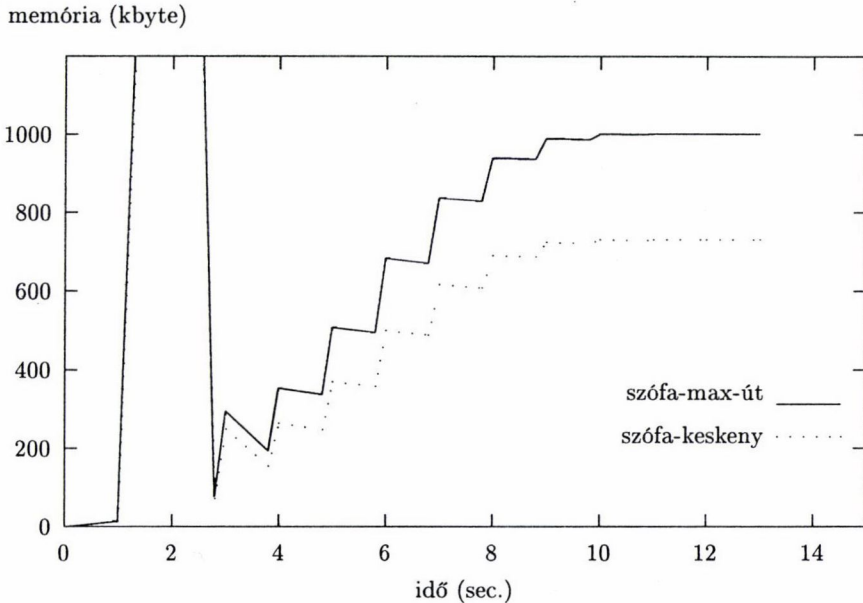
3. táblázat. A szófák eredményei

csomópont reprezentál, így az eredeti szófa csak eggyel több állapotot tartalmaz, mint a keskeny szófa.

A fentiekből nem következik, hogy a keskeny szófának semmi haszna sincs. Egy algoritmus elemzésénél nem csak a maximális memória számít, hanem a memóriai-gény időbeni alakulása is. A 6-os ábra az eredeti és a keskeny szófa memóriai-gényét mutatja az idő függvényében.

Az ábrából kiderül, hogy a keskeny szófa memóriai-génye tényleg csak a 2-elemű jelöltek generálása után egyezik meg a hagyományos szófa memóriai-gényével, utána viszont kisebb helyet igényel.

Rátérhetünk a két nagy rivális összezapására: hasonlítsuk össze a szófákat a hash-fákkal. Láthatjuk, hogy sebesség tekintetében a szófa a győztes. Csak a leggyengébb szófa sebességét tudta elérni a hash-fa, de zömében olyan paraméterekkel, amelyeknél a hash-fa memóriai-génye az optimális többszöröse. A gyorsított szófák sebességét a hash-fa semmilyen paraméterek mellett nem tudta még csak megközelíteni sem. Az is látszik, hogy ott, ahol a gyorsított szófa „csak” 2-3-szor gyorsabb a hash-fánál, ott a hash-fa memóriai-génye többszöröse a szófáénak. Ahol a memóriai-gény megegyezik, vagy a hash-faé kisebb, ott a hash-fa futási ideje nagyságrendekkel nagyobb.



6. ábra. A memóriahasználat dinamikája a szófa és szófa_keskeny esetében

A hash-fa szurkolóinak táborja joggal követelheti, hogy a gyorsításokkal felvértezett szófát ne az eredeti hash-fával, hanem a perfekt hash-elést alkalmazóval hasonlítsuk össze. A továbbiakban tehát megnézzük, hogyan szerepelt tesztjeinkben a hash-fa fejlettebb változata (4-es táblázat).

Az eredeti hash-fával összehasonlítva láthatjuk, hogy a perfekt hash-fa gyorsabb. Ez még akkor is igaz, ha a modulus paraméternek olyan nagy értéket választunk, ami kizárja az ütközést. A perfekt hash-fánál 6.1-es tulajdonság miatt számos felesleges ellenőrzést elhagyhatunk, ami gyorsítja a keresést. Memóriaigény szempontjából nem állíthatjuk, hogy a perfekt hash-fa jobb az eredeti hash-fánál. Ha a modulus kisebb a gyakori termékek számánál, akkor az eredeti hash-fában a hash-táblák kisebbek lesznek a perfekt hash-fa tábláinál. Az viszont igaz, hogy ahol az eredeti hash-fa sebessége megközelíti a perfekt hash-fát, ott az utóbbi memóriaigénye mindig kisebb. A perfekt hash-fa tehát összességében jobbnak mondható az optimális paraméterekkel rendelkező hash-fánál.

Ha a szófák különböző verzióival hasonlítjuk össze a perfekt hash-fát, akkor láthatjuk, hogy sebességben megveri az eredeti szófát, de a többivel szemben jócskán alulmarad. Memóriaigénye pedig minden esetben több volt bármelyik szófa memóriaigényénél. Ez várható, hiszen a belső pontokban található hash-táblák üresen maradt bejegyzéseit felfoghatjuk olyan éleknek, amelyek helyet foglalnak, de nem vezetnek sehova.

min_supp	levélkorlát							
	1	2	5	7	10	25	60	100
0,05	82,7	82,6	82,4	82,0	81,8	81,8	81,8	81,8
0,01	130,6	130,3	129,4	129,0	127,6	120,3	99,0	99,0
0,005	497,2	496,5	494,0	492,3	490,7	475,9	429,4	358,2
0,003	1725,6	1723,6	1719,6	1715,6	1711,6	1686,6	1613,5	1511,4
0,002	5598,4	5595,4	5587,4	5581,4	5572,4	5527,3	5411,2	5260,0
0,001	408666,7	302338,5	128241,3	90132,0	61654,2	34968,6	26793,6	26506,0

Maximális memória szükséglet (kbyte)

min_supp	levélkorlát							
	1	2	5	7	10	25	60	100
0,05	52,4	52,2	52,1	52,4	52,5	52,5	52,5	52,5
0,01	81,0	80,7	80,5	80,5	80,4	79,9	88,6	88,6
0,005	188,3	187,0	185,6	184,9	185,3	183,8	188,5	167,0
0,003	514,7	512,4	507,2	496,7	499,1	499,5	491,6	481,9
0,002	1818,0	1822,6	1638,5	1599,4	1566,8	1522,2	1499,5	1487,6
0,001	15750,1	13537,8	10719,6	9826,0	9156,3	8079,9	7561,7	7464,8

Futási idő (sec.)

4. táblázat. A perfekt hash-fa eredményei

Nézzük most az utolsó adatstruktúrát, a hash-táblákkal felszerelt szófát (5-ös táblázat). Reményeink és eddigi észrevételeink szerint ez az adatstruktúra lesz a leggyorsabb.

Valóban a hash-elést alkalmazó szófával tudjuk a leggyorsabban meghatározni a támogatottságot. Látható, hogy a gyorsaságért memóriával fizettünk. Az ár azonban nem volt magas, sosem áldoztunk fel az eredeti memóriai igény 40–50%-ánál többet.

8. Következtetések

A gyakori objektumok (elemhalmazok, epizódok, szekvenciális minták stb.) ki-nyerése az adatbányászat egyik legalapvetőbb területe. Írásunkban bemutattuk, hogy milyen adatstruktúrákat célszerű alkalmazni a feladat gyors megoldása érdekében. A hash-fa és a szófa összesen 6 különböző változatával foglalkoztunk. Elméleti megfontolásokkal vizsgáltuk a módszerek idő és memória igényét. Következtetéseinket teszteredmények is alátámasztották.

min_supp	levélkorlát							
	1	2	5	7	10	25	60	100
0,05	1,5	1,5	1,4	1,4	1,4	1,5	1,5	1,5
0,01	41,9	41,7	41,1	40,7	40,3	38,6	39,2	39,2
0,005	346,2	345,6	343,9	342,7	341,0	333,4	320,7	314,9
0,003	1340,0	1338,8	1335,2	1332,8	1329,3	1312,7	1278,9	1249,1
0,002	4478,2	4476,0	4469,4	4465,0	4458,5	4426,8	4357,7	4287,6
0,001	1063898,3	634890,5	123388,4	51763,3	27668,5	21837,6	21674,1	21496,0

Maximális memória szükséglet (kbyte)

min_supp	levélkorlát							
	1	2	5	7	10	25	60	100
0,05	51,5	51,7	51,9	52,2	52,5	52,6	52,6	53,3
0,01	68,3	68,5	68,1	68,4	69,1	70,5	74,8	74,8
0,005	88,7	89,1	92,4	90,6	91,3	93,4	98,5	98,8
0,003	126,4	125,0	125,9	125,8	126,5	130,2	138,6	145,6
0,002	282,2	282,1	296,4	302,8	336,8	345,6	357,6	364,9
0,001	2316,0	2363,8	2370,5	2645,0	2897,7	3042,4	3083,9	3109,5

Futási idő (sec.)

5. táblázat. A hash-szófa eredményei

A 6 adatstruktúra közül nem hirdethetünk abszolút győztest, minden változatnak vannak előnyei és hátrányai. Ismernünk kell a felhasználás célját, az algoritmust szemben állított követelményeket és a rendelkezésünkre álló erőforrásokat.

Amennyiben csak a sebesség fontos, és nagy mennyiségű memória áll rendelkezésünkre, akkor az alacsony levélküszöb (2–4) beállított hash-elést alkalmazó szófa a legjobb választás.

Egy általános adatbányászati rendszerben a szófát célszerű használni. Az ilyen rendszereknek hatékonyan kell működniük különböző erőforrással rendelkező gépeken és különböző karakterisztikájú adatokkal is. Fontos szempont, hogy az ilyen rendszereket elsősorban nem informatikai szakemberek, hanem marketingesek, gazdasági középvezetők, adatelemzők használják, akik elsősorban a saját szakterületükhöz értenek. Tőlük az adatbányászati algoritmusok és a felhasznált adatstruktúrák ismeretének hiányában nem várható el, hogy jól válasszák meg a paramétereket. Automatikus eszközökre van szükség, és a szófa ilyen (hangolando paraméterek nélküli) adatstruktúra.

Ha a feldolgozandó adatok karakterisztikája pontosan ismert, és a kis memóriafogyasztás jóval fontosabb a gyors futási időnél, akkor a megfelelő paraméterekkel

(kis modulus, közepes levélkorlát) rendelkező hash-fa a legjobb választás. Úgy tekinthetjük, mintha az adatstruktúrát „részabnánk” az adatokra.

Az adatbányászati algoritmusok leírásánál a felhasznált adatstruktúrákról általában nem sok szó esik, és legtöbbször a hash-fát alkalmazzák. Írásunkban bemutattuk, hogy a helyes adatstruktúra megválasztása több körülményt igényel, és leginkább a szófa alkalmazása a megfelelő. A teszteredményekből az is kiderül, hogy helytelen adatstruktúra esetén mind a futási idő, mind a felhasznált memória többszöröse lehet a szükségesnek. Ha összehasonlítjuk a különböző „trükkös” jelöltgenerálási módszerekből kapott sebességnövekedést a megfelelő adatstruktúra kiválasztása által kapott gyorsulással, akkor megállapíthatjuk, hogy az adatstruktúra kiválasztása nagyobb hatással lehet a hatékonyságra, mint a jelöltgenerálás módja.

Hivatkozások

- [1] Agrawal, R., Imielinski, T. and Swami, A., Mining association rules between sets of items in large databases, in: *Proc. of the ACM SIGMOD Conference on Management of Data* (1993) 207–216.
- [2] Agrawal, R. and Srikant, R., Fast algorithms for mining association rules, *The International Conference on Very Large Databases* (1994) 487–499.
- [3] Agrawal, R. and Srikant, R., Mining sequential patterns, in: *Proc. 11th Int. Conf. Data Engineering, ICDE* (Philip S. Yu and Arbee L. P. Chen, editors), IEEE Press, 6–10 (1995) 3–14.
- [4] Bodon, F. and Rónyai, L., Trie: an alternative data structure for data mining algorithms, *Computers and Mathematics with Applications* (2002).
- [5] Brin, S., Motwani, R., Ullman, J. D. and Tsur, S., Dynamic itemset counting and implication rules for market basket data, *SIGMOD Record (ACM Special Interest Group on Management of Data)* 26(2) (1997) 255.
- [6] Cheung, D. W.-L., Han, J., Ng, V. and Wong, C. Y., Maintenance of discovered association rules in large databases: An incremental updating technique, in: *ICDE* (1996) 106–114.
- [7] Cheung, D. W.-L., Lee, S. D. and Kao, B., A general incremental technique for maintaining discovered association rules, in: *Database Systems for Advanced Applications* (1997) 185–194.
- [8] Huhtala, Y., Kärkkäinen, J., Porkka, P. and Toivonen, H., TANE: An efficient algorithm for discovering functional and approximate dependencies, *The Computer Journal* 42 (1999) 100–111.
- [9] Huhtala, Y., Kinen, J., Porkka, P. and Toivonen, H., Efficient discovery of functional and approximate dependencies using partitions, in: *ICDE* (1998) 392–401.
- [10] Knuth, D. E., *The Art of Computer Programming Vol. 3*. Addison-Wesley, 1968.
- [11] Li, Y., Ning, P., Wang, X. S., and Jajodia, S., Discovering calendar-based temporal association rules, in: *TIME* (2001) 111–118.
- [12] Mannila, H., Toivonen, H. and Verkamo, A. I., Discovering frequent episodes in sequences, in: *Proceedings of the First International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining*, AAAI Press (1995), 210–215.

- [13] Omiecinski, E. and Savasere, A., Efficient mining of association rules in large dynamic databases, in: *British National Conference on Databases* (1998) 49–63.
- [14] Ozden, B., Ramaswamy, S. and Silberschatz, A., Cyclic association rules, in: *ICDE* (1998) 412–421.
- [15] Park, J. S., Chen, M.-S. and Yu, P. S., An effective hash based algorithm for mining association rules, in: *Proceedings of the 1995 ACM SIGMOD International Conference on Management of Data* (Michael J. Carey and Donovan A. Schneider, editors), San Jose, California, 22–25 (1995) 175–186.
- [16] Pasquier, N., Bastide, Y., Taouil, R. and Lakhal, L., Pruning closed itemset lattices for association rules, in: *Proceedings of the BDA French Conference on Advanced Databases* (October 1998).
- [17] Pasquier, N., Bastide, Y., Taouil, R. and Lakhal, L., Discovering frequent closed itemsets for association rules, in: *ICDT* (1999) 398–416.
- [18] Pasquier, N., Bastide, Y., Taouil, R. and Lakhal, L., Efficient mining of association rules using closed itemset lattices, in: *Journal of Information systems* (1999) 25–46.
- [19] Sarasere, A., Omiecinski, E. and Navathe, S., An efficient algorithm for mining association rules in large databases, in: *Proc. 21st International Conference on Very Large Databases (VLDB), Zurich, Switzerland, Also Gatech Technical Report No. GIT-CC-95-04.* (1995).
- [20] Sarda, N. L. and Srinivas, N. V., An adaptive algorithm for incremental mining of association rules, in: *DEXA Workshop* (1998) 240–245.
- [21] Srikant, R. and Agrawal, R., Mining sequential patterns: Generalizations and performance improvements, Technical report, IBM Almaden Research Center, San Jose, California (1995).
- [22] Thomas, S., Bodagala, S., Alsabti, K. and Ranka, S., An efficient algorithm for the incremental updation of association rules in large databases, in: *Knowledge Discovery and Data Mining* (1997) 263–266.
- [23] Toivonen, H., Sampling large databases for association rules, in: *The VLDB Journal* (1996) 134–145.
- [24] Wang, K., He, Y. and Han, J., Mining frequent itemsets using support constraints, in: *The VLDB Journal* (2000) 43–52.

(Beérkezett: 2003. január 3.)

MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
SZÁMÍTÁSTECHNIKAI ÉS AUTOMATIZÁLÁSI KUTATÓ INTÉZETE.
H-1111 BUDAPEST, LÁGYMÁNYOSI U. 11.
BODON@MIT.BME.HU

TRIES AND HASH-TREES IN DATA MINING

FERENC BODON

Discovering frequently occurring patterns in large databases is the most rapidly developing field of data mining. Patterns are usually defined as episodes or sets of items. The number of the possible patterns is large, hence the algorithms generate *candidates*. Ideally all frequent patterns are candidates and the number of false candidates (candidates that are not frequent) is low.

The only difference among the several algorithms in the literature is in the definition of the candidate patterns and the way candidates are generated. The data structures for storing candidate patterns have received little attention. Mostly the choice suggested in the classic algorithm APRIORI is adopted. In this paper we show that selecting the data structure properly has greater effect on the run time and memory need than the way candidates are generated. We present an improved trie-based algorithm. As far as speed is concerned, this data structure outperforms all known data structures in searching for frequent patterns.

NYELVÉSZKEDÉS

VIZVÁRI BÉLA

Budapest

Minden olyan lapnak, melynek kiadását az Akadémia támogatja, fontos feladata a szakmai nyelv ápolása.

A matematikának számos dialektusa van. Például évekig nem értettem, hogy a kolozsvári magyar kollégák mire használják az „értelmezés” szót. Aztán rákérdeztem, és megtudtam, hogy a definícióra gondolnak. Ők meg csodálkoztak a mi kifejezésünkön annak latin eredete miatt. Hasonlóképpen az optimalizálási feladatok feltételeit kielégítő pontokat egyes magyar iskolákban *megengedett*, másokban *lehetséges* megoldásoknak nevezik.

Dialektusok a matematikán belül léteznek a beszélt és írott nyelvtől függetlenül is. Ha angolszász nyelvi befolyás alatt álló közegben az ember magyar szokás szerint egy több sorba írandó képlet egyik sorának végén és a következő elején is kiteszi a mínusz jelet, akkor nem tudják, hogy most azt hozzá kell adni vagy le kell vonni. Nálunk természetes, hogy az üres halmazon vett maximum $-\infty$, a minimum meg $+\infty$, de Németország egyes részein ezt szabadon definiálhatónak tekintik.

A példákat még lehetne sorolni, de ennyi is elég ahhoz, hogy meggyőzzön minket, hogy érdemes a szakmai nyelvről beszélni, hogy jobban megértsük egymást. Ezért indítani kívánunk egy nyelvi rovatot. Ebben helye van minden, a szakmai nyelvvel összefüggő kérdésnek. Ide tartozik az is, hogy fordításkor vagy abban az esetben, amikor olyan dolgokról írunk, aminek még nincs magyarul előzménye, milyen elveket kövessünk.

A rovat nyitva áll mindenki előtt, akinek a szakmai nyelvről mondanivalója van.

KÖNYVISMERTETŐ

Prem K. Kythe, Pratap Puri, Michael R. Schäferkotter: *Partial Differential Equations and Mathematica*,
CRC Press, 1997, Boca Raton, New York, London, Tokyo

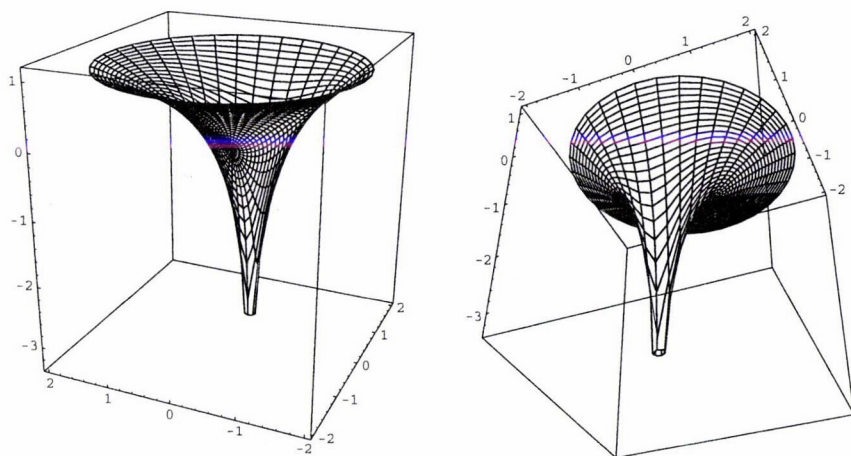
LÓCZI LAJOS

Budapest

E bevezető jellegű könyv parciális differenciálegyenletek és peremérték-problémák megoldását tárgyalja a *Mathematica* program segítségével. Elsősorban oktatási céllal íródott és két félévnyi anyagot foglal magába. Stílusa ezért visszafogott, a benne közölt eredmények klasszikusnak mondhatók. Első hat fejezetét alsóbbéves egyetemistáknak, az ez után következő négy fejezetet pedig diploma előtt állóknak ajánlják szerzői. Többéves tanítási tapasztalatukra alapozva szisztematikusan és átfogóan mutatják be az alapttechnikákat, a hangsúlyt mindvégig a módszerek példákon keresztüli alkalmazására helyezve: a könyv több mint 130, részletesen kidolgozott példát tartalmaz, további 170 problémához pedig eredmény vagy útmutatás tartozik, mégpedig rögtön a feladat szövege után. A könyv csaknem 400 oldalát ezért a képletek uralják; táblázatokkal, rövid *Mathematica*-programokkal, sík-, illetve térbeli *Mathematica*-grafikákkal tarkítva.

A bevezető után röviden ismertetik a *Mathematica* alap-utasításkészletét. Az első fejezet néhány definíciót és jelölést sorol fel, ám ezek némelyike matematikai szempontból kifogásolható. (Például egy lineáris *differenciáloperátor*tól csak a linearitási tulajdonságot követeli meg, s azt nem, hogy a szorzat deriváltjára a szokott módon hasson.) A másodrendű egyenletek osztályozása után 20 fontos, a fizikában gyakran előforduló lineáris és nemlineáris parciális differenciálegyenletet adnak meg (a Burgers-egyenletet azonban átnevezték Berger-egyenletre és a biharmonikus egyenletben is szerepel egy nyilvánvaló elírás), majd néhány egyenletről megtudjuk, hogyan származtathatók fizikai megfontolásokból. A második fejezet a karakterisztikák módszerével állítja elő elsőrendű (állandó- és változó együtthatós, lineáris és nemlineáris), valamint bizonyos másodrendű egyenletek megoldását, majd szemlélteti azokat a *Mathematica* grafikájával. A harmadik fejezet az operátorszámítás segítségével formális algebrai módszerekre vezeti vissza a differenciálegyenletek megoldását. A negyedik fejezetet az ortogonális sorfejtéseknek szentelték: az ortogonális polinomok, a Fourier-rendszer és a Bessel-függvények szerinti sorfejtésekre vonatkozó főbb eredményeket mutatják be itt. A következő fejezetben a változók szétválasztásának módszerével oldanak meg (inhomogén) hiperbolikus, parabolikus és

elliptikus peremérték-problémákat téglalapon, körön, illetve gömbben. Itt találhatjuk az első komolyabb *Mathematica*-programokat és ábrákat, melyek jól kiegészítik a formális számolásokat. A legvaskosabb hatodik fejezetben az integráltranszformációk elméletébe nyerünk bepillantást. A hat legfontosabbként felsorolt transzformáció egyikében, a Mellin-transzformáció definíciójában azonban a hatványkitevő helyet cserélt az alappal, ami szerencsére nem okoz zavart a továbbiakban, mert a fejezet részletesen csak a Laplace- és a Fourier-transzformációval foglalkozik. Számos függvény transzformáltját, illetve inverz-transzformáltját számítják ki (ez utóbbiakat többnyire komplex vonalintegrálok felhasználásával.) A könyv hetedik fejezete a legnehezebb: a harmonikus függvények, disztribúciók, integrálátalakító-tételek és Green-függvények nemtriviális alkalmazásait ismerhetjük meg számos példán és különféle tartományokon.



Az ábrákon a körlap egy Green-függvényét szemlélhetjük két nézőpontból. A logaritmikus szingularitást aszimmetrikusan helyeztük el.

Az utolsó három fejezetben először a peremérték-problémák variációs megfogalmazását tekinthetjük át, majd a Galjorkin- és a Ritz-módszerrel, ezután pedig perturbációs módszerekkel (ide értve a határ perturbációját is) ismerkedhetünk. Végül a szerzők a véges differenciák módszerének különféle változatait mintafeladatokra alkalmazzák és összehasonlítják az eredményeket az egzakt megoldásokkal. A könyvet függvény- és integráltranszformációs táblázatok és a szereplő *Mathematica*-utasítások gyűjteménye zárja. Sajnos apróbb elírások és hiányos képletek majdnem minden fejezetben előfordulnak, ezek legtöbbje azonban könnyen lelelezhető.

A könyvben mindvégig idézett webcímen kellene megtalálnunk a *Mathematica* segítségével kidolgozott példákat, ám a megadott oldal már nem elérhető. Helyette a www.crcpress.com oldalon az *Electronic Products* rész *Downloads & Updates* linkjére kattintva a felsorolásban lelhetünk a könyvhöz tartozó tömörített állományra.

Letöltés és kicsomagolás után 12 alkönyvtárban találhatjuk meg az egyes fejezetekhez tartozó *Mathematica*-jegyzetfüzeteket. Az állományok betöltéséhez magunknak kell a megfelelő útvonalat beírunk. Sajnos nem sikerült minden példát reprodukálni: néhány parancs hibaüzenet nélkül lefutott, mégsem adta a kívánt eredményt. Az egyes állományok jól vannak dokumentálva, a könyv nélkül önmagukban is érthetőek; eleve kész számolásokat, grafikonokat és ábrákat tartalmaznak. A véges differenciák utolsó fejezetben tárgyalt módszeréhez a szerzők teljes programot mellékeltek, s ezt alkalmazzák is Laplace- és Poisson-típusú egyenletekre.

A könyv sokrétű és változatos, (kritikusan olvasó) oktatók és hallgatók egyaránt haszonnal forgathatják. Összetett példái közül sokat gyakorlati alkalmazások inspiráltak. A letölthető csomagnak megvan az az előnye is, hogy a benne szereplő módszereket, példákat saját feladatunkhoz könnyen módosíthatjuk, hozzáigazíthatjuk.

Megjegyzés. Fenti ismertetőnk megírása és megjelenése között hosszú idő telt el, amely idő alatt a könyv új kiadást ért meg (Partial Differential Equations and Boundary Value Problems with *Mathematica*, Second Edition).

A szerzők ígérete szerint a könyvet számos ponton lényegesen átdolgozták, javították, illetve a peremérték-problémákról beiktattak egy egész fejezetet is. A második kiadás már a *Mathematica* 4-es verziójához igazodik. (Megemlítjük, hogy időközben megjelent a *Mathematica* program 5-ös változata, melynek sűgője egy egész könyvnyi anyagot tartalmaz differenciálegyenletek számítógépes megoldásáról. E leírás azonban főleg a differenciálegyenletek numerikus problémáira összpontosít, így tartalmában viszonylag távol áll a jelen cikkünkben szemügyre vett könyvtől.)

A kiadásért felelős a BJMT főtítkára
Szedte és tördelte az Egyenes Bt.

Nyomta a Nagy és Társa Nyomda és Kiadó Kft., Budapest
Felelős vezető: Nagy László

Budapest, 2004
Megjelent 12 (A/5) ív terjedelemben
250 példányban
HU ISSN 0133-3399

ÚTMUTATÁS A SZERZŐKNEK

Az Alkalmazott Matematikai Lapok csak magyar nyelvű dolgozatokat közöl. A kéziratok gépelését olyan formában kérjük, hogy minden gépelt oldal 25, egyenként átlag 50 betűhelyes sort tartalmazzon. A közlésre szánt dolgozatokat e-mailen az `aml@math.elte.hu` címre kérjük elküldeni az ábrákat tartalmazó fájlokkal együtt. Előnyben részesülnek a \TeX -ben elkészített dolgozatok.

A kéziratok szerkezeti felépítésének a következő követelményeket kell kielégíteni. A fejlécnek tartalmaznia kell a dolgozat címét, a szerző teljes nevét, valamint annak a városnak a nevét, ahol a szerző dolgozik. A fejléc után egy, képletet nem tartalmazó, legfeljebb 200 szóból álló kivonatot kell minden esetben megadni. A dolgozatot címmel ellátott szakaszokra kell bontani, és az egyes szakaszokat arab sorszámozással kell ellátni. Az esetleges bevezetésnek mindig az első szakaszt kell alkotnia. Az irodalomjegyzék után, a kézirat befejezésekképpen fel kell tüntetni a szerző teljes nevét és a munkahelye (illetve lakása) pontos címét. A dolgozatban előforduló képleteket szakaszonként újrakezdődően, a képlet előtt két zárójel közé irt kettős számozással kell azonosítani. Természetesen nem szükséges minden képletet számozással ellátni. Az esetleges definíciókat és tételeket (segédtételeket és lemmákat) ugyancsak szakaszonként újrakezdődő, kettős számozással kell ellátni. Kérjük a szerzőket, hogy ezeket, valamint a tételek bizonyítását a szövegben kellő módon emeljék ki. Minden dolgozathoz csatolni kell egy angol, német francia vagy orosz nyelvű, külön oldalra gépelt összefoglalót.

Mind az ábrákat, mind a lábjegyzeteket a dolgozat szakaszokra bontásától független, folyatólagos arab sorszámozással kell ellátni. Az ábrák elhelyezését a dolgozat megfelelő helyén, széljegyzetként feltüntetett, ábraazonosító sorszámokkal kell megadni. A lábjegyzetekre a dolgozaton belül az azonosító sorszám felső indexkénti használatával lehet hivatkozni.

Az irodalmi hivatkozások formája a következő. Minden hivatkozást fel kell sorolni a dolgozat végén található irodalomjegyzékben, a szerzők, illetve a társszerzők esetén az első szerző neve szerint alfabetikus sorrendben úgy, hogy a cirill betűs szerzők nevét a Mathematical Reviews átírási szabályai szerint latin betűsre kell átírni. A folyóiratban megjelent cikkekre [1], a könyvekre [5], a kötetben megjelent dolgozatokra [4], a disszertációkra [3] és a gépi program leírásokra [2] a következő minta szerint kell hivatkozni:

- [1] Farkas, J., Über die Theorie der einfachen Ungleichungen, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **124** (1902) 1–27.
- [2] Kéri, G., „DUALSIMP”, rutin a CDC 3300-ás gépekre (Magyar Tudományos Akadémia Számítástechnikai és Automatizálási Kutató Intézete, CDC 3300 felhasználói ismertető 2. 1973. május) 19–20.
- [3] Prékopa, A., „Sztochasztikus rendszerek optimalizálási problémáiról”, doktori értekezés. Magyar Tudományos Akadémia, Budapest, 1970.
- [4] Prabhu, N. U. „Recent research on the ruin problem of collective risk theory”, in: *Inventory Control and Water Storage* Ed. A. Prékopa (János Bolyai Mathematical Society and North-Holland Publishing Company, Amsterdam–London, (1973) 221–228.
- [5] Zoutendijk, G. *Methods of Feasible Directions* (Elsevier Publishing Company, Amsterdam and New York, 1960).

A dolgozatok szövegében az irodalmi hivatkozás számait szögletes zárójelben kell megadni, mint például [5] vagy [4, 76–78]. A szerzők a dolgozatukról 50 darab ingyenes különlenyomatot kapnak. A dolgozatok után szerzői díjat az Alkalmazott Matematikai Lapok nem fizet.

TARTALOMJEGYZÉK

<i>Kedves Olvasó!</i>	1
<i>Licskó Ildikó</i> , Nagymértékben nemlineáris függvények vizsgálata	3
<i>Mádi-Nagy Gergely és Prékopa András</i> , Egy többváltozós hasznossági függvény	23
<i>Arif A. Akkeleş, Balogh László és Illés Tibor</i> , A véges criss-cross módszer új variánsai biszimmetrikus lineáris komplementaritási feladatra	35
<i>Ketskemény László</i> , A legközelebbi szomszéd gyors megkeresése	61
<i>Ketskemény László</i> , A legközelebbi szomszéd módszer hatékonysága automatikus skálázás esetén	81
<i>Antos András és Pintér Márta</i> , Nemparaméteres függvénybecslések	99
<i>Horváth Alice és Prékopa András</i> , Alsó és felső korlátok rendszerek működési idejének várható értékére	131
<i>Bodon Ferenc</i> , Hash-fák és szófák az adatbányászatban	151
<i>Vizvári Béla</i> , Nyelvészkedés	175
<i>Lóczy Lajos</i> , Könyvismertető	177

INDEX

<i>Dear Reader</i>	1
<i>I. Licskó</i> , Characteristics of highly nonlinear functions	3
<i>G. Mádi-Nagy and A. Prékopa</i> , A multivariate utility function	23
<i>A. A. Akkeleş, L. Balogh and T. Illés</i> , New variants of the criss-cross method for linear complementarity problems with bisymmetric matrices	35
<i>L. Ketskemény</i> , Fast search for nearest neighbors	61
<i>L. Ketskemény</i> , Effectiveness of nearest neighbor classification with optimal scaling	81
<i>A. Antos and M. Pintér</i> , Nonparametric function estimation	99
<i>A. Prékopa and A. Horváth</i> , Lower and upper bounds for the expected time to failure of systems	131
<i>F. Bodon</i> , Tries and hash-trees in data mining	151
<i>B. Vizvári</i> , Philology	175
<i>L. Lóczy</i> , Book review	177

317 471

Alkalmazott matematikai lapok

12

2004/2

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
MATEMATIKAI TUDOMÁNYOK
OSZTÁLYÁNAK KÖZLEMÉNYEI

21.

KÖTET

ALKALMAZOTT MATEMATIKAI LAPOK

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA MATEMATIKAI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK KÖZLEMÉNYEI

ALAPÍTOTTÁK

KALMÁR LÁSZLÓ, TANDORI KÁROLY, PRÉKOPA ANDRÁS, ARATÓ MÁTYÁS

FŐSZERKESZTŐ

PÁLES ZSOLT

FŐSZERKESZTŐ-HELYETTESEK

BENCZÜR ANDRÁS, SZÁNTAI TAMÁS

FELELŐS SZERKESZTŐ

VIZVÁRI BÉLA

TECHNIKAI SZERKESZTŐ

KOVÁCS GERGELY

A SZERKESZTŐBIZOTTSÁG TAGJAI

Arató Mátyás, Csirik János, Csiszár Imre, Csörgő Sándor, Demetrovics János, Ésik Zoltán, Farkas Miklós, Frank András, Fritz József, Galántai Aurél, Garay Barna, Gécseg Ferenc, Gerencsér László, Györfi László, Györi István, Harnos Zsolt, Hatvani László, Heppes Aladár, Iványi Antal, Járai Antal, Kátai Imre, Katona Gyula, Klafszyk Emil, Komáromi Éva, Komlósi Sándor, Kovács Margit, Krisztin Tibor, Lovász László, Maros István, Michaletzky György, Pap Gyula, Prékopa András, Rapcsák Tamás, Recski András, Rónyai Lajos, Schipp Ferenc, Stoyan Gisbert, Szeidl László, Tandori Károly, Tusnády Gábor, Varga László

KÜLSŐ TAGOK:

Balla Katalin, Csendes Tibor, Fazekas Gábor, Fazekas István, Forgó Ferenc, Friedler Ferenc, Fülöp Zoltán, Imreh Balázs, Kormos János, Kuba Attila, Maksa Gyula, Racskó Péter, Tallos Péter, Temesi József

21. kötet

Szerkesztőség és kiadóhivatal: 1027 Budapest, Fő u. 68.

Az Alkalmazott Matematikai Lapok változó terjedelmű füzetekben jelenik meg, és olyan eredeti tudományos cikkeket publikál, amelyek a gyakorlatban, vagy más tudományokban közvetlenül felhasználható új matematikai eredményt tartalmaznak, illetve már ismert, de színvonalas matematikai apparátus újszerű és jelentős alkalmazását mutatják be. A folyóirat közöl cikk formájában megírt, új tudományos eredménynek számító programokat, és olyan, külföldi folyóiratban már publikált dolgozatokat, amelyek magyar nyelven történő megjelentetése elősegítheti az elért eredmények minél előbbi, széles körű hazai felhasználását. A szerkesztőbizottság bizonyos időnként lehetővé kívánja tenni, hogy a legjobb cikkek nemzetközi folyóiratok különszámaként angol nyelven is megjelenhessenek.

A folyóirat feladata a Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai) Osztályának munkájára vonatkozó közlemények, könyvismertetések stb. publikálása is.

A kéziratok a főszerkesztőhöz, vagy a szerkesztőbizottság bármely tagjához beküldhetők. A főszerkesztő címe:

Páles Zsolt, főszerkesztő

1027 Budapest, Fő u. 68.

A folyóirat e-mail címe: aml@math.elte.hu

Közlésre el nem fogadott kéziratokat a szerkesztőség lehetőleg visszajuttat a szerzőhöz, de a beküldött kéziratok megőrzéséért vagy továbbításáért felelősséget nem vállal.

Az Alkalmazott Matematikai Lapok előfizetési ára kötetenként 850 forint. Megrendelések a szerkesztőség címén lehetségesek.

A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai) Osztálya a következő idegen nyelvű folyóiratokat adja ki:

1. Acta Mathematica Hungarica,
2. Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica.

PRÉKOPA ANDRÁS 75 ÉVES



Prékopa András akadémikus, lapunk alapításának kezdeményezője, a magyar operációkutatás úttörője, a nemzetközi operációkutatás és általában az alkalmazott matematika kiemelkedő egyénisége, az idén tölti be hetvenötödik életévét.

1. Pályafutásának állomásai

1929. szeptember 11-én született Nyíregyházán. Szülővárosáról mindig nagy szeretettel emlékezik meg. A közel kétszáz éves nyíregyházi Kossuth Lajos Gimnázium, ahová járt, és ahol érettségizett 1947-ben, nagyszerű szellemi környezet volt a tudás iránt fogékony, lelkiileg érzékeny fiatalember számára az egész életre szóló alapozás szempontjából. Szülőföldjéhez egész életében érzelmileg is szorosan kötődött. Tizenöt éven át volt elnöke a Szabolcs-Szatmár-Bereg Megyei Öregdiák Klubnak. Ezen keresztül is rendszeres kapcsolatot tartott egykori iskolatársaival, barátaival, ismerőseivel. Egyik írásában írja: „ha leutazom Nyíregyházára és Szabolcs megyébe érkezem, az ezüstlevelű nyárfák látványa és az akác illata emlékeztet, otthon vagyok, ez az én világom”. Ám otthona több is lett az élet folyamán: Debrecen, Budapest, ...

Egyetemi tanulmányait a Debreceni Tudományegyetemen végezte 1947–1951 között, matematika-fizika-ábrázoló geometria szakos hallgatóként. Egy évre rá, 1952-ben ezekből a szakokból középiskolai tanári diplomát szerzett. Matematika tanárai Varga Ottó, Rényi Alfréd, Szele Tibor, Rapcsák András, Gyires Béla, Barna Béla és Gyarmathy László voltak, fizikát pedig Szalay Sándortól, Budó Ágostontól, Fényes Imrétől és Horváth Jánostól hallgatott. A legnagyobb hatást Rényi Alfréd gyakorolta rá, aki akkoriban vezette be Magyarországon a valószínűségelmélet modern, Kolmogorov-féle megalapozását, és 1952 elejétől az ő aspiránsa lett Budapesten az MTA Alkalmazott Matematikai Intézetében. Az Intézetben ebben az időben olyan szellem uralkodott, mely az új és jelentős matematikai eredményekre támaszkodó alkalmazást tartotta a legértékesebb tudományos tevékenységnek. Ez adta az indíttatást Prékopa András saját tudományos egyénisége megformálásához, és későbbi tudományos tevékenységéhez, melyben az elmélet és az alkalmazás egysége magas színvonalon megvalósul.

Az aspirantúra elvégzése után, 1955–1956 között az akkor már új nevet és szervezeti formát nyert Matematikai Kutató Intézetben dolgozott. 1956 tavaszán megvédte „Sztochasztikus halmazfüggvények” című kandidátusi disszertációját, majd szeptembertől az ELTE Valószínűségszámítási Tanszékén lett adjunktus. 1963-ban ugyanott docensi kinevezést kapott. 1968 és 1983 között a Budapesti Műszaki Egyetem matematika professzora volt, előbb a Villamosmérnöki Kar, később a Gépészmérnöki Kar Matematika Tanszékén. 1983-ban visszakérült az ELTE-re, az újonnan megalakult Operációkutatási Tanszéknek lett egyetemi tanára és első, alapító tanszékvezetője. Ezt a tanári pozíciót a 2000. január 1-jén bekövetkezett nyugdíjazásáig megtartotta, 2000-ben az ELTE emeritus professzora lett. 1985-től kezdődően az Amerikai Egyesült Államokban, a Rutgers Egyetemen (New Jersey állami egyeteme) is professzor lett, ahol ma is aktív.

Főállásai mellett nagyon fontosak voltak mellékfoglalkozásai. 1958–1965 között a Központi Statisztikai Hivatalban egy matematikus csoportot szervezett és irányított. Mintavételi tervek készítése, tanfolyamokat tartottak és matematikai jellegű statisztikai problémák megoldásával segítettek a Hivatal munkáját. 1959–1970 között az MTA Matematikai Kutató Intézetében létrehozta és vezette Magyarország első operációkutatási jellegű kutató csoportját. A csoport létrejöttékor az „operációkutatás” terminológia Magyarországon még nem volt elfogadott, ezért annak „A matematika közgazdasági alkalmazásai” nevet adták. 1970-ben a Csoport átkerült az MTA Számítástechnikai Központjába, ahol Operációkutatási Osztály néven nagy kutató egységgé fejlődött. A Központnak az MTA Automatizálási Kutató Intézettel 1973-ban történt egyesítésekor az Osztály tovább működött Prékopa András vezetésével. Az egyesített intézet (MTA SZTAKI) 1977-ben új szervezeti formát nyert, létrejött az Alkalmazott Matematikai Főosztály, melynek ő lett a vezetője. Ezt a funkciót 1985-ig megtartotta.

Prékopa András nő, felesége Széchenyi Kinga tanár, műfordító és szobrászművész. Az utóbbi években több nagysikerű plakettet készített, ezek között van a Farkas Gyula plakett, melyben a Farkas Gyula díj díjazottjai részesülnek, a 2002.

évi Bolyai bicentenáriumra készített Bolyai János és Farkas plakett, továbbá az Egerváry Jenő plakett, mellyel első ízben férjét jutalmazták a Magyar Operációkutatási Társaság 2004. évi közgyűlésén. Két lányuk és két unokájuk van.

2. Tudományos eredményei

Első dolgozatát harmadéves hallgatóként írta az ún. Banach gyufák problémáról. Az eredményt az Első Magyar Matematikai Kongresszuson ismertette 1950-ben. A feladat a véletlenszerűen használt tartalékerőforrások készletállapotának leírásában nyer alkalmazást. Az aspirantúra idején megalkotta a sztochasztikus halmazfüggvények elméletét. A svéd H. Cramér, a lengyel E. Marczewski és C. Ryll-Nardzewski mellett Prékopa András lett az elmélet egyik megalapítója és abban az időben a legmesszebbre vezető eredmények elérője. Három hosszú dolgozatban foglalkozott egyéb, idevágó dolgozatai között, a véletlen mértékek kiterjesztésével, az ezekkel vett sztochasztikus integrálokkal és a kapcsolódó eloszlás problémákkal. A fenti eredmények egy részét foglalta össze kandidátusi értekezésében, melyet a Bolyai Társulat Grünwald Géza díjjal jutalmazott. Prékopa András eredményeit nem ismerve az angol Kingman publikált tíz évvel később hasonló, de gyengébb eredményeket. Idevágó eredményeire épül egy további dolgozata, melyben a Poisson típusú véletlen ponteloszlások egy egzisztencia tételét és egy ún. szorzattér tételt bizonyít be. Az utóbbinak széleskörű gyakorlati alkalmazása van. Ebben a dolgozatban már megfogalmazza azt a modellt, amelyet a mai szakirodalomban „marked Poisson process” néven ismernek. Prékopa András tehát e témakörnek is úttörője.

1957 folyamán kezébe került a néhány évvel előbb keletkezett operációkutatás tudománya amerikai szakirodalmának néhány első példánya. Érdeklődése a lineáris programozás és általában az operációkutatás felé fordult. Az új tudomány gyakorlatiassága és vonzó matematikája nagy hatást gyakorolt rá.

Első fontos operációkutatási eredménye egy készletmodell, melynek legegyszerűbb változatát Ziermann Margittal együtt fogalmazta meg. A modellt azután több cikkben jelentősen továbbfejlesztette, részben tanítványaival. A régebben véletlen ütemezésűnek, vagy a szerzők neve alapján Prékopa–Ziermann modellnek nevezett készletgazdálkodási módszertan több mint húsz éven át domináns szerepet játszott a hazai gyakorlatban. Ma leginkább a „magyar készletmodell” nevet viseli. Külföldön is ismertté vált, széleskörű elterjedése a közelmúltban közzétett, újabb eredményeket is tartalmazó publikációk révén várható. A készletmodell egyik fejlettebb változata szükségessé tette Szmirnov rendstatisztikai tételének általánosítását, további változatok, pedig újabb elmélyült matematikai feldolgozást igényeltek. Egy sztochasztikus programozási jellegű változatot Kelle Péter tanítványával közösen dolgozott ki. Újabbán visszatért ennek a készletmodellnek a vizsgálatára és azt továbbfejlesztette dinamikus sztochasztikus programozási irányban. Erről tartott

plenáris előadást 2003. júliusában, Isztambulban az EURO/INFORMS szervezetek nagy nemzetközi konferenciáján.

Legfontosabb operációkutatási eredményei a sztochasztikus programozás körébe esnek, melynek Prékopa András az egyik megalapozója. Ő fogalmazta meg teljes általánosságban az ún. valószínűséggel korlátozott modellt, melyben egy, vagy több feltétel a döntési változóktól is függő, többdimenziós halmaz valószínűségére írunk elő (1-hez közeli) alsó korlátot, és bizonyított be ezzel kapcsolatban alapvető, mély tételeket. Az utóbbiak a megfogalmazott feladatok konvexitási problémájával foglalkoznak. A feladatok egy széles osztályára bebizonyította, hogy a valószínűségi feltételnek eleget tevő döntési változók halmaza konvex, ha a feltételben szereplő valószínűségi változók folytonos eloszlással bírnak és együttes sűrűségfüggvényük logaritmikusan konkáv. Az idevágó fontos tételek révén, a matematikán belül is jelentős, új eredményeket ért el. Bevezette a logkonkáv mérték fogalmát és bebizonyította annak alaptételét: ha az együttes sűrűségfüggvény logkonkáv, akkor az általa származtatott valószínűségi mérték is az. Több más fontos eredményt is elért e téren. Eredményeit széles körben alkalmazzák az operációkutatáson kívül a fizikában, a statisztikában, a matematikai analízisben, a konvex geometriában, az operációkutatási alkalmazások révén a műszaki tudományokban, és sok egyéb tudományban (dietaetika, szociológia stb.).

Az egyenlőtlenségek elméletében Prékopa, Prékopa-Leindler, vagy Prékopa-Borell egyenlőtlenségként említik a logkonkáv mértékek egyenlőtlenségét, illetve annak változatait, általánosításait, gyakran az ünnepezt jelzővel (celebrated inequality) és gyakran külön fejezetet szentelve neki.

Prékopa logkonkavitási eredményei az operációkutatási vizsgálatok keretében születtek. Ritkaságszámba megy, hogy egy ilyen matematikai eredmény a matematikán belül és más vonatkozásban is széleskörű alkalmazást nyer. Tudományos igényű alkalmazási problémák megoldása matematikailag is jelentős, új eredmények elérése révén, ez jellemzi Prékopa András kutatási tevékenységét.

Újabban szellemes bizonyítást adott arra, hogy elég nagy argumentum értékek esetén a normális és a Dirichlet eloszlás eloszlásfüggvénye nem csak logkonkáv, hanem az erősebb, konkavitási feltételt is teljesíti.

A valószínűséggel korlátozott sztochasztikus programozási modell első nagy sikerét harminc évvel ezelőtt aratta a magyar villamosenergiapár öt éves terve feladatának a megfogalmazása és megoldása révén. További fontos alkalmazások születtek víztározók optimális méretezésére, tavak optimális vízszintszabályozására, együttműködő villamosenergia rendszerek optimális kapacitás bővítésére, készletezési, termelésirányítási, keverési feladatok megoldására, optimális statisztikai mintavételi terv készítésére stb. Ezek a feladatmegoldások új tudományos eredményt jelentenek nem csak alkalmazott matematikai/operációkutatási vonatkozásban, hanem az alkalmazási területek tudományaiban is. A valószínűséggel korlátozott sztochasztikus programozási modell első feladatmegoldó algoritmusának a kidolgozása is Prékopa András nevéhez fűződik. Számítástechnikai, szimulációs és optimalizálási algoritmusok kidolgozása és implementálása révén kezdetben Deák István és

Szántai Tamás vett részt a modellel kapcsolatos munkákban. Később Kelle Péter, Rapcsák Tamás, Mayer János és Komáromi Éva is bekapcsolódott. A sztochasztikus programozás történetében Prékopa csoportjának a munkájában alkalmazták először, egy számítógépes futáson belül, az optimalizálást és a szimulációt, több, mint harminc évvel ezelőtt. E tekintetben igen érdekesek és újszerűek a tiszai tározók méretezésével és egy új többdimenziós gamma eloszlással kapcsolatos, Szántai Tamással közös dolgozatai. A Tisza vízhozamát nem sikerült a szakirodalomból vett többdimenziós eloszlással leírni, ezért új eloszlást vezettek be, melynek empirikus adatokhoz való illesztését lineáris programozással végezték. Az eloszlást azután szimulálták, és az eredményeket egy másik optimalizáció keretében használták fel.

A valószínűséggel korlátozott modellel kapcsolatos vizsgálatait később kiterjesztette többdimenziós diszkrét eloszlásokra is. Bevezette a p-szintű efficiens pont fogalmát és segítségével a feladatra egzakt és közelítő megoldásokat adott. Különösen értékesek ebben a vonatkozásban azok az elméleti eredmények és megoldó algoritmusok, továbbá alkalmazások, amelyeket Vizvári Bélával, majd D. Dentchevával és A. Ruszczyńskivel közösen ért el. A feladattípus alkalmazását hálózatok optimalizálási, továbbá pénzügyi és közlekedési problémák megoldásán mutatták be.

Egyik kiemelkedő alkalmazási eredménye a magyarországi villamosenergia termelése optimális menetrendjének a meghatározása. A feladaton egy kutató csoport közel tíz éven át dolgozott Prékopa András vezetésével és hathatós részvételével. A napi villamosenergia igény előre jelzett értékeinek a birtokában egy nagyméretű, vegyesváltozós (folytonos és 0,1-es értékű), nemlineáris (nem konvex) optimalizálási feladatot foglalmaztak meg. Ennek egyik újszerűsége abban áll, hogy együttesen kezeli a hálózati feltételeket az erőművekkel és ezáltal egyfelől sikerül a generátorok ki- és bekapcsolásával járó nagy feszültségingadozásokat elkerülni, másfelől az optimális terhelés kiosztás és energiaszállítási feladatokat egy modellen belül meghatározni. A kb. 1600 feltételt és ugyanennyi változót (közülük kb. 400 a 0,1 értékű) tartalmazó feladatot a 80-as évek elején az Akadémia IBM 3031-es számítógépén két perc alatt oldották meg. A munkában Potecz Béla (abban az időben az Országos Teherelosztó vezetője) és Németh Ágoston erősáramú mérnökök, továbbá Deák István, Hoffer János, Mayer János és Strazicky Beáta matematikusok vettek még részt. A munka az MTA SZTAKI keretein belül készült.

Prékopa aspiránsai között a matematikusokon kívül mérnökök, orvosok és más tudományok művelői is szép számban voltak. Az orvos végzettségű (ma professzor és intézeti igazgató a Semmelweis Orvostudományi Egyetemen) Kopp Mária egykori aspiránsával érdekes magatartástudományi jelentőségű játékelméleti modellt alkottak meg az embernek a környezetével szembeni magatartására vonatkozólag. A modellben azt a nagy általánosságban érvényes elvet foglalmazták meg, hogy magatartásunkat a kompetencia maximalizálása vezérli. A cikket csak magyar nyelven közölték, ami sajnálatos, mert ezt az időközben híressé vált modellt tíz évvel korábban alkották meg, mint A. Bandura, akinek ezt a mai szakirodalom tulajdonítja egy 1988-ban megjelent angol nyelvű cikke alapján.

Nemrég Xiaoling Hou doktoranduszával jelentetett meg egy részben játékelméleti cikket, melyben a kifizetési (payoff) mátrixot ismeretlennek tételezik fel, majd mintavétellel szereznek ezzel kapcsolatos információt. A cikkben meghatározzák azt a minta nagyságot, amelynek alapján a játék értéke előírt pontossággal megközelíthető. Hasonló problémát oldanak meg a lineáris programozási feladattal kapcsolatban, ahol a technikai együtthatókra vonatkozólag történik mintavétel.

Közel húsz évvel ezelőtt kezdett foglalkozni események Boole függvényei valószínűségeire vonatkozó alsó és felső becslésekkel. Ezekre a sztochasztikus, nagy rendszerekkel kapcsolatos feladatok megoldásában (pl. távközlési, vagy szállítási hálózatok megbízhatóságának közelítő számításában) van igen nagy szükség. A legismertebb Boole függvény, melyet események alkotnak: az unió. Ennek valószínűségét elvben a Poincaré formula (inclusion-exclusion) alapján lehet kiszámítani, a gyakorlatban azonban az események száma igen nagy lehet és az említett formulának csupán az első néhány tagja számítható ki, nagysebességű elektronikus számítógéppel is. Becslésekre kell szorítkoznunk. A Poincaré formula első néhány tagja felhasználásával Bonferroni (1937) adott egyszerű becsléseket, melyek azonban a gyakorlatban többnyire használhatatlanok. Dawson és Sankhoff 1967-ben az első két tag segítségével éles alsó becslést adott az unió valószínűségére. Prékopa észrevette, hogy a Poincaré formula tagjaira alapozott éles valószínűségi becslések, ún. binomiális momentum probléma gyanánt fogalmazhatók meg, és a lineáris programozás eszközeivel feltárta ezeknek a feladatoknak a szerkezetét. Erre támaszkodva új formulákhoz, ill. becsléseket eredményező hatékony algoritmusokhoz jutott. Az új formulákat részben Boros Endrével közösen nyerte. Az eredményeket alkalmazta szállítási hálózatok (Boros Endrével közösen), távközlési hálózatok (Boros Endrével és Keh Wi Lih-hel közösen) megbízhatósági számítására, az utóbbi bevonult az AT&T napi gyakorlatába, a PERT problémára (Jianmin Long-gal és Szántai Tamással közösen), többdimenziós integrálok becslésére, valószínűséggel korlátozott sztochasztikus programozási feladatban valószínűségek becslésére, és más feladatokra. Igen érdekes az az alkalmazás, melyben az ún. halmaz lefedési, egyébként determinisztikus feladatot oldja meg valószínűségi korlátok felhasználásával. Ez a munkája Boros Endrével közös.

A binomiális momentum problémán kívül foglalkozott az ún. Boole-feladatra támaszkodó valószínűségi becslésekkel is. Ezekben a feladatokban nem a Poincaré formulában szereplő „aggregált” valószínűségeket használják, hanem az események, eseménypárok, stb. egyedi valószínűségeit. Egy Bukszár Józseffel közös cikkében a legfeljebb háromeseményes valószínűségekre támaszkodva ad igen jó felső becslést az unió valószínűségére. A binomiális momentum probléma feladatát aggregálnak tekinthetjük a Boole-féle feladathoz képest. Míg az aggregált feladat numerikus megoldásának csak instabil volta lehet az akadálya (nem a feladat mérete), addig a Boole-féle feladat numerikus megoldását annak méretei (n esemény esetében az LP oszlopainak a száma $2^n - 1$) teszik gyakran számítástechnikailag kezelhetetlenné. Két újabb keletű cikkében olyan korlátokat ad az unió és n esemény közül legalább r bekövetkezésének a valószínűségére, mely egy közbülső LP feladatra támaszkodik.

Ezáltal elkerüli a számítástechnikai nehézségeket, másfelől azonban az aggregált feladattal nyerhetőknél jobb becsléseket kap. Mindkét cikke L. Gao-val közös.

A diszkrét binomiális momentum problémával kapcsolatos vizsgálatait kiterjesztette a diszkrét hatványmomentum problémákra, az egy- és többváltozós esetekben. Ezekben a feladatokban az osztott differenciákkal megfogalmazott magasabbrendű konvex függvények kerülnek felhasználásra. Az idevágó eredmények egy része olyan függvényekre vonatkozik, melyeknek az értelmezési tartománya diszkrét. Az eredmények másik részében azonban a függvények értelmezési tartománya véges, vagy végtelen intervallum. Az előbbi kategóriába tartozó feladatokban a fő célkitűzés duál megengedett bázisok keresése, melyek azután a becsléseket és a megoldó algoritmusokat eredményezik. Mellékeredményként sikerült olyan egy- és többváltozós Lagrange-féle interpolációs polinomokat konstruálni, melyek az adott diszkrét függvényt féloldalasan approximálják. Egy idevágó legújabb dolgozata Nagy Gerellyel közös. Prékopa eredményei tehát a Lagrange-féle interpoláció elméletét is gazdagították. Egy újabb, Gabriela Alexével közös dolgozatában az egydimenziós, folytonos momentum probléma numerikus megoldására ad igen hatékony eljárást, midőn a célfüggvény integrandusza magasabbrendű konvex függvény. A numerikus számításokban harminc momentumot is figyelembe tudnak venni. Az egyváltozós diszkrét momentum problémát megoldó duál típusú algoritmus numerikus hatékonyságát vizsgálja, aritmetikai programcsomag felhasználásával, egy Szedmák Sándorral közös, szintén újabb dolgozata. Ötszáz lehetséges értéket megengedve, ötven momentum felhasználása esetén is kielégítő pontosságot értek el a feladat megoldásában.

A számos matematikai és alkalmazási területen kívül Prékopa András a matematikátörténetnek is jeles kutatója. Az egyik idevágó cikke az optimalizáláselmélet kialakulásának történetéről szól. A cikk Amerikában jelent meg angol nyelven és feltárja, többek között, Farkas Gyula munkásságát a nemlineáris programozás optimalitási (szükséges) feltételének megalkotásában. A szakmai nagyközönség ily módon értesülhetett arról, hogy Farkas Gyula nem csak a lineáris egyenlőtlenségek alaptételét bizonyította be, hanem több, mint egy fél évszázaddal megelőzve másokat, a nemlineáris optimalizálás centrális jelentőségű elméletét is kidolgozta, az analitikus mechanika keretei között (ehhez volt szüksége a lineáris egyenlőtlenségekkel kapcsolatos tételre). Egy másik fontos cikkében Bolyai János felfedezésének jelentőségével és hatásával foglalkozik, széles anyagot felölelve, élvezetes stílusban. Összefüggésbe hozza Bolyai nemeuklideszi geometriáját a modern alkalmazott matematikával és számítástechnikával. Nemrég Szénássy Barnáról, a jeles Bolyai kutatóról tartott előadást és írt ismeretterjesztő cikket.

Az ismeretterjesztést középiskolások felé is szívesen és eredményesen tette, cikkeket írt a Középiskolai Matematikai Lapokba a valószínűségelméletéről és a lineáris programozásról.

Nem volna teljes Prékopa András tudományos munkásságának ismertetése könyveinek említése nélkül. Három önállóan írt könyve az 1962-ben megjelent, majd négy kiadást megért Valószínűségelmélet, az 1968-ban megjelent Lineáris Progra-

mozás és az 1996-ban megjelent angol nyelvű Stochastic Programming. Valószínűségelmélete a mai napig közkedvelt mű, elsősorban a mérnökök körében. Világosan kifejtett elmélet és gyakorlatias szellem a jellemzője. Négyszáznegyven oldalon, a valószínűségelméleten kívül a matematikai statisztikába is igen jó bevezetést nyújt. A három és fél évtizeddel ezelőtt négyszáz példányban megjelent Lineáris Programozás könyvét ma is széles körben használják, néhol asztalhoz láncolva, hogy a ritka érték ne hogy elveszzen. Megjelenése idején kiemelkedően a legjobb könyv volt ebben a témában, a nemzetközi szakirodalmat tekintve is. A könyvben több algoritmus és tétel újszerű beállítást nyer. Az egész művet elegancia, egzaktság és világos stílus jellemzi. Öröndetes, hogy folyamatban van újabb kiadása. A Kluwernél 1996-ban megjelent Stochastic Programming is a legjobb a hasonló tárgyú könyvek körében. Magas színvonalú matematika és konkrét gyakorlati alkalmazás harmonikus egységet alkot ebben a jó összefoglalást nyújtó, nagy anyagot felölelő műben.

A Bognár Jánosnéval, Mogyoródi Józseffel és Szász Domokossal közösen írt Valószínűségszámítási Feladatgyűjtemény nemrég újabb kiadást ért meg, sokat használt mű a magyar nyelvű szakirodalomban.

A Prékopa András által írt könyvrészletek közül kiemelkedik a Handbook on Stochastic Programmingba írt, mintegy száz oldalas, Probabilistic Programming című fejezet, mely a témának tömör és jól használható összefoglalását nyújtja. Ebből azok is tájékozódhatnak a lényeges eredmények felől, akik azokat csupán alkalmazni akarják.

A nagy számú szerkesztett könyv, melyben a szerkesztő cikke is minden esetben ott van, többnyire színvonalas és referált konferencia kiadvány. Ezek is tanúsítják, hogy Prékopa igen sok hazai és nemzetközi tudományos konferenciát szervezett. Van azonban olyan mű a szerkesztések között, mely nem konferencia kiadvány: a 2004-ben megjelent Bolyai János Emlékkönyv. A könyv társszerkesztői: Kiss Elemér, Staar Gyula és Szenthe János. Bolyai János születésének 200. évfordulója alkalmából indult el a könyv összeállításának munkája Prékopa András kezdeményezésére. Ez az első olyan Bolyai monográfia, mely a Bolyai Jánossal kapcsolatos széleskörű ismereteinkre támaszkodik és azokat jól össze is foglalja. Hála az elmúlt évtizedekben folytatott eredményes Bolyai kutatásnak, a Bolyai évfordulóra sikerült a Bolyai kéziratokat lényegében teljeskörűen feldolgozni. A Prékopa András által szervezett 2002. évi Bolyai János nemzetközi emlékkonferencia kiadványa is már sajtó alatt van. A konferencián ő is tartott előadást a hiperbolikus ortosémák köbtartalmának becsléséről és a kötetben angol nyelven is megjelenik a Természet Világában közölt „Bolyai János forradalma” című nagyon szép és informatív cikke.

3. Tudományszervező tevékenysége

Prékopa András a hazai operációkutatás szervezetei létrejöttében és sokrétű tevékenysége elindításában meghatározó szerepet játszott. 1957 őszén a Matematikai

Kutató Intézetben operációkutatási szemináriumot szervezett, melyen hetenként találkoztak az új tudomány iránt érdeklődő matematikusok, közgazdászok, mérnökök. Ez idő tájt vásárolták meg külföldről az első nyugati számítógépet Franciaországból és kezdték építeni az Akadémián, szovjet dokumentáció alapján, az M3 elektronikus számítógépet. Még nem volt teljesen világos, hogy mi a kapcsolat és a különbség az operációkutatás, a kibernetika, a számítástechnika és az ökonometria között. Néhány éven belül azonban világossá vált, hogy három dologról van szó. A „kibernetika” beolvadt az operációkutatásba és a számítástechnikába (az utóbbira ma Magyarországon inkább az informatika elnevezés használatos). Az operációkutatás lett az a tudomány, amely széleskörűen és általában a rendszerekkel foglalkozik, nagymértékben támaszkodva a számítástechnikára, a matematikára és természetesen az adott alkalmazási terület ismereteire. Az operációkutatás hazai kezdő lépésének a megtételéhez szükség volt erre a világos látásmódra.

Az „operációkutatás” címszó használata az ötvenes évek végén még nem volt megengedett, ezért amikor 1959-ben Prékopa András vezetésével létrejött az első ilyen jellegű kutató csoport, annak „A matematika közgazdasági alkalmazásai” nevet adták. A csoport tovább folytatta a hetenkénti szemináriumot, melyhez egyre többen csatlakoztak.

A csoport 1970-ben átkerült az MTA Számítástechnikai Központjába (az MTA SZTAKI jogelődje), Operációkutatási Osztállyá szerveződött. Ebben az időben már nem volt akadálya az „operációkutatás” szó használatának. 1977-ben, már a SZTAKI-ban, Prékopa létrehozta az Alkalmazott Matematikai Főosztályt, melyben a négy osztály egyike volt az Operációkutatási Osztály. Már a korábbi Osztálynak is nagy nemzetközi tekintélye volt, elsősorban vezetője személyes elismertségének köszönhetően, a hírnév és tekintély a Főosztály megalakulása után tovább növekedett. Ebben szerepet játszott az is, hogy Prékopa sok nemzetközi konferenciát szervezett, melyen neves külföldi tudósok vettek részt, és alkalmuk volt a hazai tudományos eredményekkel is megismerkedni.

Első nagy nemzetközi konferenciáját 1963-ban rendezte Budapesten „A matematika közgazdasági alkalmazásai” címmel. A nagyszámú résztvevő között olyan híres emberek is voltak, mint L. V. Kantorovics, a lineáris programozás egyik megalapítója, későbbi Nobel díjas, Oskar Morgenstern, aki Neumannal együtt könyvet írt a játékelméletről, Herman Goldstein, aki Neumannal együtt dolgozott az első elektronikus számítógépen az ENIAC-on, majd az Institute for Advanced Study gépén, Harold Kuhn, a hozzárendelési probléma „magyar módszerének” a megalkotója, a dualitás elmélet és a nemlineáris programozás egyik úttörője, Philip Wolfe, a nemlineáris programozás kiemelkedő egyénisége és több más olyan kutató, aki akkor már nemzetközileg is ismert volt, vagy később azzá lett. A konferencia a Bolyai Társulat rendezvénye volt.

1964-ben a Bolyai Társulaton belül Prékopa létrehozta az Alkalmazott Matematikai Szakosztályt. Ennek megalakulásától kezdve több mint húsz éven át ő volt az elnöke. Részenben ebben a minőségében szervezte 1967-ben a veszprémi operációkutatási konferenciát, 1970-ben a debrecenit, melyek magyar nyelven folytak hazai résztvevőkkel. Ezt követően, 1971-ben, Győrben nemzetközi készletezési és tározási

konferenciát szervezett, amin matematikusok, mérnökök és ipargazdasági szakemberek vettek részt. Hasonlóan nemzetközi volt az az operációkutatási konferencia, amelyet Egerben rendezett 1974-ben. Ezen az IFORS (International Federation of Operational Research Societies) is hivatalosan képviseltette magát.

Az 1970-es évek krónikájához tartozik még a nemzetközi jelentőségű mátrafüredi matematikai programozási konferenciák elindítása és ezek sorában az első megszervezése. A legelső neve még a Mátrafüredi Téli Iskola nevet viselte, ez 1973-ban volt. A mátrafüredi konferenciákon a matematikai programozás számos neves egyénisége megfordult: az amerikai Dantzig, Rockafellar, Grigoriadis, Wets, Zionts, Jewell és Bell, az osztrák Burkard, a svájci Kall, a dán Krarup, az orosz Mojszejev, Yeremin és Jevtusenko, a román Dragan, a lengyel Walukiewicz és Slovinsky, a cseh Nožička és Dupačová, a német Korte, Zowe, Guddat és Elster, a francia Houard, a brit Sargent és mások, továbbá, természetesen, valamennyi jeles magyar matematikai programozó. Eleinte minden évben volt mátrafüredi konferencia, később ritkábban. Ezek a konferenciák összekötő szerepet játszottak az akkori kelet-nyugat szétszakítottságban a matematikai programozás kutatói számára és kellemes, otthonos keretek között lehetőséget adtak a rendszeres találkozásra, a személyes kapcsolatok kiépítésére. A konferenciasorozat ma is folytatódik.

1972-ben a Számítástechnikai Központ osztályvezetőjeként szervezte meg Dunaújvároson a „Kohászat és Matematika” című konferenciát, mely sokat segített a matematikusok ipari kapcsolatainak a kiépítésében.

Prékopa András személyes nemzetközi elismertségének volt köszönhető, hogy 1976-ban Magyarország rendezhette meg a IX. Nemzetközi Matematikai Programozási Szümpozionot. Erre a nagy nemzetközi rendezvényre három évente kerül sor és a nemzetközi jellegű Matematikai Programozási Társaság keretében zajlik. Magyarországon a partner rendező szervezet a Bolyai Társulat volt. A nagysikerű konferenciának Prékopa András volt az elnöke. E konferenciasorozat programbizottságának 1964 és 1994 között minden alkalommal tagja volt.

Az említetteken kívül még a következő konferenciáknak volt a fő szervezője: nemzetközi sztochasztikus programozási konferenciák 1. Oberwolfach (1979); 2. Kőszeg (1981); 3. IIASA, Laxenburg (1983); IFIP rendszermodellezési és optimalizálási konferencia, Budapest (1985); EURO 2000 (Conference of the European Operational Research Societies); János Bolyai Memorial Conference on Hyperbolic Geometry, Budapest (2002), Bolyai Memorial Conference, New Brunswick, NJ, USA (2002).

Az 1970-es évekre, nagy mértékben Prékopa Andrásnak köszönhetően, néhány alkalmazott matematikus évfolyam már elhagyta az egyetem padsorait és eredményes kutató munkát végzett az iparban, az államigazgatásban, vagy egyetemi állásban. Az alkalmazott matematikai kutató munka és tudományos eredmények azonban Magyarországon nem élveztek a tiszta matematikaihoz egyenrangú megbecsülést. Ennek ellensúlyozására 1974-ben, a Bolyai Társulat keretében, megalapította a Farkas Gyula díjat, melyet a kiváló alkalmazott matematikai jellegű eredményt elért fiatal kutatók kapnak. A díjat minden évben kiosztják. 2004 előtt

ez volt az egyetlen alkalmazott matematikai jellegű díj, melyet magyar alkalmazott matematikus hazájában megkaphatott.

1976-ban ankétot rendezett a hazai alkalmazott matematika helyzetéről és problémáiról. Ennek jegyzőkönyve ma is megvan, az elhangzott megállapítások ma is érvényesek. Az ankéton ő tartotta a vitaindító előadást, szövege megjelent a Magyar Tudományban.

Az 1979-es évben akadémiai levelező taggá történt megválasztását követően, felhasználva az új cím adta lehetőségeket, az Akadémia Matematikai és Fizikai Tudományok Osztályán Operációkutatási Bizottságot szervezett. Ezzel biztosította ennek az új tudománynak az akadémiai szintű elismerését. A bizottság ma is működik az Akadémia Matematikai Osztályán, a Matematikai Bizottság és az Informatikai és Számítástudományi Bizottság mellett.

Említettük, hogy Prékopa András kezdeményezője lapunk alapításának is. Az 1973-ban megindult lapnak hat éven át felelős szerkesztője volt, ezt követően 1990-ig a főszerkesztői feladatot látta el. Jelenleg a következő tudományos folyóiratok szerkesztőbizottsági tagja: Acta Cybernetica, Acta Mathematica Hungarica, Alkalmazott Matematikai Lapok, Annales Scientiarum Mathematicarum de R. Eötvös Nominatae Sectio Mathematica, Annals of Operations Research, Computational Management Science, Discrete Applied Mathematics, Mathematical Inequalities and their Applications. Korábban tagja volt a European Journal of Operational Research, Periodica Mathematica Hungarica, Stochastic Processes és a Mathematics of Operations Research folyóiratoknak.

4. Oktatói tevékenysége

Nagyon jelentős oktatói munkássága. Életrajzából kitűnik, hogy egész eddigi pályafutása alatt tanított, ötvenöt év egyetemi oktatói munkát tudhat maga mögött.

Másodéves egyetemi hallgató korában, 1949 tavaszán demonstrátor lett a Debreceni Tudományegyetem matematikai intézetében. A következő tanévben, harmadéves hallgatóként, ő tartotta a vegyészeknek a matematikai bevezető előadásokat. Negyedéves hallgató korában már a matematikus hallgatók számára tartotta a matematikai analízis főkéllégiumot.

Az egyetem elvégzése után, 1951-ben Budapestre helyezték, fél évig volt tanársegéd a Vegyész-mérnöki Kar Matematika Tanszékén. Az 1952 elején kezdődött aspirantúra alatt is oktatott az Eötvös Loránd Tudományegyetemen, ahol 1956-tól állásba került. Ebben az időben indult a valószínűség-számítás szakirány, melynek a valószínűség-számítási alaptárgyon kívül két fő tantárgya volt: sztochasztikus folyamatok és matematikai statisztika. Prékopa András feladata a sztochasztikus folyamatok tematikájának a kidolgozása és a tárgy több éven át való előadása volt.

Az ötvenes évek végén kezdte az ELTE-n az operációkutatási tárgyak oktatását. Első lineáris programozási kurzusát 1958 őszén tartotta. Ezt követően minden év-

ben oktatott operációkutatást, a hatvanas évek folyamán szinte valamennyi abban az időben már létezett operációkutatási diszciplináról tartott előadást a különféle programozásoktól a készletezési és sorbanállási modellekig.

1965-ben életbe lépett egy egyetemi reform és Prékopa András kiharcolta, hogy az operációkutatás külön szakirány legyen a matematikusképzésen belül (az egyéb szakok: a valószínűségszámítási, az analízis, továbbá a numerikus és gépi matematika mellett). Az első olyan évfolyam, mely már a reform szerint kezdte egyetemi tanulmányait, a hároméves alapképzés után 1968-ban kezdte el a két éves szakirányú tanulmányokat. Így a szakirány hivatalosan 1968-ban indult. Valójában már 1967-től kezdődően rendszeresen megtartották az operációkutatási szakirányú előadásokat, melyeket sokan hallgattak. Erre való tekintettel jogosan állítható, hogy az első évfolyam 1969-ben végzett.

1968-70 között nagysikerű két éves operációkutatási tanfolyamot rendezett a Bolyai Társulat Alkalmazott Matematikai Szakosztályának keretében. Az egyetemi féléveknek megfelelő időben, minden héten öt napon át, napi négy órában folytak az előadások. Prékopa András maga több tárgy előadását vállalta. Rajta kívül Majthay Antal, Kovács László Béla, Klafszyk Emil, Éltető Ödön és mások voltak az előadók. Az előadók egy része jegyzetet is írt előadásaihoz, ezeket a Bolyai Társulat könyv alakban megjelentette. A legmaradandóbb a Prékopa András által írt *Lineáris Programozás* című könyv lett, melyet a mai napig használnak a lineáris programozás klasszikus fejezeteinek az oktatásában.

Ha valaki összehasonlítja Prékopa András életrajzi adatait oktatási pályafutásának adataival, észreveszi, hogy az ELTE-n a szakirányt már a BME tanáraként vezette (1968–1983 között). A kép még bonyolultabb, ugyanis a szakirány oktatói az általa mellékfoglalkozás formájában vezetett akadémiai intézeti csoport, ill. osztály tagjai voltak. A Számítástechnikai Központ, ill. később a SZTAKI Operációkutatási Osztálya gyakorlatilag az ELTE akkor még nem létező Operációkutatási Tanszékének a teljes feladatkörét ellátta. A Tanszék végül is 1983-ban létrejött Prékopa András vezetésével, aki ekkor visszakерült az ELTE-re, ám jó néhány évig még rendkívül mostoha körülmények között működött.

1993-ban az ELTE-n létrehozta az Operációkutatási, Alkalmazott Matematikai és Statisztikai doktori programot, melynek ő lett a vezetője. Ezt 1994-ben akkreditálták. A program 2001 óta a Matematikai Doktori Iskola keretében működik, változatlanul Prékopa András vezetésével és a program korábbi címében megjelölt három alprogrammal.

1985-ben az Amerikai Egyesült Államokban, a Rutgers Egyetemen (New Jersey állami egyeteme) is professzor lett. Ebben az állásában a mai napig is aktív. Minden valószínűség szerint ő tartotta az USA-ban az első sztochasztikus programozási kurzust, erre 1985 őszén került sor. Ezen kívül kidolgozta, és a RUTCOR, Rutgers Center for Operations Research keretében bevezette az Actuarial Mathematics, a Financial Mathematics, továbbá a Stochastic Models of Operations Research kurzusokat, ez utóbbit undergraduate és graduate szinten egyaránt. A fentiekén kívül

a Rutgers egyetemen még alkalmazott matematikai, statisztikai, lineáris programozási és analízis kurzusokat tartott.

Ebben a részben kell megemlékeznünk arról is, hogy nagy számú tanítványa készített és védett egyetemi doktori és kandidátusi értekezést (többben mind a kettőt) irányításával. Ha csak a személyek számát vesszük, multiplicitás nélkül, ez a szám akkor is negyvenhét. Közöttük a magyaron kívül tíz különböző országból származó egykori diák van. Több mint a fele ma egyetemi tanár, jónéhányan nemzetközi hírnévre tettek szert. Rajtuk kívül még sokan említhetők, akik ugyan nem Prékopa András vezetésével írták disszertációjukat, de az ő oktatói munkája révén választották az operációkutatást élethivatásukká és lettek híres professzorok (pl. Maros István, Imperial College; Kovács László Béla, koppenhágai egyetem; Eiben Ágoston, amszterdami egyetem). Jelenleg négy doktorandusz dolgozik vezetésével.

Vendégprofesszori kinevezések, elismerések, tagság tudományos szervezetekben

Vendégprofesszori kinevezései: Aarhus University, Dánia, 1960; Case Institute of Technology, USA, 1965; Tulane University, USA, 1965, 1967; Universität Zürich, 1975; University of Wisconsin-Madison 1977–1978; Stanford University, 1978; University of Copenhagen, 1983; Rutgers University, 1985–1987.

Tiszteletbeli tagságai: International Statistical Institute, tag 1968-tól; Mexikói Mérnöki Akadémia, külföldi lev. tag 1977-től; Magyar Tudományos Akadémia, lev. tag 1979–1985 között, r. tag 1985-től; Econometric Society, fellow 1978-tól; New York Academy of Sciences, tag 1987-től; Bolyai János Matematikai Társulat, tiszteletbeli elnök 1994-től; Magyar Operációkutatási Társaság, tiszteletbeli elnök 1991-től.

Díjai: Grünwald Géza díj a Bolyai János Matematikai Társulattól, 1956; Benedikt Ottó díj az MTA SZTAKI-tól, 1979; A Lengyel Tudományos Akadémia díja, 1982; MTESZ díj, 1983; Intézeti díj az MTA SZTAKI-tól, 1985; Szele Tibor emlékérem a Bolyai János Matematika Társulattól, 1994; Kluwer nívódíj a Stochastic Programming c. könyvéért, 1995; Széchenyi díj, 1996; Az Arany János Alapítvány kuratóriumának nagydíja, 2002; EURO Gold Medal, az Európai Operációkutatási Szervezetek aranyérme, 2003; Egerváry Jenő emlékérem a Magyar Operációkutatási Társaságtól, 2004.

Tagsága és funkciói tudományos szervezetekben: Bolyai János Matematikai Társulat: tag 1952-től, Alkalmazott Matematikai Szakosztály elnök 1964–1984 között, tiszteletbeli elnök 1994-től; Mathematical Programming Society: tagja az alapító bizottságnak, tag 1970-től, a Committee on Stochastic Programming meg-alapítója és első elnöke 1981–1987 között, tagja 1996-ig; MTA Operációkutatási és Számítástechnikai Bizottság megalapítója és elnöke 1970–1975 között; MTA Ope-

rációkutatói Bizottság megalapítója és első elnöke 1979–1988 között; INFORMS (korábban ORSA/TIMS): tag 1988-tól, Lanchester prize bizottsági tag 1998-ban és 1999-ben; SIAM, Society for Industrial and Applied Mathematics: tag 1999-től; IAFE, International Association of Financial Engineers: tag 1997-től.

* * *

Tanítványai mindig szerették és szeretik ma is. Ennek alapja a jó légkör, a közösség összefogása és az ő gerinces magatartása volt. Sokszor láttuk, hogy nem a könnyebb utat választja. Sem a tudományban, ahol tehetsége révén elméleti kutatásokkal talán előbb lett volna akadémikus, sem az intézetben, ahol néhány embere feláldozása és a tudományos kutatás kárára külső munkák vállalása árán kevesebb konfliktussal biztosabb pozíciót mondhatott volna magáénak. Végül az életben a nyíltan vállalt vallásossága révén szintén hátrányba került. De mellette mindnyájan biztonságban érezhettük magunkat.

PRÉKOPA ANDRÁS TUDOMÁNYOS MUNKÁINAK JEGYZÉKE

Könyvek, könyvrészek, szerkesztések

- [1] *Valószínűségelmélet* (Műszaki könyvkiadó, Budapest. Első kiadás 1962, második kiadás 1972, harmadik kiadás 1974, negyedik kiadás 1980).
- [2] *Valószínűségszámítási Feladatgyűjtemény* (Tankönyvkiadó, Budapest, 1971. Typotex, Budapest 2001. Társ szerzők: Bognár J., Mogyoródi J., Rényi A., Szász D.).
- [3] *Lineáris Programozás I* (Bolyai János Matematikai Társulat, Budapest, 1968).
- [4] Colloquium on the Applications of Mathematics to Economics, in: *Proceedings of the International Conference on the Applications of Mathematics to Economics*, Budapest, Hungary, 1963 (editor) Akadémiai Kiadó, Budapest, 1965.
- [5] Inventory Control and Water Storage, in: *Proceedings of the International Conference on Inventory Control and Water Storage*, Győr, Hungary, 1971. (editor) Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai 7, North Holland Publishing Company, 1973.
- [6] Progress in Operations Research I. II., in: *Proceedings of the International Conference on Operations Research*, Eger, Hungary, 1974 (editor). Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai 12, North Holland Publishing Company, 1976.
- [7] Survey of Mathematical Programming, in: *Proceedings of the IX International Symposium on Mathematical Programming* (editor). North Holland Publishing Company, Publ. House of the H.A.S. Budapest, 1979.
- [8] Studies on Mathematical Programming, in: *Proceedings of the IV Conference on Mathematical Programming*, Mátrafüred, Hungary, 1975 (editor). Mathematical Methods of Operations Research, Vol. 1. Akadémiai Kiadó, Budapest, 1980.

- [9] Stochastic Programming I, II, mathematical programming Study 27, 28, 1986 (ed., with R. J-B. Wets).
- [10] Recent Results in Stochastic Programming, *Proceedings of the International Conference on Stochastic Programming*, Oberwolfach, Germany, 1979 (co-editor, with P. Kall). Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, Vol. 179, Springer Verlag, 1980.
- [11] *Pattantyús, Gépész és Villamosmérnökök Kézikönyve, Valószínűesszámtás és Matematikai Statisztika rész* (Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1961), 403–454.
- [12] System Modelling and Optimization, in: *Proceedings of the 12th IFIP Conference*, Budapest, Hungary, Sept. 1985 (editor, with J. Szelezsán and B. Strazicky), Lecture Notes in Control and Inf. Sci. 84, Springer Verlag, 1986.
- [13] *Stochastic Programming* (Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, 1995).
- [14] *Encyclopedia of Optimization* (C. A. Floudas and P. M. Pardalos eds.), Kluwer Academic Publishers, following articles:
 - a. Logconcave measures, logconvexity, Vol. III. 217–219.
 - b. Logconcavity of Discrete Distributions, Vol. III. 219–220.
 - c. Probabilistic constrained problems: convexity theory, Vol. IV. 382–383.
 - d. Static stochastic programming models, Vol. V. 272–273.
 - e. Static stochastic programming models: conditional expectations, Vol. V. 274–275.
 - f. Stochastic programming models: random objective, Vol. V. 330–331.
 - g. Cutting stock, Vol. I. 371–372. With C. Fábián.
- [15] *Encyclopedia of Mathematics Supplement III* (M. Hazewinkel, ed.), Kluwer Academic Publishers 2001, article: Inclusion-exclusion, 199–201.
- [16] Probabilistic Programming, in: *Stochastic Programming. Handbooks in OR & MS*. Vol. 10 (A. Ruszczyński, A. Shapiro, eds.) Elsevier, 2003, 267–351.
- [17] Stochastic Programming, in: *Special Issue of Optimization Methods and Software* Vol. 17, 2002 (ed., with A. Ruszczyński).
- [18] *Bolyai Emlékkönyv* (főszerkesztő). Vince Kiadó, Budapest, 2004.
- [19] *Non-Euclidean Geometries*, János Bolyai Memorial Volume (ed. in chief). Kluwer Academic Publishers. Forthcoming.

Tudományos dolgozatok

- [1] Egy valószínűesszámtási feladatról. Első Magyar Matematikai Kongresszus Közleményei, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1950, 759–764. (részletes francia nyelvű kivonattal).

- [2] On Composed Poisson Distributions IV., *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **3** (1952), 317–325.
- [3] Hosszú láncmolekulák bomlási folyamatának matematikai tárgyalása, *Alkalmazott Matematikai Intézet Közleményei* **2** (1953), 103–123.
- [4] Összetett Poisson eloszlásokról IV, *MTA III. Osztály Közlemények* **6** (1953), 505–512.
- [5] On the Convergence of Series of Independent Random Variables, *Publicationes Mathematicae* **4** (1956), 410–417.
- [6] Extension of Multiplicative Set Functions with Values in a Banach Algebra, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **7** (1956), 201–213.
- [7] О предельном разпределении для сумм независимых случайных величин на бикомпактных коммутативных топологических группах (Kompakt topologikus csoportból vett értékű, független valószínűségi változók összegeinek határeloszlásáról), *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **7** (1956), 11–16. (Társszerzők: A. Rényi, K. Urbanik).
- [8] On the Independence in the Limit of Sums Depending on the Same Sequence of Independent Random Variables, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **7** (1956), 319–326. With A. Rényi.
- [9] Sztochasztikus halmazfüggvényekről, kandidátusi értekezés, Budapest 1956.
- [10] Független valószínűségi változók végtelen sorainak konvergenciájáról, *MTA III. Osztály Közlemények* **6** (1956) 191–198.
- [11] Banach algebrából vett értékű multiplikatív halmazfüggvények kiterjesztése, *MTA III. Osztály Közlemények* **6** (1956), 339–351.
- [12] Lineáris metilszilikon-olajok átrendeződésének matematikai tárgyalása I, *Matematikai Kutató Intézet Közleményei* **1** (1956), 67–81. Társszerző: F. Török.
- [13] Lineáris metilszilikon-olajok átrendeződésének matematikai tárgyalása II, *Matematikai Kutató Intézet Közleményei* **1** (1956), 349–356. Társszerző: P. Révész.
- [14] Über Kinetik und Gleichgewicht der Aequilibrierungsreaktion von linearen Methypolysiloxanen I, *Zeitschrift für Physikalische Chemie* **206** (1956), 161–168. Mit B. Lengyel, F. Török.
- [15] Über Kinetik und Gleichgewicht der Aequilibrierungsreaktion von linearen Methylpolysiloxanen II, *Zeitschrift für Physikalische Chemie* **208** (1957), 33–41. Mit B. Lengyel, P. Révész, F. Török.
- [16] On Stochastic Set Functions I, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **7** (1956), 215–263.

- [17] On Stochastic Set Functions II, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* 8 (1957), 337–374.
- [18] On Stochastic Set Functions III, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* 8 (1957), 375–400.
- [19] Sztochasztikus halmazfüggvényekről I, *MTA III. Osztály Közlemények* 6 (1956), 289–337.
- [20] Sztochasztikus halmazfüggvényekről II, *MTA III. Osztály Közlemények* 7 (1957), 339–370.
- [21] On the Compound Poisson Distribution, *Acta Sci. Math. (Szeged)* 18 (1957), 23–28.
- [22] On Additive and Multiplicative Totals, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* 8 (1957), 107–126.
- [23] On Poisson and Composed Poisson Stochastic Set Functions, *Studia Math.* 16 (1957), 142–157.
- [24] On Secondary Processes Generated by Random Point Distributions of Poisson Type, *Annales Univ. Sci. Budapest de R. Eötvös Nom. Sectio Math.* 1 (1958), 153–170.
- [25] On Secondary Processes Generated by Random Point Distributions, *Annales Univ. Sci. Budapest, de R. Eötvös nom. Sectio Math.* 2 (1959), 139–146.
- [26] On the Spreading Process, Transactions of the Second Prague Conference on Information Theory, Statistical Decision Functions and Random Processes, Prague (1959), 521–529.
- [27] О стохастических функции множествах, *Теория Вероятностей* 4 (1959), 481–482.
- [28] Applied Model Building Illustrated by an Inventory Problem. Entretiens de Monaco en Sciences Humaines, Session 1964, Monaco. Edition “Sciences Humaines” 209–218. Monaco.
- [29] On the Maximization Problem of Determinants, *Proceedings of IFIP Congress* 65 (1966), 451–452.
- [30] On the Probability Distribution of the Optimum of a Random Linear Program, *SIAM Journal on Control* 4 (1966), 211–222.
- [31] Nature of Random Variation in the Nutrient Composition of Meals, *Health Services Research* 1 (1966), 148–169. With J. L. Balintfy.
- [32] On Random Determinants. I, *Studia Sci. Math. Hung.* 2 (1967), 125–132.
- [33] On Probabilistic Constrained Programming, in: *Proceedings of the Princeton Symposium on Mathematical Programming* (Princeton University Press, Princeton, NJ 1970), 113–138.

- [34] Reliability Equation for an Inventory Problem and its Asymptotic Solutions, in: *Coll. on Appl. of Math. to Economics*, A. Prékopa, editor (Publ. House of the H.A.S. Budapest, 1965). 317–327.
- [35] Sztochasztikus Rendszerek Optimalizálási Problémáiról, Akadémiai doktori értekezés, Budapest, 1970. 160 oldal.
- [36] Contributions to the Theory of Stochastic Programming, *Mathematical Programming* 4 (1973), 202–221.
- [37] Logarithmic Concave Measures with Applications to Stochastic Programming, *Acta Sci. Math. (Szeged)* 32 (1971), 301–316.
- [38] On the Number of Vertices of Random Convex Polyhedra, *Periodica Math. Hung.* 2 (1972), 259–282.
- [39] Laws of Large Numbers of Random Linear Programs, *Mathematical Systems Theory* 6 (1972), 277–288.
- [40] System stochastického programovania rozhodovacích modelov, *Ekón. Roz.* 7–8 (1971), 157–184.
- [41] Ein stochastisches dynamisches Programmierungsmodell, 18. *Internat. Wiss. Kolloqu., Ilmenau* 1 (1973), 49–50.
- [42] A lineáris programozás egy kombinatorikai jellegű tárgyalásmódja, *Matematikai Lapok* 22 (1971), 7–24.
- [43] Az S szintre való felrendezés elnevezésű sztochasztikus készletmodell és annak kiterjesztése intervallumszerű érkezések esetére, *Számológép (NIM)* 1 (1971), 34–55.
- [44] Stochastic Programming Models for Inventory Control and Water Storage Problems, in: *Inventory Control and Water Storage*, Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai 7 (A. Prékopa, editor). North Holland Publishing Company 1973. 229–245.
- [45] A Class of Stochastic Programming Decision Problems, *Mathematische Operationsforschung und Statistik* 3 (1972), 349–354.
- [46] Generalizations of the Theorem of Smirnov with Applications to a Reliability Type Inventory Problem, *Mathematische Operationsforschung und Statistik* 4 (1973), 283–297.
- [47] A „Megengedett irányok” elnevezésű nemlineáris programozási módszer kiterjesztése kvázikonkáv feltételi függvények esetére, *MTA Számítástechnikai Központja Közlemények* 9 (1972), 3–16.
- [48] On Logarithmic Concave Measures and Functions, *Acta Scientiarum Mathematicarum*, 34 (1973), 335–343.
- [49] Eine Erweiterung der sogenannten Methode der „zulässigen Richtungen”, der nichtlinearen Optimierung auf den Fall quasikonkaver Restriktions-funktionen, *Mathematische Operationsforschung und Statistik* 5 (1974), 281–293.

- [50] Programming under Probabilistic Constraints with a Random Technology Matrix 1973, *Mathematische Operations-forschung und Statistik* 5 (1974), 109–116.
- [51] A Note on Logarithmic Concave Measures, Mathematics and Statistics, Essays in Honour of Harald Bergström, Göteborg (1973), 61–65.
- [52] Optimális szintszabályozás sztochasztikus programozás felhasználásával, *Mérés és Automatika* 22 (1974), 203–207.
- [53] A STABIL sztochasztikus programozási modell és annak kísérleti alkalmazása a magyar villamosenergiaiparra, *Alkalmazott Matematikai Lapok* 1 (1975), 3–22. Társ szerzők: Deák I., Ganczer S., Patyi K.
- [54] Logarithmic Concave Measures and Related Topics, in: *Stochastic Programming, Proceedings of the International Conference on Stochastic Programming*, Oxford, England, 1974 (M.A.H. Dempster, editor). Academic Press, 1980, 63–82.
- [55] The STABIL Stochastic Programming Model and its Experimental Application to the Electrical Energy Sector of Hungarian Economy, in: *Stochastic Programming, Proceedings of the International Conference on Stochastic Programming*, Oxford, England, 1974 (M.A.H. Dempster, editor). Academic Press 1980, 369–385. With I. Deák, S. Ganczer and K. Patyi.
- [56] Optimal Control of a Storage Level Using Stochastic Programming, *Problems of Control and Information Theory* 4 (1975), 193–204.
- [57] Az (s,S), sztochasztikus készletmodell kiterjesztése intervallumszerű érkezési folyamat esetére, *Alkalmazott Matematikai Lapok* 1 (1975), 181–187. Társ szerző: Gerencsér L.
- [58] Egy új többdimenziós gamma eloszlás és annak illeszkedése empirikus adatokhoz, *Alkalmazott Matematikai Lapok* 1 (1975), 299–318. Társ szerző: Szántai T.
- [59] A logkonkáv mértékek alaptételének új bizonyítása, *Alkalmazott Matematikai Lapok* 1 (1975), 385–389.
- [60] A New Multivariate Gamma Distribution and its Fitting to Empirical Stream-flow Data, *Water Resources Research* 14 (1978), 19–24. With T. Szántai.
- [61] Serially Linked Reservoir System Design Using Stochastic Programming, *Water Resources Research* 14 (1978), 672–678. With T. Rapcsák, I. Zsuffa.
- [62] On Multi-Stage Stochastic Programming, in: *Progress in Operations Research, Proceedings of the International Conference on Operations Research*, Eger, Hungary 1974, Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai 12 (A. Prékopa, editor). North Holland Publishing Company 1976, 733–755. With T. Szántai.

- [63] Dynamic Type Stochastic Programming Models, in: *Studies on Mathematical Programming, Proceedings of the International Conference on Mathematical Programming*, Mátrafüred, Hungary, 1975, Mathematical Methods of Operations Research Vol. 1 (A. Prékopa, editor), Akadémiai Kiadó, Budapest, 1976, 127–145.
- [64] Flood Control Reservoir System Design, *Mathematical Programming Study* 9 (1978), 138–151. With T. Szántai.
- [65] Reliability Type Inventory Models Based on Stochastic Programming, *Mathematical Programming Study* 9 (1978), 43–58. Also in: *Survey of Math. Prog.* Akadémiai Kiadó, Budapest, 1979, Vol. II, 167–182. With P. Kelle.
- [66] Sztochasztikus programozáson alapuló megbízhatósági jellegű készletmodellek, *Alkalmazott Matematikai Lapok* 2 (1976), 1–16. Társszerző: Kelle P.
- [67] Egy új módszer sorbakapcsolt tározórendszer tervezésére sztochasztikus programozás felhasználásával, *Alkalmazott Matematikai Lapok* 2 (1976), 189–201. Társszerzők: Rapcsák T., Zsuffa I.
- [68] Árvízi tározók méretezése sztochasztikus programozással, *Alkalmazott Matematikai Lapok* 2 (1976), 203–217. Társszerző: Szántai T.
- [69] On Optimal Regulation of a Storage Level with Application to the Water Level Regulation of a Lake, *European Journal of Operational Research* 3 (1979), 175–189. Also in: *Survey of Math. Prog. Publ. House of the H.A.S. Budapest*, 1979 (A. Prékopa, editor). Vol. II, 183–210. With T. Szántai.
- [70] On the Development of Optimization Theory, *The American Mathematical Monthly* 87 (1980), 527–542.
- [71] The Use of Stochastic Programming for the Solution of Some Problems in Probability and Statistics, in: *Extremal Methods and Systems Analysis Proceedings of an International Conference in Honour of A. Charnes' Sixtieth Birthday*, Austin, Texas 1977. Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, 174 (A. V. Fiacco, K. O. Kortanek, eds.). Springer Verlag 1980, 522–536.
- [72] Network Planning Using Two-Stage Programming under Uncertainty, in: *Recent Results in Stochastic Programming, Proceedings of the International Conference on Stochastic Programming*, Oberwolfach, Germany, 1979, (P. Kall, A. Prékopa editors), Lecture Notes in Economics and Math. Systems, 179, Springer, New York, 216–237.
- [73] A statisztikai döntéelmélet fejlődése napjainkig, *Statisztikai Szemle* 56 (1978), 893–903.
- [74] Többlépcsős sztochasztikus programozási modell tározórendszer irányítására, *Hidrológiai Közlöny* 60 (1980), 7–14. Társszerző: Szántai T.

- [75] Készletszintek optimális szabályozása és annak alkalmazása a Balaton víz-szintszabályozására, *Hidrológiai Közlöny* **60** (1980), 392–399. Társ szerző: Szántai T.
- [76] Probability Distribution Problems Concerning Stochastic Programming Problems, CIME 3-0 Ciclo, L'Aquila 1965, *Methods of Optimization in Economics* (1966), 195–221.
- [77] Application of Stochastic Programming to Reservoir System Design and Operation, Proceedings of the II. Congress of the National Academy of Engineering of Mexico, Oaxtepec, Mexico, 1977.
- [78] A dysthymias és hysterias neurosis, valamint a psyhopatiás magatartás Eysenck–Gray féle elméletének játékelméleti modellje, *Ideggyógyászati Szemle* **31** (1978), 154–165. Társ szerzők: Kopp M., Skrabski Á.
- [79] On Optimal Daily Scheduling of the Electricity Production in Hungary, in: *Large-Scale Linear Programming. Proceedings of the IIASA Workshop on Large Scale Linear Programming*, Laxenburg, 1980, (G. B. Dantzig, M. A. H. Dempster, M. Kallio editors). IIASA, (Laxenburg 1981), 923–960. With I. Deák, J. Hoffer, J. Mayer, A. Németh, B. Potecz, B. Strazicky.
- [80] Az optimalizáláselmélet kialakulásának történetéről, *Alkalmazott Matematikai Lapok* **4** (1978), 165–191.
- [81] Dynamic Type Stochastic Programming Models, in: *Studies on Mathematical Programming, Proceedings of the IV International Conference on Mathematical Programming*, Mátrafüred, Hungary 1975. Mathematical Methods of Operations Research I (A. Prékopa, editor). Akadémiai Kiadó, Budapest, 1980, 127–145.
- [82] Neumann János matematikai, közgazdasági és operációkutatási munkássága, *Neumann János emlékkötet*, Neumann János Számítógéptudományi Társaság (Szentiványi T., szerk.). Budapest, 1979, 93–111.
- [83] Sztochasztikus programozási modellek és alkalmazásuk, *Magyar Tudomány, Új Folyam* **11** (1980), 812–820.
- [84] Reliability Type Inventory Models: A Survey, in: *Economics and Management of Inventories, Proceedings of the International Conference on Inventory Control* (A. Chikán, editor), Akadémiai Kiadó, Budapest, 1981, 477–490.
- [85] Megbízhatósági készletmodellek, in: *Készletek a népgazdaságban és a vállalati gazdálkodásban. Válogatás az I. Nemzetközi Készletgazdálkodási szimpózium anyagából* (Barancsi É., Chikán A. szerkesztők). MTA, 1981, 341–357.
- [86] Recent Advances Concerning the Problem of Optimal Daily Scheduling of Electricity Production in Hungary, in: *IFAC Congress Budapest*, 1984, Vol. I., 95–99. With I. Deák, J. Hoffer, J. Mayer, A. Németh, B. Potecz, B. Strazicky.

- [87] On Optimal Daily Scheduling of the Electricity Production in Hungary, in: *Operations Research in Progress* (G. Feichtinger, P. Kall, eds.). D. Reidel Publishing Co. 1982, 103–114. With I. Deák, J. Hoffer, J. Mayer, A. Németh, B. Potecz, B. Strazicky.
- [88] Nagyméretű vegyesváltozós matematikai modell termikus villamosenergia-rendszer rövidtávú, optimális menetrendjének meghatározása hálózati feltételek figyelembevételével, *Alkalmazott Matematikai Lapok* **9** (1983), 221–337. Társszerzők: Deák I., Hoffer J., Mayer J., Németh A., Potecz B., Strazicky B.
- [89] A sztochasztikus programozás és a statisztika kapcsolata, A BME bicentenáriumi ünnepsége keretében a Gépészmérnöki Karon rendezett tudományos ülésszak előadásai. BME, Budapest, 1983, 71–83.
- [90] Das Wirken von Neumanns auf dem Gebiet der mathematischen Ökonomie und der Unternehmenforschung, in: *Leben und Werk von Neumann* (T. Legendi, T. Szentiványi, herausg.), Wissenschaftsverlag, Mannheim, Wien, Zürich 1983, 85–98.
- [91] Recent Results in Optimization of Electro-energetic Systems, International Workshop on Applied Optimization Techniques in Energy Problems, Johannes Kepler Univ. Linz, 1984, 7–38. See also: Proceedings of the Conference on Applied Optimization Techniques in Energy Problems, Linz, 1984 (Hj. Wacker, ed.). B. G. Teubner, Stuttgart, 354–383.
- [92] On the Load Flow Problem of Electric Power Systems. International Workshop on Applied Optimization Techniques in Energy Problems, Johannes Kepler Univ. Linz, 1984, 113–138. With J. Mayer. See also: Proceedings of the Conference on Applied Optimization Techniques in Energy Problems, Linz, 1984 (Hj. Wacker, ed.). B. G. Teubner, Stuttgart, 321–340.
- [93] Numerical Solution of Probabilistic Constrained Stochastic Programming Problems, in: *Numerical Techniques for Stochastic Optimization* (Yu. Ermoliev, R. J.-B. Wets, eds.). Springer, 1987, 123–139.
- [94] Boole–Bonferroni Inequalities and Linear Programming, *Operations Research* **36** (1988), 145–162.
- [95] Sharp Bounds on Probabilities Using Linear Programming, *Operations Research* **38** (1990), 227–239.
- [96] Closed Form Two-Sided Bounds for Probabilities that at Least r and Exactly r out of n Events Occur, *Mathematics of Operations Research* **14** (1989), 317–342. With: E. Boros.
- [97] Probabilistic Bounds and Algorithms for the Maximum Satisfiability Problem, *Annals of Operations Research* **21** (1989), 109–126. With E. Boros.
- [98] Availability Analysis and the Method of Binomial Moments to Evaluate Reliability of Power Systems, in: Proceedings of the Workshop on Resource Planning Under Uncertainty for Electric Power Systems (held Jan. 21–22, 1989,

- Stanford University, G. B. Dantzig, P. W. Glynn, editors). Department of Operations Research, Stanford University, Stanford, California, 1989, 197–215. With E. Boros.
- [99] The Discrete Moment Problem and Linear Programming, *Discrete Applied Mathematics* **27** (1990), 235–254.
 - [100] Totally Positive Linear Programming Problems, in: *Functional Analysis, Optimization and Mathematical Economics*, A collection of papers dedicated to the memory of L. V. Kantorovich, (L. J. Leifman, editor). Oxford University Press, New York, Oxford, 1990, 197–207.
 - [101] Dual Method for a One-Stage Stochastic Programming Problem with Random RHS, Obeying a Discrete Probability Distribution, *Zeitschrift für Operations Research* **34** (1990), 441–461.
 - [102] On the Existence of a Feasible Flow in a Stochastic Transportation Network, *Operations Research* **39** (1991), 119–129. With E. Boros.
 - [103] The Use of Binomial Moments for Bounding Network Reliability, in: *Reliability of Computer and Communication Networks*, DIMACS Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science, Vol 5 (F. Roberts, F. Hwang, C. Monma, eds.). AMS/ACM 1991, 197–212. With E. Boros, Keh-Wei Lih.
 - [104] Inequalities on Expectations Based on the Knowledge of Multivariate Moments, in: *Stochastic Inequalities* (M. Shaked, Y. L. Tong, eds.). Institute of Mathematical Statistics, Lecture Notes – Monograph Series, Vol. 22, 1992, 309–331.
 - [105] Solution of and a Bounding in a Linearly Constrained Optimization Problem with Convex, Polyhedral Objective Function, *Mathematical Programming* **70** (1995), 1–16. With W. Li.
 - [106] Programming Under Probabilistic Constraint and Maximizing a Probability under Constraints, in: *Statistical Methods for Decision Processes* (G. Hellwig, P. Kall, P. Abel eds.), Daimler-Benz, Stuttgart, 1994, 78–106.
 - [107] Bounds on Probabilities and Expectations using Multivariate Moments of Discrete Distributions, *Studia Sci. Math. Hungarica* **34** (1998), 349–387.
 - [108] On a Dual Method for a Specially Structured Linear Programming Problem with Application to Stochastic Programming, *Optimization Methods and Software* **17** (2002), 445–492. With C. Fábián, O. Ruf-Fiedler.
 - [109] Analyse des séries des données des debits des cours d'eau dans le domain des étiages, *Periodica Polytechnica Ser. Civil Eng.* **38** (1994), 261–287. Avec A. Bosznay, T. Szántai, I. Zsuffa.
 - [110] A Brief Introduction to Linear Programming, *Mathematical Scientist* **21** (1996), 85–111.

- [111] Programming under Probabilistic Constraint with Discrete Random Variables, in: *New Trends in Mathematical Programming*, Kluwer, 1997, 235–257. With B. Vizvári, T. Badics.
- [112] Solution of a Product Substitution Problem using Stochastic Programming, in: *Probabilistic Constrained Optimization, Methodology and Applications* (S. P. Uryasev, ed.). Kluwer Academic Publishers 2000, 252–271. With M. Murr.
- [113] Kisvizek vízhozamának hidrológiai analízise, *Hidrológiai Közlöny* **77** (1997), 169–181. Társ szerzők: Bosznay Á., Szántai T., Zsuffa I.
- [114] The use of Discrete Moment Bounds in Probabilistic Constrained Stochastic Programming Models, *Annals of Operations Research* **85** (1999), 21–38.
- [115] Concavity and efficient points of discrete distributions in probabilistic programming, *Math. Programming Ser. A* **89** (2000), 55–77. With D. Dentcheva, A. Ruszczyński.
- [116] Probability Bounds with Cherry-Trees, *Mathematics of Operations Research* **26** (2001), 174–192. With J. Bukszár.
- [117] On the Concavity of Multivariate Probability Distributions, *Operations Research Letters* **29** (2001), 1–4.
- [118] A New Model for Test Case Selection Based on Stochastic PERT, in: *Conformance Testing: Theory and Practice* (K. Tarnay, ed.). H.A.S. Central Research Institute for Physics, KFKI-1997-05/M Report, 33–36. With K. Tarnay.
- [119] Discrete Higher Order Convex Functions and their Applications, in: *Generalized Convexity and Monotonicity* (N. Hadjisavvas, J. E. Martinez-Legaz, J.-P. Penot eds.). Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, Springer, 2001, 21–47.
- [120] On Multivariate Discrete Moment Problems and their Applications to Bounding Expectations and Probabilities, *Mathematics of Operations Research* **29** (2004), 229–259. With G. Nagy.
- [121] A magyar készletmodell. Az MTA Matematikai Kutató 50 éves jubileumi előadások, Az MTA 175 éves jubileumi kiadványa I. kötet (2002), 207–217. Társ szerző: Chikán A.
- [122] Az amerikai opció értékének közelítő meghatározása, Az MTA 175 éves jubileumi kiadványa II. kötet (2002), 477–494. Társ szerzők: T. Szántai, J. Bukszár.
- [123] Stochastic Programming Model for Optimal Debt Management, manuscript, Társ szerző: T. Mellár.
- [124] Bounding the probability of the union of events by the use of aggregation in linear programs, *Discrete Applied Math.*, to appear. With L. Gao.

- [125] Lower and upper bounds for the probability that at least r and exactly r out of n events occur, *Mathematical Inequalities and Applications* 5 (2002), 315–333. With L. Gao.
- [126] On convex probabilistic programming with discrete distributions, *Nonlinear Analysis* 47 (2001), 1997–2009. With D. Dentcheva, A. Ruszczyński.
- [127] Többváltozós diszkrét függvények féloldalas approximációja polinomokkal, *Alkalmazott Matematikai Lapok* 20 (2000), 195–215. Társ szerző: Mádi-Nagy G.
- [128] Egy többváltozós hasznossági függvény, *Alkalmazott Matematikai Lapok* 21 (2004), 23–34. Társ szerző: Mádi-Nagy G.
- [129] Bounds for probabilistic integer programming, *Discrete Applied Math.* 124 (2002), 55–65. With D. Dentcheva, A. Ruszczyński.
- [130] Alsó és felső korlátok rendszerek működési ideje várható értékére, *Alkalmazott Matematikai Lapok* 21 (2004), 131–149. Társ szerző: Horváth A.
- [131] Alsó és felső korlátok a csoportos életbiztosítás aktuárius jelenértékére együttes valószínűségeloszlások figyelembevételével, *Alkalmazott Matematikai Lapok*, megjelenés alatt. Társ szerző: Horváth A.
- [132] Reliability of mobile communication systems, manuscript. Társ szerző: L. Gao.
- [133] A model for stochastic power control under normal and lognormal distributions, *Naval Res. Log. Quart.*, to appear. With T. Heikkinen.
- [134] Estimation of Cause-Effect Relationship under Noise, *Journal of Applied Probability* 31A (1994), 343–350.
- [135] Bolyai János forradalma, *Természet Világa* 133 (2002), 290–295, 347–352, 394–399, 429. Megjelent még: *Természet Világa* 2003, I. Különszám 3–21.
- [136] The Revolution of János Bolyai, in: *Non-Euclidean Geometries, János Bolyai Memorial Volume* (Proceedings of the János Bolyai Conference held on July 8–12, Budapest, Hungary), Kluwer Academic Publishers, to appear.
- [137] A stochastic programming model to find optimal sample sizes to estimate unknown parameters in an LP, *Operations Research Letters* 32 (2004), 59–67. With X. Hou.
- [138] On stages and consistency checks in stochastic programming, *Operations Research Letters*, to appear. With H. Gassmann.
- [139] Bolyai János felfedezésének előzményei és utóhatása, in: *Bolyai Emlékkönyv* (Prékopa A., Kiss E., Staar Gy., Szenthe J., szerk.). Vince Kiadó, Budapest, 2004, 93–110.
- [140] New Bounds and Approximations for the Probability Distribution of the Length of the Critical Path, in: *Dynamic Stochastic Optimization*, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems 532 (K. Marti, Yu. Ermoliev, G. Pflug, eds), Springer, Berlin–Heidelberg, 2004, 293–320.

Egyéb dolgozatok

- [1] A hazai alkalmazott matematika helyzete és problémái, *Magyar Tudomány, Új Folyam* **21** (1976), 634–645.
- [2] Lineáris Programozás (I. közlemény), *Középiskolai Matematikai Lapok* **38** (1979), 145–155.
- [3] Lineáris Programozás (II. közlemény), *Középiskolai Matematikai Lapok* **38** (1979), 193–202.
- [4] Gondolatok a matematikáról, *Confessio* **22** (1998), 8–18.
- [5] Az elmélet szerepe az alkalmazásban, *A nyíregyházi Kossuth Lajos Gimnázium jubileumi kötete*, Nyíregyháza, (Bánszki I., ed.), 1998, 52–59.
- [6] *Logosz. Gyökerek és gyümölcsök*, Nemeshegyi Péter S. J. 75. születésnapjára kiadott kötet. Zsámbék, 1998, 172–175.
- [7] Zéró, *Természet Világa* **132** (2001), 146–149.
- [8] Az évezred vasárnapig tart, *Magyar Nemzet*, 2000. december 30., 34. old.
- [9] Elmélet-gyakorlat, Stratégiai Füzetek 7, Miniszterelnöki Hivatal Stratégiai Elemző Központ (Závodszy P. szerk.), 2001. március, 89–98.
- [10] Vivat professores, *Napi Magyarország*, 1998. szeptember 11.
- [11] Studies in Applied Stochastic Programming, *MTA SZTAKI Tanulmányok* **80** (1978). Szerkesztő és társszerző.
- [12] Valószínűséggel és feltételes várható értékkel korlátozott sztochasztikus programozási modellek, *Tanulmány a KGM ISZSZI számára*, 1968.
- [13] A minimális költség-elvre épülő sztochasztikus programozási modellek, *Tanulmány a KGM ISZSZI számára*, 1969.
- [14] A valószínűségszámítás elemei (I. közlemény), *Középiskolai Matematikai Lapok* **6** (1953), 33–41.
- [15] A valószínűségszámítás elemei (II. közlemény), *Középiskolai Matematikai Lapok* **6** (1953), 97–107.
- [16] A várható érték, *Középiskolai Matematikai Lapok* **9** (1954), 78–81.
- [17] Hozzászólás J. A. Bojarszkij, „Demográfia és biometria” című tanulmányához, *Demográfia* **2** (1959), 464. old.
- [18] Matematikai módszerek gazdasági alkalmazása, *Magyar Tudomány, Új Folyam* **9** (1964), 462–466.
- [19] Hozzászólás Erdey-Grúz Tibor: „A természettudományok hazai fejlődésének fő vonásai” című előadásához, *Egyetemi Lapok*, 1966.
- [20] Operációkutatási Konferencia, Debrecen, *Magyar Tudomány, Új Folyam* **16** (1971), 325–327.

- [21] Kilencedik Nemzetközi Matematikai Programozási Szimpozion, *Magyar Tudomány*, Új Folyam **22** (1977), 55–56.
- [22] Rényi Alfréd, Valószínűségszámítás című könyvéről, *Matematikai Lapok* **7** (1956), 272–278.
- [23] Statisztikai minőségellenőrzés (Vincze I. szerk.), c. könyvről, *Statisztikai Szemle* **37** (1959), 98–101.
- [24] Krekó-Párniczky-Pintér-Theiss, Korreláció és trendszámítás c. könyvéről, *Statisztikai Szemle* **37** (1959), 320–323.
- [25] On the book: Proceedings of Symposia in Applied Mathematics, Volume X, *Acta Sci. Math. (Szeged)* **23** (1961), 327.
- [26] Éltető-Ziermann, Matematikai Statisztika c. könyvéről, *Statisztikai Szemle* **49** (1962), 320–321.
- [27] Rényi Alfréd, Valószínűségszámítás c. könyvéről, *Statisztikai Szemle* **45** (1967), 733–738.
- [28] On the book by Stoer-Witzgall: Convexity and Optimization in Finite Dimension, *Acta Sci. Math. (Szeged)* **33** (1971), 361.
- [29] Sztochasztikus programozási modellek és alkalmazásuk, *MTA SZTAKI Tanulmányok* **106** (1980).
- [30] OR Software Descriptions Vol. I, *Computer and Automation Inst. of the H.A.S.* **140** (1983), Vol. II. **152** (1983), (editor, with G. Kéri).
- [31] Gyakorlati vonatkozású alkalmazott matematikai-számítástechnikai eredmények, *Magyar Tudomány* **11** (1982), 877–879.
- [32] A statisztikai döntésméleti gondolkodásmód, *A Nyíregyházi Kossuth Lajos Gimnázium Jubileumi Évkönyve (1806–1981)*, Kossuth Lajos Gimnázium, Nyíregyháza, 1982, 19–26.
- [33] Az Operációkutatás Tudománya és hazai oktatásának helyzete, MTA Operációkutatási Bizottság, Budapest, 1983. Szerkesztés és bevezető tanulmány megírása (3–25. old.).
- [34] Emlékbeszéd Farkas Gyula akadémiai r. tag felett az 1981. évi XI. 23-án tartott sírköavatás alkalmából, Kézirat.
- [35] Computer Science in Hungary, in: *Science in Hungary*, IREX, 1986.
- [36] Bolyai János forradalma, MTA 2002 július 8–12 között tartott Bolyai János Emlékkiállítás Katalógusában 3–17 (magyarul), 19–33 (angolul).
- [37] Bolyai János forradalma, Emlékbeszéd 2002 nov. 3-án a Tudomány Napján az MTA székházában. Megjelenés alatt.

- [38] Farkas Gyula élete és munkásságának jelentősége az optimalizálás elméletében, *Új utak a magyar operációkutatásban* (Komlói S., Rapcsák T. szerk.). Dialóg Campus Kiadó, 1999, 15–31.
- [39] Lineáris Programozás, *Középiskolai Matematikai Lapok* **48** (1998), 1–16.
- [40] Bolyai János forradalma, *Középiskolai Matematikai Lapok* **52** (2002), 514–520.
- [41] 200 éve született Bolyai János. Konferenciányitó beszéd a Magyar Tudományos Akadémián, 2002. július 8, *Fizikai szemle* **52** (2002), 269–271.
- [42] La revolució de János Bolyai, *Societat Catalana de Matemàtiques Notícies* **18** (2003), 18–28.
- [43] Bolyai János Emlékkonferencia, *Magyar Tudomány, Új Folyam* **47** (2002), 1649–1655.
- [44] Miért lettem matematikus, *Visszaemlékezések* (Róka S. szerk.). Typotex Kiadó, Budapest, 189–200.
- [45] Foreword to: I. Maros, in: *Computational Techniques of the Simplex Method*, Kluwer Academic Publishers, 2003, XIII–XV.
- [46] Előszó a Bolyai Emlékkönyvhöz, Vince Kiadó, Budapest, 2004, 7–11.

Jegyzetek, kutatási riportok, alkalmazási tanulmányok

- [1] On the Hungarian Method for the Transportation Problem and a Method for Solving Linear Programming Problems, 2 lectures given by A. Prékopa, Math Inst., Aarhus Univ., Aarhus, Denmark, 1960.
- [2] Tanulmány a folyamatos termelést biztosító legkisebb raktárkészlettel kapcsolatos egyes problémákról, Országos Tervhivatal, Budapest, 1962 Társszerző: Ziermann M.
- [3] A szolnoki betonelemgyár automatikájának matematikai vizsgálata, MTA Matematikai Kutató Intézet, 1966. Társszerző: Heppes A.
- [4] Készletoptimalizálási vizsgálatok. Tanulmány az Országos Bányagépgyártó Vállalat Számára, NIM IGÜSZI, 1968 Társszerző: Nagy I.
- [5] Nagyméretű lineáris programozási feladatok megoldási módszerei, BME Villamosmérnöki Kar, Matematika Tanszék, 1970. Társszerző: Majthay A.
- [6] Sztochasztikus és dinamikus tervezési modellek, Tanulmány az OT Tervgazdasági Intézet számára. BME Villamosmérnöki Kar, Matematika Tanszék, 1971.

- [7] Matematikai modellek a magyar villamosenergiarendszer optimális napi metrendjének meghatározására, MTA SZTAKI Tanulmányok 1975. Társ szerzők: Molnár M., Németh Á., Potecz B., Kéri G., Turchányi P., Vizvári B.
- [8] Matematika, Bevezetés (vegyészhallgatók számára). Debreceni Tudományegyetem Matematika Intézete, 1950.
- [9] Differenciál- és integrálszámítás I–II. félév, Debreceni Tudományegyetem, 1950–51.
- [10] Bevezetés a valószínűség számításba, Mérnöki Továbbképző Intézet, 1956.
- [11] Sztochasztikus folyamatok I–II. félév IV. éves alk. mat. szakos hallgatók számára, Budapest, 1956.
- [12] Lineáris algebra, KSH, 1958.
- [13] Lineáris algebra, folytatás, KSH, 1960.
- [14] Analízis, KSH, 1958.
- [15] Analízis, folytatás, KSH, 1959.
- [16] Valószínűség számítás, KSH, 1960.
- [17] Matematikai Statisztika, KSH, 1961. Társ szerző: Éltető Ö.
- [18] Bevezetés a valószínűségelméletbe és a matematikai statisztikába, Mérnöki Továbbképző Intézet, 1964. Társ szerző: Scharnitzky V.
- [19] Matematikai Programozás I, ELTE matematikus hallgatók számára, 1968.
- [20] Valószínűségelméleti összefoglalás, BME villamosmérnöki hallgatók számára, 1968.
- [21] Minimum Cost Stochastic Inventory Models, IFIP Seminar, Budapest, 1969.
- [22] Stochastic Optimization, IFIP Seminar, Budapest, 1969.
- [23] A lineáris programozás egy kombinatorikai jellegű tárgyalásmódja, II. éves műszer- és szabályozástechnika szakos hallgatók számára, BME Villamosmérnöki Kar, Matematika Tanszék, 1970.
- [24] Természettudományi Lexikon Operációkutatási címszavai, Akadémia Kiadó, Budapest, 1964.
- [25] Természettudományi Lexikon Új kiadásához készletezési, tározási és sztochasztikus programozási címszavak, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1974. Társ szerző: Halász Sylvia.
- [26] Elemi lineáris programozás, Kézirat. 45 oldal
- [27] On the Development of Optimization Theory, MRC Technical Summary Report, No. 1842, 1978.
- [28] The Use of Stochastic Programming for the Solution of Some Problems in probability and Statistics, MRC Technical Summary Report No. 1834, 1978.

- [29] Network Planning Using Two-Stage Programming under Uncertainty MRC Technical Summary Report No. 1835, 1978.
- [30] A Short Description of the Optimal Daily Scheduling of the Electricity Production in Hungary, Computer and Automation Inst. of the H.A.S., WP (1980). With I. Deák, J. Hoffer, J. Mayer, A. Németh, B. Potecz, B. Strazicky.
- [31] A magyar villamosenergiaipar optimális napi menetrendjének meghatározása, Tanulmány az OVT számára, MTA SZTAKI, 1981.
- [32] A gazdasági célú K+F tevékenység hatékonyságának vizsgálata, Tanulmány az OMFB részére, MTA SZTAKI, 1981. Társ szerzők: Borzsák P., Turánszky M.
- [33] Optimal Daily Scheduling of the Electricity Production in Hungary, in: 52, Társ szerzők: I. Deák, J. Hoffer, J. Mayer, A. Németh, B. Potecz, B. Strazicky.
- [34] A Gabcsikovo-Nagymaros Vízlépcsőrendszer irányításának műszaki rendszer c. koncepciótervben vízerőműrendszer üzemeltetésére szolgáló LP és sztochasztikus programozási modell, ERŐTERV, 1981. Társ szerző: Szántai T.
- [35] A magyar villamosenergiatermelés optimális napi ütemezése, Modell és programleírás, MTA SZTAKI kutatási jelentés 1981. Társ szerzők: Deák I., Hoffer J., Mayer J., Németh Á., Potecz B., Strazicky B.
- [36] Boole-Bonferroni Inequalities and Linear Programming, RUTCOR Research Report #4-86, April 1986.
- [37] Sharp Bounds on Probabilities using Linear Programming, RUTCOR Research Report #19-86, August 1986.
- [38] On the Probability of the Existence of a Feasible Flow in a Stochastic Transportation Network, RUTCOR Research Report #20-86, August 1986. With E. Boros.
- [39] Closed Form Two-Sided Bounds for Probabilities that at Least r and at Least r out of n Events Occur, RUTCOR Research Report #11-87, March 1987. With E. Boros.
- [40] The Posynomial Distribution, RUTCOR Research Report #25-87, July 1987.
- [41] Totally Positive Linear Programming Problems, RUTCOR Research Report #12-87, March 1987.
- [42] Buffer and Machine Capacity Design in Manufacturing Systems, RUTCOR Research Report #16-88, March 1988. With S. Hong.
- [43] Probabilistic Bounds and Algorithms for the Maximum Satisfiability Problem, RUTCOR Research Report #17-88, March 1988. With E. Boros.

- [44] Dual Method for the Solution of a One-Stage Stochastic Programming Problem with Random Right Hand Side Obeying a Discrete Probability Distribution, RUTCOR Research Report #37–88, July 1988.
- [45] The Discrete Moment Problem and Linear Programming, RUTCOR Research Report #12–88, March 1988.
- [46] The Use of Binomial Moments for Bounding Network Reliability, RUTCOR Research Report #6–91, March 1991.
- [47] Inequalities on Expectations Based on the Knowledge of Multivariate Moments, RUTCOR Research Report #70–91.
- [48] Fitting a Smooth Logconcave Function on the Poisson Probability Distribution Function, RUTCOR Research Report #26–92.
- [49] New Bounds and Approximations for the Probability Distribution of the Length of the Critical Path, RUTCOR Research Report #16–99. With J. Long.
- [50] Bounding in and Solution of a Linearly Constrained Optimization Problem with Convex, Polyhedral Objective Function, RUTCOR Research Report #17–92. With W. Li.
- [51] On an Optimization Problem Concerning the Stochastic PERT Problem, RUTCOR Research Report #18–92. With W. Li.
- [52] Estimation of Cause–Effect Relationship Under Noise, RUTCOR Research Report #3–93.
- [53] Bounds on Probabilities and Expectations Using Multivariate Moments of Discrete Distributions, RUTCOR Research Report #34–93.
- [54] Programming Under Probabilistic Constraint and Maximizing a Probability Under Constraints, RUTCOR Research Report #35–93.
- [55] Bounding in Multi-Stage Stochastic Programming, RUTCOR Research Report 24–95. With O. Fiedler.
- [56] On a Dual Method for a Specially Structured Linear Programming Problem, RUTCOR Research Report 25–95. With O. Fiedler and C. Fábián.
- [57] Lower and Upper Bounds on Probabilities of Boolean Functions of Events, RUTCOR Research Report 36–95. With B. Vizvári.
- [58] Programming under Probabilistic Constraint with Discrete Random Variable, RUTCOR Research Report 10–96. With B. Vizvári, T. Badics.
- [59] Solution of a Product Substitution Problem using Stochastic Programming, RUTCOR Research Report 32–96. With M. Murr.
- [60] Bounding in Multi-Stage Stochastic Programming Problems. Freie Univ. Berlin, Fachbereich Math. und Inf. Serie A, Math. Preprint No. A–19/95. Mit O. Fiedler.

- [61] Bounds on Probabilities and Expectations using Multivariate Moments of Discrete Distributions, RUTCOR Research Report 34–93.
- [62] The Use of Discrete Moment Bounds in Probabilistic Constrained Stochastic Programming Models, RUTCOR Research Report 27–98.
- [63] On the Concavity of Multivariate Probability Distribution Functions, RUTCOR Research Report 16–99.
- [64] Discrete Higher Order Convex Functions and their Applications, RUTCOR Research Report 39–2000.
- [65] New Bounds and Approximations for the Probability Distribution of the Length of the Critical Path, RUTCOR Research Report #16–92. With J. Long.
- [66] Fitting a Smooth Logconcave Function on the Poisson Probability Distribution Function, RUTCOR Research Report #26–92.
- [67] Lower and Upper Bounds on Probabilities of Boolean Functions of Events, RUTCOR Research Report 21–97. With B. Vizvári, G. Regős.
- [68] On Stochastic Integer Programming under Probabilistic Constraints, RUTCOR Research Report 29–98.
- [69] On Multivariate Discrete Moment Problems, RUTCOR Research Report 41–2000. With G. Nagy.
- [70] Bounding the probability of the union of events by the use of aggregation in linear programs, RUTCOR Research Report 4–2001. With B. Vizvári, G. Regős, L. Gao.
- [71] On convex probabilistic programming with discrete distributions, RUTCOR Research Report 49–2000. With D. Dentcheva, A. Ruszczyński.
- [72] Bounds for probabilistic integer programming, RUTCOR Research Report 31–99. With D. Dentcheva, A. Ruszczyński.
- [73] A Very Short Introduction to Linear Programming, RUTCOR Lecture Notes 2–92.
- [74] Simulation of Basis Stability in Stochastic Linear Programming, SIGMAP Workshop on Stochastic Linear Programming, Princeton University, 1975, Tulane University, School of Business Administration, 1965. With J. L. Balintfy.
- [75] On an Optimization Problem Concerning the Stochastic PERT Problem, RUTCOR Research Report 18–92. With W. Li.
- [76] Dual method for the numerical solution of the univariate discrete moment problem, RUTCOR Research Report 14–2003. With Gabriela Alexe.
- [77] On the numerical solution of the univariate discrete moment problem, RUTCOR Research Report 32–2003. With S. Szedmák.

- [78] A data mining problem in stochastic programming, RUTCOR Research Report 5-2003. DIMACS Technical Report 06-2003. With X. Hou.
- [79] On the Hungarian Inventory Control Model, RUTCOR Research Report 17-2004.

LOTKA–VOLTERRA-AUTOKATALÁTOR (LVA) IRREVERZÍBILIS REAKCIÓLÉPÉSEKKEL

MOLNÁR TAMÁS

Budapest

Jelen írás célja megvizsgálni egy olyan kémiai folyamatot, amelynek kiindulási alapja a reverzibilis LVA modell, de amelynek során a négy résztvevő anyag hatféle lehetséges reakciólépéséből egy nem megy végbe. A cél a lehetséges stacionárius pontok megkeresése, számuk megállapítása és vizsgálata, valamint a rendszer globális viselkedésének leírása. Két esetben a parametrikus reprezentáció módszerének alkalmazásaként Hopf bifurkációt bizonyítunk.

1. Bevezetés

1.1. A feladat leírása

A kémiai oszcillációs modellek egy nevezetes képviselője a Lotka–Volterra-modell, amely több más modellhez szolgáltat kiindulásul. A benne előforduló konzervatív oszcillációk miatt vizsgálták például a Lotka–Volterra-autokatalátort, ahol ez a probléma elkerülhető. Az autokatalátor viszont explozívnak bizonyult, azaz a végtelenbe tartó trajektóriákat mutatott, ezért került az előtérbe reverzibilis módosítása. Erről sikerült kimutatni például, hogy van egy globálisan aszimptotikusan stabil stacionárius pontja. A reverzibilis LVA modell a következő:

Jelöljön az A , B , X , Y jel négy anyagot. A következő reakciók játszódhatnak le a részvételükkel a reakcióterben, ahol feltevésünk szerint más, a reakciók lefolyására ható tényező nincsen:



Ilyen típusú reakciókat elemezték például a jelzett dolgozatokban: [2], [5], [7], [4], [1]. Most feltesszük, hogy van a hat között pontosan egy olyan reakciólépés, amelyik nem játszódik le, és az így kapott részben reverzibilis rendszer viselkedését vizsgáljuk.

Feltevések. Az A és B anyag mennyisége kémiai okokból állandó. Tehát csak X és Y mennyiségét, koncentrációját kell követnünk. A továbbiakban $[A]$, $[B]$, $[X]$ és $[Y]$ a megfelelő anyagokra vonatkozó mennyiségeket jelenti. Szintén feltesszük, hogy a hatféle lehetséges reakciólépésből legalább öt akadály nélkül végbemegy.

1.2. Az egyenleteink

Legyenek az (1)–(3) reakciók sebességi állandói rendre jobbra k_1 , k_2 , k_3 , illetve balra l_1 , l_2 , l_3 . Tehát például az $X + Y \rightarrow 2Y$ reakcióé k_2 . Legyen először $k_i > 0$, $l_i > 0$ $i = 1, 2, 3$. Segítséggel $[X]$ -re és $[Y]$ -ra a következőket írhatjuk fel:

$$(2) \quad \begin{aligned} \dot{[X]} &= k_1[A][X]^2 - l_1[X]^3 - k_2[X][Y] + l_2[Y]^2 \\ \dot{[Y]} &= k_2[X][Y] + l_3[B] - k_3[Y] - l_2[Y]^2 \end{aligned}$$

ahol $[X]$ és $[Y]$ a T időtől függ. Az egyenletek kezelhetőbb formára hozása érdekében vezessünk be új változókat a következő módon: $X = \alpha x$, $Y = \beta y$, $T = \gamma t$. Ebből a következőt kapjuk:

$$(3) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= k_1[A]\alpha\gamma x^2 - l_1\alpha^2\gamma x^3 - k_2\beta\gamma xy + \frac{l_2\beta^2\gamma}{\alpha}y^2 \\ \dot{y} &= k_2\alpha\gamma xy + \frac{l_3\gamma}{\beta}[B] - k_3\gamma y - l_2\beta\gamma y^2 \end{aligned}$$

Illetve, ha $\alpha = \frac{k_1[A]}{l_1}$, $\beta = \frac{l_3[B]}{k_3}$, $\gamma = \frac{l_1}{k_1^2[A]^2}$, akkor

$$(4) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= x^2 - x^3 - K M x y + K L y^2 \\ \dot{y} &= M x y + N - N y - L y^2 \end{aligned}$$

Itt

$$K = \frac{l_1 l_3 [B]}{k_1 k_3 [A]}, \quad L = \frac{l_1 l_2 l_3 [B]}{k_1^2 k_3 [A]^2}, \quad M = \frac{k_2}{k_1 [A]}, \quad N = \frac{k_3 l_1}{k_1^2 [A]^2}$$

konstansok, amelyek láthatóan nemnegatívak. A későbbiekben néhány aleset könnyen származtatható lesz az általánosból, amikor nem, akkor hasonló átparameterezéssel élünk. A pozitív ortáns könnyen láthatóan invariáns.

Most az általános esettel kapcsolatban soravesszük, milyen eszközöket használunk. A dolgozat hátralevő része a végbe nem menő reakciólépések szerint tagolódik. Minden esetben megvizsgáljuk az iránymezőt és a stacionárius pontokat, feltételt keresünk periodikus megoldások kizárására, és két esetben megmutatjuk, hogy bizonyos körülmények között teljesülnek a Hopf-bifurkáció feltételei.

2. Valamennyi reakció reverzibilitásának esete

Itt bemutatjuk a felhasznált eszközöket.

2.1. Egyensúlyi pontok keresése

Megkereshetők a nullklínák, azaz azon pontok halmazai, amelyekben $\dot{x} = 0$ illetve $\dot{y} = 0$. A vizsgált esetekben egyszerűen leírható halmazokat fogunk kapni.

$\dot{x} = 0$ akkor és csak akkor, ha $0 = x^2 - x^3 - KMy + KLy^2$ (8) miatt, azaz

$$y_{1,2} = \frac{(MK \pm \sqrt{M^2K^2 + 4KLx - 4KL})x}{2KL},$$

ahol csak a nemnegatív értékeknek van kémiai jelentése.

$\dot{y} = 0$ akkor és csak akkor, ha $0 = Mxy + N - Ny - Ly^2$ (9), vagyis

$$x = \frac{-N + Ny + Ly^2}{My}$$

Stacionárius pontra mindkét egyenlőségünknek egyidőben teljesülnie kell:

$\dot{x} = \dot{y} = 0$ pontosan akkor, ha

$$x^* = \frac{-N + Ny^* + Ly^{*2}}{My^*},$$

ahol y^* gyöke a következő p polinomnak:

$$\begin{aligned} p(z) = & L^3z^6 + (3NL^2 - ML^2)z^5 + (3N^2L - 3NL^2 + KM^3N - 2MNL)z^4 + \\ & + (2MNL - MN^2 + N^3 - 6N^2L - KM^3N)z^3 + \\ & + (2MN^2 + 3N^2L - 3N^3)z^2 + (-MN^2 + 3N^3)z - N^3, \end{aligned}$$

továbbá $x^* \geq 0$, $y^* > 0$. ($y^* = 0$ kizárható, mert akkor $N = 0$ lenne) Pontosán az ilyen (x, y) számpárok jelentenek stacionárius pontot.

Ha minden reakció megfordítható, akkor K , L , M és N mind pozitívak. Első közelítésként a következő mondható: Mivel p konstans tagja $-N^3$, $0 > -N^3 =$

$(-1)^6 \prod_{i=1}^6 z_i$, ezért legfeljebb 5 pozitív gyök lehetséges, azaz ennyi y^* (amelyek-

hez nem feltétlenül pozitív x^* tartozik). Adott K , L , M , N esetén a következőket tehetjük: Valamilyen egyszerű eljárással felső korlátot keresünk a pozitív gyökökre, majd 0 és a korlát között numerikus módszerekkel, esetleg még a Sturm-tétel segítségével megkeressük $y(x)$ közelítő értékeit. Elképzelhető, hogy nem lelünk meg minden különböző fixpontot, ha ezek nagyon közel esnek egymáshoz, de keresés közben tekintettel lehetünk olyan küszöbre, amelynél közelebbi állapotok kémiai szempontból egynek vehetőek, és az ennél távolabbi állapotok megkereshetők.

Példa: $K = L = M = N = 1$. Korlát: $1 + \sqrt[6]{5} \approx 2.3077$. A korlát alatt csak $y = 1$ ad gyököt, $(x, y) = (1, 1)$; mivel a Jacobi mátrix sajátértékei itt $\lambda_{1,2} = -2 \pm \sqrt{2}$, ezért a stacionárius pont aszimptotikusan stabilis.

2.2. Megjegyzés az esetleges periodikus megoldásokkal kapcsolatban

A Bendixson-kritérium [6] szerint, ha $\dot{x} = F \circ (x, y)$, $\dot{y} = G \circ (x, y)$ és egy S egyszerűen összefüggő tartományon belül $\partial_1 F + \partial_2 G$ előjele állandó és legfeljebb nullmértékű halmazon tűnik el, akkor nincs S -en belül fekvő periodikus pálya. A [4]–[5] rendszer esetén

$$(\partial_1 F + \partial_2 G)([X], [Y]) = -3l_1[X]^2 + [X](2k_1[A] + k_2) + [Y](-k_2 - 2l_2) - k_3,$$

azaz minden periodikus megoldás átmetszi az

$$[Y] = \frac{-3l_1}{k_2 + 2l_2}[X]^2 + \frac{2k_1[A] + k_2}{k_2 + 2l_2}[X] - \frac{k_3}{k_2 + 2l_2}$$

egyenletű parabolát. Feltevés szerint k_2 és l_2 nem lehet egyszerre 0, így a kifejezés értelmes. Speciálisan, ha a negatív főegyütthatójú parabola teljesen az x -tengely alatt halad, akkor nincs az első ortánsban haladó periodikus megoldás. Ez pontosan akkor következik be, ha a diszkrimináns negatív, azaz ha

$$(2k_1[A] + k_2)^2 - 12l_1k_3 < 0.$$

Ennek a kritériumnak a felhasználásával elégséges feltételeket kereshetünk a vizsgált hat esetben periodikus megoldások kizárására.

2.3. Hopf-bifurkáció

Tegyük fel, hogy a stacionárius pontra vonatkozó egyenletrendszer egyetlen $f(x) = 0$ egyenletre redukálható, és a másik változó mellett két paraméter is kifejezhető x valamelyikének függvényeként. Ha $c(x)$ és $d(x)$ a kifejezett változók, akkor a többi paramétert rögzítettnek véve definiáljuk segédeszközként a

$$T = \{(c, d) : \exists x : f(x) = 0 = \text{Tr}(c, d, x)\}$$

görbét ahol $\text{Tr}(c, d, x)$ a rendszer Jacobi-mátrixának nyoma.

$$\text{Tr}(c, d, x) = \frac{\partial F(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial G(x, y)}{\partial y}.$$

Ha a T görbe mentén adott paraméterekhez tartozó pontban a Jacobi-mátrixnak két tisztán képzetes sajátértéke van, akkor a görbén áthaladva Hopf-bifurkáció lép fel. Számoljuk ki a sajátértékeket:

$$\lambda^2 - \lambda \left(\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial G(x, y)}{\partial y} \right) - \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} \frac{\partial G(x, y)}{\partial x} = 0$$

λ együtthatója éppen a nyom, ezért

$$\lambda^2 = \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} \frac{\partial G(x, y)}{\partial x} < 0$$

a feltétel. Például a teljesen reverzibilis rendszer korábban szerepelt átparaméterezett alakjából a $(-KMx + 2KLy)(My) < 0$, $Mx > 2Ly$ feltétel adódik, ahol egy stacionárius pont koordinátái szerepelnek.

3. A rendszer viselkedése egy tiltott reakciólépéssel

Aszerint, hogy melyik reakciólépés nem megy végbe, hat esetet kell megvizsgálnunk.

3.1. Az $l_3 = 0$ eset

Az $\alpha = \frac{k_1[A]}{l_1}$, $\beta = \frac{k_1^2[A]^2}{l_1 l_2}$, $\gamma = \frac{l_1}{k_1^2[A]^2}$, $K = \frac{k_1[A]}{l_2}$, $M = \frac{k_2}{k_1[A]}$, $N = \frac{k_3 l_1}{k_1^2[A]^2}$ választással (8)–(9) egyenleteink a következő formát öltik:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x^2 - x^3 - K M x y + K y^2 \\ \dot{y} &= M x y - N y - y^2 \end{aligned} \quad (5)$$

A Jacobi-mátrix:

$$J(x, y) = \begin{vmatrix} 2x - 3x^2 - K M y & -K M x + 2K y \\ M y & M x - N - 2y \end{vmatrix} \quad (6)$$

A Bendixson-kritérium szerint nincs az első ortánsban haladó periodikus megoldás, ha $(M + 2)^2 - 12N < 0$. A korábban jelzett módon nyerhetünk egy másodfokú görbét, amelyet minden periodikus megoldásnak át kell metszenie, és ha ez a pozitív ortánsban kívül halad, akkor nincsen periodikus pálya, innen a kritérium. Van az első ortánsban két, a paramétereiktől függetlenül meglévő stacionárius pontunk: $(0, 0)$, $(1, 0)$. Minden más stacionárius pont $x = d$, $y = M d - N$ alakú, ahol d a

$$p_2(z) = z^3 - z^2 + K M N z - K N^2$$

polinom gyöke, amely pozitív, mert $p_2(0) < 0$ és $p_2'(z) > 0$, ha $z < 0$, vagyis itt p_2 szigorúan monoton nő. A (12) képletből

$$J(1, 0) = \begin{vmatrix} -1 & -K M \\ 0 & M - N \end{vmatrix}$$

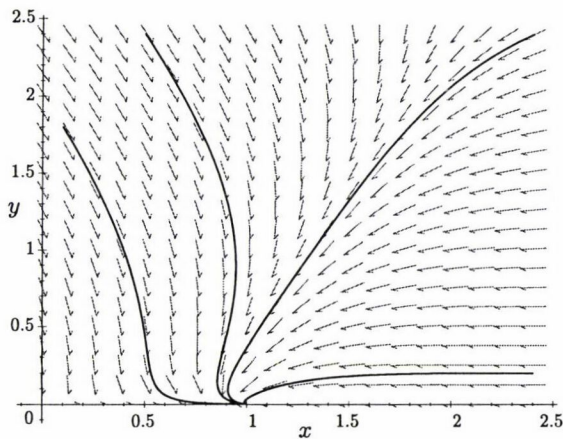
Azonnal látszik, hogy $M < N$ esetén az $(1, 0)$ stacionárius pont aszimptotikusan stabilis, míg $M > N$ esetén nyereg.

1. LEMMA. $N > M$ esetén a $(0, 0)$ és $(1, 0)$ stacionárius pontokon kívül több nincs.

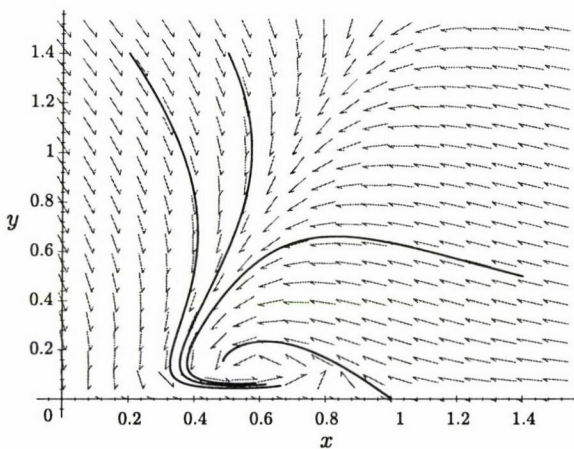
Kémiailag értelmes, p_2 gyökeként adódó stacionárius pontot csak akkor kaphatunk, ha p_2 -nek van $\frac{N}{M}$ -nél nem kisebb gyöke, mert ellenkező esetben y negatív. $p_2(\frac{N}{M}) = \frac{N^2}{M^2}(\frac{N}{M} - 1) > 0$, továbbá p_2 deriváltjának, $3z^2 - 2z + K M N$ -nek nagyobbik zérushelye legfeljebb $\frac{2}{3} < \frac{N}{M}$, azaz az $\frac{N}{M}$ -nél nagyobb z értékekre p_2 már szigorúan monoton nő, ezért itt gyöke sem lehet.

1. és 2. ábra: $(K, M, N) = (1, 1, 2)$ és $(1, 2, 1)$. Az első ábra megmutatja az $(1, 0)$ stacionárius pontot, amely $M < N$ miatt aszimptotikusan stabil, ahogyan

ezt a néhány berajzolt pályarészlet mutatja. A második ábránál $M > N$, az $(1, 0)$ pont aszimptotikus stabilitása láthatóan elveszett. Sejthető viszont egy belső stabil stacionárius pont $(0.6, 0.1)$ környezetében.



1. ábra



2. ábra

A nullklínák vizsgálata. $\dot{y} = 0$ akkor és csak akkor, ha $x = \frac{N+y}{M}$. Csak a pozitív síknegyedbe eső részt figyelembe véve ez a nullklína egy félegyenes, amely az x -tengelyt $\frac{N}{M}$ -nél metszi, és a síknegyedet két nem korlátos részre osztja. Az $\dot{x} = 0$ görbe vizsgálatához alkalmazzuk az $y = \tau x$ paraméterezést. Az $x = 0$ esetet külön könnyen tudjuk majd kezelni, ezért ilyen esetben a későbbiekben is feltehetjük,

hogy x hatványaival szabadon leoszthatunk.

$$\begin{aligned}
 0 &= x^2 - x^3 - KMx^2\tau + Kx^2\tau^2 \\
 0 &= 1 - x - KM\tau + K\tau^2 \\
 (7) \quad x(\tau) &= 1 - KM\tau + K\tau^2 \\
 y(\tau) &= \tau - KM\tau^2 + K\tau^3
 \end{aligned}$$

Az $\dot{x} = 0$ nullklínát leíró $h(\tau) = (x(\tau), y(\tau))$, $\tau \in [0, \infty[$ görbe az $(1, 0)$ pontból indul, és $x(\tau)$ vizsgálatával kapjuk, hogy $KM^2 < 4$ esetben két nemkorlátos részre osztja a negyedsíkot, míg $KM^2 \geq 4$ esetén két nemkorlátos és egy korlátos részre, mert az origón kétszer áthaladva előbb elhagyja a negyedsíkot, majd visszatér. Meredeksége,

$$\frac{\dot{y}(\tau)}{\dot{x}(\tau)} = \frac{1 - 2KM\tau + 3K\tau^2}{-KM + 2K\tau} \rightarrow \infty,$$

ha $\tau \rightarrow \infty$.

3., 4. és 5. ábra: $KM^2 < 4$ és $KM^2 \geq 4$ (K, M, N) = $(1, 1, 2)$, $(2, 2, 3)$ és $(1, 1, 0.5)$. Látható egy hurok megjelenése h -n, ha $KM^2 > 4$, és a félegyenes x -tengelyen lévő kiindulópontjának eltolódása az origó felé, ha $\frac{N}{M}$ csökken.

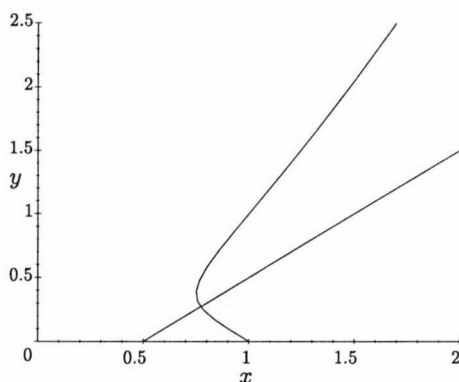
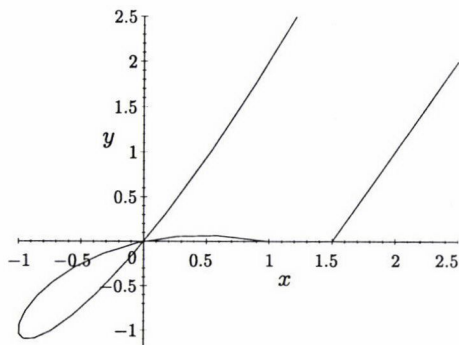
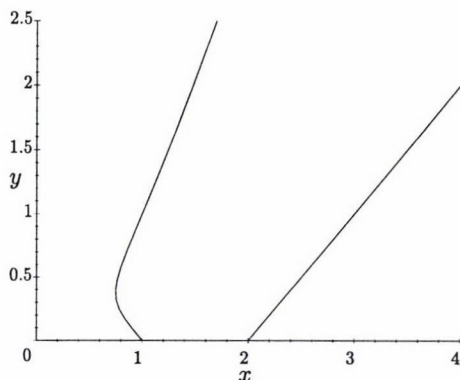
Az $N = M$ eset annyiban speciális az ábrázoltakhoz képest, hogy a félegyenes és a $h(t)$ görbe kiindulópontja egybeesik. Ha $N < M$, akkor létezik legalább egy belső (szigorúan pozitív koordinátákkal rendelkező) stacionárius pont, mert a görbék meredekségei folytán nagy x értékekre a félegyenes a másik nullklína és az x -tengely között fog haladni, de $x = \frac{N}{M}$ -nél a helyzet fordított, és a görbék folytonosak.

2. LEMMA. $1 \geq \frac{N}{M} \geq \frac{2}{3}$ esetén pontosan egy belső stacionárius pont van.

A létezést már láttuk. p_2 deriváltjára vonatkozó megfigyelésünk miatt $z > \frac{2}{3}$ esetén p_2 már szigorúan monoton, ezért legfeljebb egy x értéket enged meg. Az egyik nullklína az y -tengellyel nem párhuzamos félegyenes, ezért adott x -hez legfeljebb egy y érték adhat stacionárius pontot. Tehát pontosan egy stacionárius pont van.

3. LEMMA. A (10)–(11) rendszerben létezik vonzó téglalap.

A nullklínák tulajdonságai folytán léteznek olyan (x_1, y_1) értékek, hogy az összes stacionárius pont beleesik az origó és (x_1, y_1) mint szemközti csúcsok által meghatározott téglalapba. Válasszuk ezt a pontot éppen az $\dot{y} = 0$ nullklínára esőnek. A téglalapon kívül az $\dot{x} = 0$ nullklína halad felül. Ezt összevetve az iránymező komponenseinek előjelével, azt kapjuk, hogy a téglalap negyedsíkba eső oldalain mindenütt a trajektóriák befelé haladnak át, hiszen az y -tengellyel párhuzamos oldalnál $\dot{x} < 0$, az x -tengellyel párhuzamosnál $\dot{y} < 0$. Kint minden trajektória korlátos, mert minden kezdőponthoz található a leírthoz hasonló öt tartalmazó téglalap, ezért véges időn belül eléri a legelsőként leírt legkisebb téglalapot.



3., 4. és 5. ábra

1. KÖVETKEZMÉNY. Ha az origóban nincs áthurkolás, azaz $KM^2 < 4$ és $N > M$, akkor az $(1, 0)$ stacionárius pont globálisan aszimptotikusan stabil.

Most is vehetünk egy olyan vonzó téglalapot, mint az előbb. Síkban korlátos trajektóriákról pontosan tudjuk, milyen lehet az ω -határhalmazuk. A másik stacionárius pont, az origó taszít, mert egy környezetében az x irányú komponens pozitív. Ugyanezért nem lehet határhalmaz a két stacionárius pont és az x -tengelyen közöttük haladó pálya pontjainak halmaza sem. Periodikus pálya nem lehet az ω határhalmaz, mert ennek a belsejében kellene tartalmaznia legalább egy stacionárius pontot, de ez lehetetlen, mert kimutattuk, nincs más stacionárius pont, mint az origó és az $(1, 0)$ a negyedsík határán. Következésképpen tetszőleges trajektória ω -határhalmaza az egyelemű $(1, 0)$ halmaz.

3.2. Az $l_2 = 0$ eset

A (8)–(9) alapegyenletek szerencsés mértékben leegyszerűsödnek:

$$(8) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= x^2 - x^3 - KMxy \\ \dot{y} &= Mxy + N - Ny \end{aligned}$$

A stacionárius pontokra

$$x = \frac{Ny - N}{My}$$

ahol y gyöke a

$$\begin{aligned} p_2(z) &= KM^3Nz^4 + (-MN^2 - KM^3N + N^3)z^3 + \\ &+ (2MN^2 - 3N^3)z^2 + (3N^3 - MN^2)z - N^3 \end{aligned}$$

negyedfokú polinomnak. Vezessük be a

$$q_1(z) = KM^3z^3 + (N^2 - MN)z^2 + (MN - 2N^2)z + N^2$$

polinomot, azt kapjuk hogy

$$p_2(z) = N(z - 1)q_1(z)$$

A Dulac-kritérium szerint most nincs a pozitív negyedben haladó periodikus megoldás, ha $(M + 2)^2 - 12N < 0$. A lokális vizsgálathoz szükséges Jacobi-mátrix:

$$J(x, y) = \begin{vmatrix} 2x - 3x^2 - KM y & -KMx \\ My & Mx - N \end{vmatrix}$$

Láthatóan megint van egy (K, M, N) -től független stacionárius pontunk, $(x, y) = (0, 1)$.

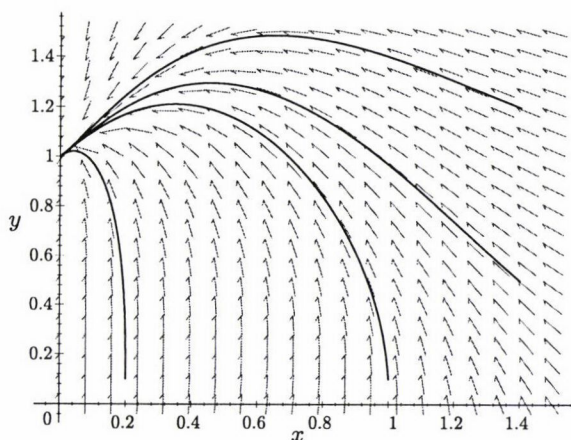
$$J(0, 1) = \begin{vmatrix} -KM & 0 \\ M & -N \end{vmatrix}$$

$\lambda_1 = -KM$, $\lambda_2 = -N$, azaz ez a stacionárius pont most aszimptotikusan stabil; erre a reakcióegyenletek ismeretében a következő szemléletes magyarázatot adhatjuk: Ha a második reakció megfordíthatatlan, akkor megfelelő sebességi arányok mellett előfordulhat, hogy a gyors 2. reakció elfogyasztja az X -et, amit a lassú 1. nem tud pótolni, tehát X (el)fogy, Y pedig dinamikus egyensúlyban áll (illetve ahhoz közelít) B -vel. Ezért közelít a rendszer az $(x, y) = (0, 1)$ állapothoz.

6. ábra: $(K, M, N) = (1, 1, 2)$. Jól látható a $(0, 1)$ stacionárius pont aszimptotikus stabilitása.

Vizsgáljuk most a q_1 harmadfokú polinomot! Ennek 1-nél nem kisebb gyökei adnak kémiailag értelmes stacionárius pontokat. Ezért alkalmazzuk a $z = u + 1$ transzformációt! A

$$q_2(u) = KM^3u^3 + (3KM^3 + N^2 - MN)u^2 + (3KM^3 - MN)u + KM^3$$



6. ábra

polinom pozitív gyökeit kell meghatároznunk. Ezek multiplicitással vett száma Descartes tétele szerint [3] egyenlő az együtthatók sorozatában előforduló előjelváltások számával, vagy annál egy páros számmal kisebb. A sorozat: $+++$. A középső együtthatók közül az elsőfokú tagé a kisebb, ezért pozitív gyök létezésének szükséges feltétele $3KM^3 - MN < 0$, vagyis ha $3KM^2 < N$, akkor lehet csak belső stacionárius pont, mert különben a $++++$ sorozatban nincs előjelváltás. q_2 konstans tagja $0 < KM^3 = KM^3 \prod_{i=1}^3 (-z_i)$, ahol a z_i -k p_1 gyökei. Ha van komplex gyök,

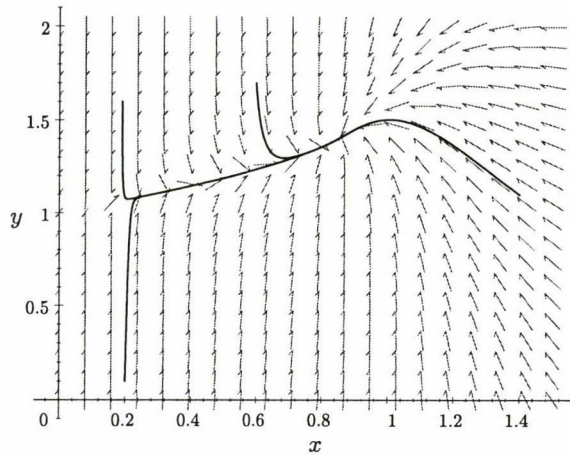
akkor $1 = -z_1|z_2|^2$ miatt a valós gyök negatív. Az is lehetséges, hogy mindhárom gyök valós és negatív. Ilyenkor nincs stacionárius pont, példa ilyen esetre a $(K, M, N) = (1, 1, 2)$ hármas. Utolsó esetként lehet, hogy 1 negatív és 2 pozitív gyökünk van. Tehát 1 és 2 belső stacionárius pontú paraméterezés is létezhet aszerint, hogy a gyökök egybeesőek-e.

Példa két belső stacionárius pontú paraméterezés létezésére. Legyen $(K, M, N) = (0.1, 1, 3)$.

Kapjuk: $(x_1, y_1) \approx (0.1180, 1.0410)$ $(\lambda_{1,1}, \lambda_{1,2}) \approx (0.860, -2.877)$, (instabil, de) $(x_2, y_2) \approx (0.8339, 1.3850)$, $(\lambda_{2,1}, \lambda_{2,2}) \approx (-0.61, -2.09)$, ami szerint aszimptotikusan stabil fixpontot is találtunk az elérhető pontossággal számolva.

1. MEGJEGYZÉS. Durva hibaanalízist végezve, 10^{-3} abszolút hibát feltételezve a koordinátákban, felhasználva $|x_2| < 1$, $|y_2| < 2$ -t és az összeg, szorzat abszolút hibájára vonatkozó képleteket azt kapjuk, hogy a sajátértékek hibája nem nagyobb, mint 0.52, ezért a stabilitás valóban fennáll.

7. ábra. $(K, M, N) = (0.1, 1, 3)$, mint az előbb: két stabil és egy instabil stacionárius pont. A harmadik stacionárius pont a $(0, 1)$.



7. ábra

Példa pontosan 1 stacionárius pontot adó paraméterezés létezésére.

Tegyük fel a keresés idejére, hogy $a > 0$ kétszeres gyök, $b < 0$ a másik gyök. A

$$KM^3z^3 + (N^2 - MN)z^2 + (MN - 2N^2)z^2 + (MN - 2N^2)z + N^2 = 1(z - a)^2(z - b)$$

egyenlőségéből $KM^3 = 1$, $N^2 - MN = -b - 2a$, $MN - 2N^2 = 2ab + a^2$, $N^2 = -a^2b$. Ezen egyenletrendszer esetleges megoldásai adnak stacionárius állapotokat, amelyeket egyenként vizsgálni lehet. Most tegyük fel, hogy még speciálisabban $M = N$. Egyértelmű megoldást kapunk:

$$a = 1.5, \quad b = 3, \quad M = N = 2^{-1}3^{1.5}, \quad K = 2^33^{-4.5} \quad \text{és} \quad (x, y) = \left(\frac{1}{3}, \frac{3}{2}\right).$$

A nullklínák vizsgálata $l_2=0$ mellett. Legyen a h_2 görbe azon pontok halmaza, amelyekre: $\dot{y} = 0$, ami akkor és csak akkor teljesül, ha $x = \frac{N}{M}(1 - \frac{1}{y})$ vagy

$$y = 1 + \frac{Mx}{N - Mx},$$

$h_2'(x) > 0$. A görbe csak $x < \frac{N}{M}$ esetén van értelmezve a pozitív negyedben, ezért az $x \geq \frac{N}{M}$ síkrészen nem lehet stacionárius pont.

$\dot{x} = 0$: A (16) egyenletből az $y = \tau x$ paraméterezés és osztás segítségével azt kapjuk, hogy most az $\dot{x} = 0$ görbe koordinátafüggvényei

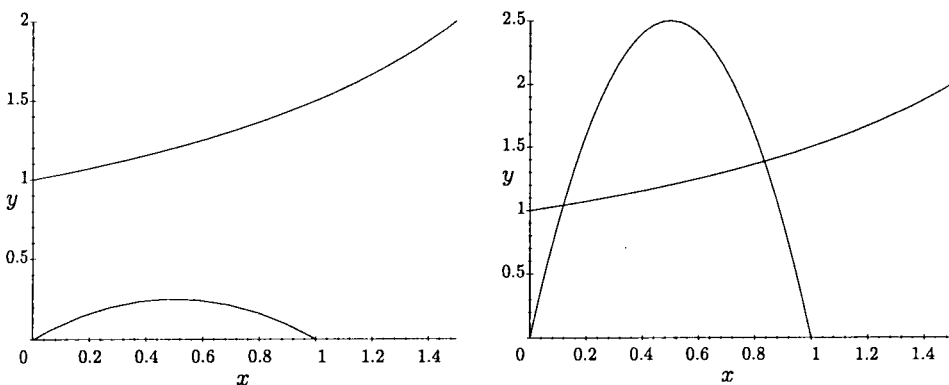
$$(9) \quad \begin{aligned} x(\tau) &= 1 - KM\tau \\ y(\tau) &= \tau - KM\tau^2 \end{aligned}$$

$h_3(\tau) = (x(\tau), y(\tau))$. A görbe az $(1, 0)$ pontból indulva monoton csökkenő x mellett az origón keresztül, $\tau = \frac{1}{KM}$ -nél hagyja el a síknegyed. Két utóbbi egyenletünkéből

$$y(x) = \frac{-(x - 0.5)^2}{KM} + \frac{1}{4KM}.$$

Ebből és a másik görbéről leírtakból következik egy elégséges feltétel 0 stacionárius pont létezésére: $1 < 4KM$, mert ekkor a parabola felső csúcsa a másik görbe legalsó értékét sem éri el. Egyébként 1 vagy 2 stacionárius pont lehetséges. Ha csak 1 van, akkor ez a pont, vagy ha 2 van, akkor közülük a kisebbik x koordinátával rendelkező stacionárius pont instabil, mert ha egy trajektória kezdőpontját úgy választjuk meg, hogy az a tőle balra eső síkrészbe és azon belül a két nullklína közé essen, akkor ez a trajektória tőle távolodva az y -tengely felé fog haladni, és az iránymező jellege miatt x -ben növekedővé nem tud átváltani.

8. és 9. ábra: $(K, M, N) = (1, 1, 3), (0.1, 1, 3)$. Az első esetben 0, a másodikban 2 belső stacionárius pont van. A h_3 görbe és az x -tengely által meghatározott korlátos tartományon \dot{x} pozitív, a másik tartományban a negyedsíkon negatív. A h_2 görbe alatt \dot{y} pozitív, felette negatív.



8. és 9. ábra

4. LEMMA. A (17)–(18) rendszerben létezik vonzó téglalap.

Legyen a téglalap egyik csúcsa az origó. Átlósan szemközti csúcsát válasszuk az $\dot{y} = 0$ nullklínán lévőnek úgy, hogy az y -tengellyel párhuzamos oldalára $x > 1$ teljesüljön. Ekkor a trajektóriák a téglalap oldalain befelé haladnak át. Tetszőleges ponthoz most is van ilyen, őt tartalmazó téglalap, ezért a trajektóriák korlátosak.

2. KÖVETKEZMÉNY. Ha a $(0, 1)$ -en kívül más stacionárius pont nincs, azaz ha h_2 és h_3 görbe nem metszi egymást, akkor ez a stacionárius pont globálisan aszimptotikusan stabil.

Hopf-bifurkáció. $x = \frac{Ny-N}{My}$, ($y \geq 1$ szükséges), y -t p_1 gyökei adják

$$p_1(z) = KM^3z^3 + (N^2 - MN)z^2 + (MN - 2N^2)z + N^2$$

$$\begin{aligned} \text{Tr } J(x, y) &= 2x - 3x^2 - KMy + Mx - N = \\ &= \frac{2N(y-1)}{My} - 3\frac{N(y-1)^2}{My} - KMy + \frac{N(y-1)}{y} - N. \end{aligned}$$

Két utolsó kifejezésünket 0-val egyenlővé téve:

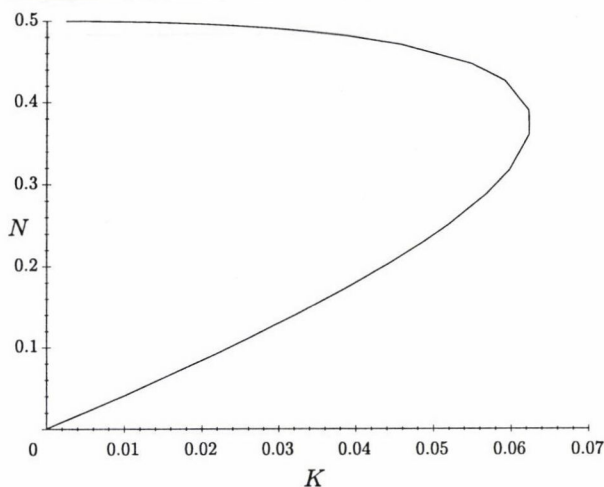
$$\begin{aligned} 0 &= KM^3z^3 + (N^2 - MN)z^2 + (MN - 2N^2)z + N^2 \\ 0 &= \frac{2N(y-1)}{My} - 3\frac{N(y-1)^2}{My} - KMy + \frac{N(y-1)}{y} - N. \end{aligned}$$

Ezekből K és N kifejezhető:

$$K(y) = \frac{1}{4} \frac{(y-1+M)(y-1-m)}{My(y^2-2y+1)} \quad N(y) = \frac{1}{2} \frac{My(y-1-M)}{y^2-2y+1}.$$

Pozitív paramétert $M+1$ -nél nem kisebb y -ra kapunk, ezért $x(y)$ meg van engedve.

10. ábra: A T görbe az (K, N) síkon $M = 1$, $y \geq 2$.



10. ábra

5. TÉTEL. $l_2 = 0$ esetén a T görbén történő áthaladáskor Hopf-bifurkáció lép fel.

Jelen esetben $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} \frac{\partial G(x,y)}{\partial x} = My(-KMx) = KM^2xy < 0$ mindig teljesül.

3.3. Az $l_1 = 0$ eset

Az $\alpha = \frac{\sqrt{l_2 l_3 [B]}}{k_1 [A]}$, $\beta = \sqrt{\frac{l_3 [B]}{l_2}}$, $\gamma = \frac{1}{\sqrt{l_2 l_3 [B]}}$, $K = \frac{k_1 [A]}{\sqrt{l_2}}$, $L = \frac{k_2}{k_1 [A]}$, $M = \frac{k_3}{l_2 l_3 [B]}$ választással az alapegyenleteink a következő alakra hozhatók:

$$(10) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= x^2 - LKxy + Ky^2 \\ \dot{y} &= Lxy + 1 - My - y^2. \end{aligned}$$

A stacionárius pontok a következő formájúak:

$$x = \frac{y^2 + My - 1}{Ly},$$

ahol y gyöke a

$$p_3(z) = z^4 + (2M - KL^2M)z^3 + (M^2 + KL^2 - 2)z^2 - 2Mz + 1$$

polinomnak. Legfeljebb 4 megoldás van. A Bendixson-kritérium szerint minden periodikus megoldás átmetszi az

$$y = \frac{2 + L}{2 + LK}x - \frac{M}{2 + LK}$$

egyenletű egyenest.

A nullklínák $l_1 = 0$ mellett. $\dot{y} = 0$ akkor és csak akkor, ha

$$x = \frac{y}{L} - \frac{1}{Ly} + \frac{M}{L} =: h_4(y)$$

$h'_4(y) > 0$, és határértéke a végtelenben $\frac{1}{L}$. $\dot{x} = 0$ akkor és csak akkor, ha $0 = x^2 - LKxy + Ky^2$, vagyis adott y -hoz 0, 1 vagy 2 különböző x érték tartozik aszerint, hogy az x -ben másodfokú egyenletnek hány megoldása van.

$$y > \frac{-M + \sqrt{M^2 + 4}}{2} > 0$$

feltehető, mert az első nullklína ennél nem kisebb y -ok mellett fut az első síknyegyben.

$$\text{Az } \dot{x} = 0 \text{ egyenletből } x_{1,2} = y \left(\frac{LK}{2} \pm \sqrt{\frac{L^2 K^2}{4} - K} \right).$$

Nyilvánvaló, hogy $\frac{L^2 K}{4} < 1$ esetén nincs stacionárius pont, mert ilyenkor a gyökjel alatt negatív szám áll. Ha $L^2 K = 4$, akkor a nullklína egy az origóból kiinduló félegyenes, $x = y \frac{LK}{2}$ egyenlettel. Ezt behelyettesítve a másik egyenletbe és megoldva kapjuk:

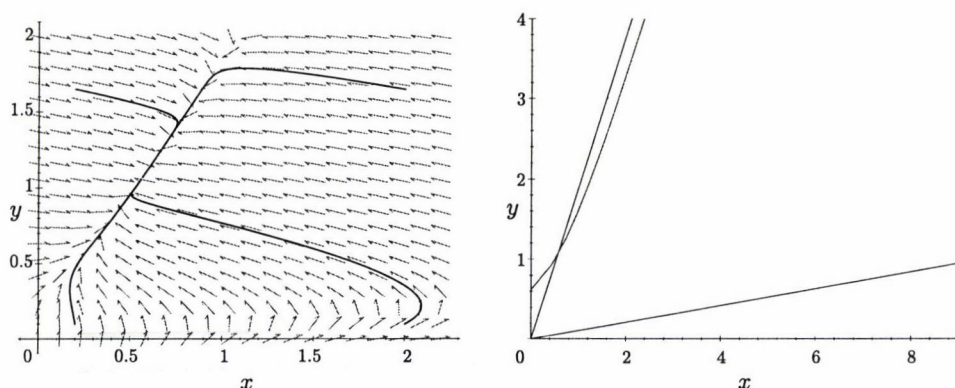
$$y_{1,2} = \frac{M \pm \sqrt{M^2 - 2(KL^2 - 2)}}{KL^2 - 2} = \frac{M \pm \sqrt{M^2 - 4}}{2}.$$

Láthatóan M -től függ a stacionárius pontok száma: az $M < 2$, $M = 2$, $M > 2$ esetekben rendre 0, 1, 2 stacionárius pont van.

Viselkedés $L^2K > 4$ esetén. Azt tapasztaljuk, hogy az $\dot{x} = 0$ nullklína $L^2K = 4$ mellett megjelenő félegyenese a szorzat növekedésével szétnyílik két origóból kiinduló félegyenésre, amelyek között \dot{x} negatív, kívül pedig pozitív. A félegyenesek egyenlete

$$x = y \left(\frac{LK}{2} \pm \sqrt{\frac{L^2K^2}{4} - K} \right)$$

11. és 12. ábra. $(K, L, M) = (5, 2, 1)$ esetén a nullklínák és az iránymező



11. és 12. ábra

Nevezzük alsónak az első síknegyedben x -tengelyhez közelebbit, vagyis amelyik egyenletében + szerepel, felsőnek a másikat. Ismerve a másik nullklína alakját, sokféle viselkedés elképzelhető aszerint, hogy mely félegyeneseket hányszor metszi, vagy csak érinti. Az látszik, hogy az alsó félegyenesen lévő stacionárius pont létezésének szükséges feltétele, hogy a felső is legyen, mert ha a teljes síkon tekintjük az $\dot{y} = 0$ nullklínát, akkor annak egyik ága végig az $y < 0$ félsíkon halad, a másik pedig az y -tengelyt a

$$\frac{-M + \sqrt{M^2 + 4}}{2}$$

pozitív értéknél metszi. Kiszámolhatók viszont a nullklínák metszéspontjai: Legyen

$$a = \frac{L^2K}{2} + L\sqrt{\frac{L^2K^2}{4} - K} - 1, \quad b = \frac{L^2K}{2} - L\sqrt{\frac{L^2K^2}{4} - K} - 1.$$

Az alsó egyenesen:

$$y_{1,2} = \frac{M \pm \sqrt{M^2 - 4a}}{2a}.$$

A felső egyenesen:

$$y_{3,4} = \frac{M \pm \sqrt{M^2 - 4b}}{2b}.$$

Az x értékek adódnak, és a nemnegatív (pozitív) párok adnak stacionárius pontokat, mindkét egyenesen legfeljebb kettőt. Megfigyelés: létezik y' , hogy $y > y'$ -re az $\dot{y} = 0$ görbe és az y -tengely közrefogják a félegyenéseket (a meredekségek miatt):

$$\frac{1}{L} = \frac{K}{2\frac{LK}{2}} < \frac{K}{\frac{LK}{2} + \sqrt{\frac{L^2 K^2}{4} - K}} = \frac{LK}{2} - \sqrt{\frac{L^2 K^2}{4} - K},$$

azaz h_4 meredeksége a felső egyenes meredekségénél is nagyobb lesz, figyelembevéve, hogy az előbb nem x , hanem y szerinti deriváltakat hasonlítottunk össze.

Hopf-bifurkáció a (21)–(22) rendszerben.

$$x = \frac{y^2 + My - 1}{Ly}, \quad y \geq \frac{-M + \sqrt{M^2 + 4}}{2}$$

szükséges, mert láttuk, hogy pontosan ekkor fut az $\dot{y} = 0$ nullklína a pozitív síknyedben. A T görbe kiszámításához tekintsük:

$$0 = p_3(y) = y^4 + (2M - KL^2M)y^3 + (M^2 + KL^2 - 2)y^2 - 2My + 1.$$

A Jacobi-mátrix nyoma:

$$0 = 2x - LKy + Lx - M - 2y = (y^2 + My - 1) \left(\frac{2}{Ly} + \frac{1}{y} \right) - y(LK + 2) - M.$$

Legyen M rögzített. Ekkor a T görbe paraméteres alakja:

$$K(y) = \frac{(y^2 + 1)^2(My - 1)}{y^2(-y^2 + My - 1)}, \quad L(y) = \frac{-y^4 + M^2y^2 - 2My + 1}{(y^2 + 1)(My - 1)}.$$

13. ábra. A T görbe a (K, L) síkon, $M = 5$.

Mikor teljesül a Hopf-bifurkáció feltétele az aktuális F , G -vel?

$$0 > \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} \frac{\partial G(x, y)}{\partial x} = Ly(-LKx + 2Ky) = KL(y^2 - My + K).$$

Ebből következik:

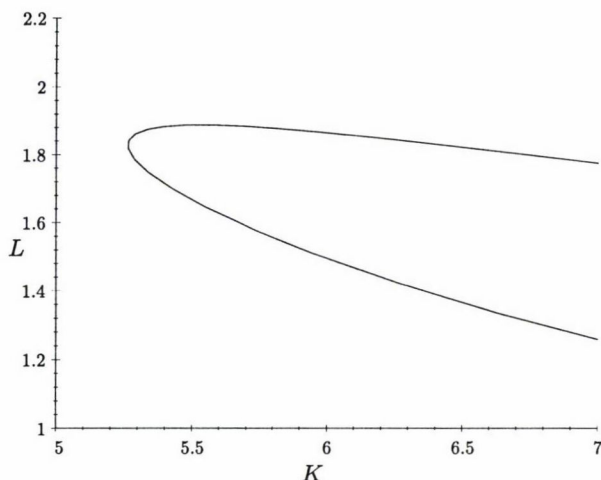
6. TÉTEL. Ha a T görbén való áthaladáskor a metszéspont y paramétere

$$\frac{M - \sqrt{M^2 - 4K}}{2}$$

és

$$\frac{M + \sqrt{M^2 - 4K}}{2}$$

közé esik, akkor Hopf-bifurkáció játszódik le.



13. ábra

A következő részekben röviden megvizsgáljuk, mi a helyzet, ha a balra menő reakciók között van egy megfordíthatatlan.

3.4. A $k_1=0$ eset

Bevezetve a következő konstansokat:

$$\alpha = \frac{k_3}{k_2}, \quad \beta = \sqrt{\frac{l_3[B]}{l_2}}, \quad \gamma = \frac{k_2^2}{l_1 k_3^2}, \quad K = \frac{k_2}{k_3} \sqrt{\frac{l_3[B]}{l_2}},$$

$$L = \sqrt{l_2 l_3 [B]} \frac{k_2^2}{l_1 k_3^2}, \quad M = \frac{k_2^2}{k_3 l_1}$$

kiindulási rendszerünk az alábbi alakot ölti:

$$(11) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= -x^3 - KMxy + KLy^2 \\ \dot{y} &= Mxy + L - My - Ly^2 \end{aligned}$$

A Bendixson-kritérium szerint nincs első síknegyedbeli periodikus megoldás, ha $M < 12$. A stacionárius pontokra: $x = \frac{Ly^2 + My - L}{My}$, ahol y a következő polinom gyöke:

$$\begin{aligned} L^3 z^6 + 3ML^2 z^5 + (KM^4 + 3LM^2 - 3L^3)z^4 + (M^3 - 6L^2M - KM^3L)z^3 + \\ + 3(L^3 - LM^2)z^2 + 3L^2Mz - L^3. \end{aligned}$$

Legalább egy gyök negatív. $\dot{y} = 0$ akkor és csak akkor ha

$$x = \frac{Ly}{M} - \frac{L}{My} + 1, \quad 0 < \frac{\partial x(y)}{\partial y} \rightarrow \frac{L}{M},$$

ha $y \rightarrow \infty$.

A másik görbe a szokásos paraméterezéssel:

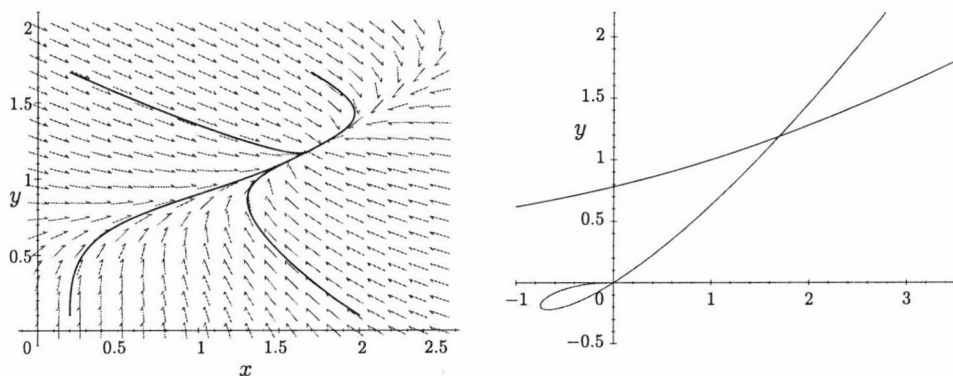
$$(12) \quad \begin{aligned} x(\tau) &= -KM\tau + KL\tau^2 \\ y(\tau) &= -KM\tau^2 + KL\tau^3 \end{aligned}$$

$\tau \in [0, \frac{M}{L}]$ esetén a negatív, $\tau > \frac{M}{L}$ esetén a pozitív síknegyedben halad. Elegendően nagy τ -ra (x, y) -ra az x -tengellyel közrefogja a másik nullklínát.

A negyedik határán nincs stacionárius pont. A nullklínáknak viszont van legalább egy metszéspontja a siktartomány belsejében, ezért igaz a

7. LEMMA. *Van legalább egy belső stacionárius pont.*

14. és 15. ábra: $(K, L, M) = (2, 6, 3)$. \dot{x}, \dot{y} előjelei leolvashatók.



14. és 15. ábra

Az egyetlen stacionárius pont: $x \approx 1.6948$, $y \approx 1.1887$, a Jacobi-mátrix sajátértékei közelítőleg -26.81 , -2.64 ; ezek szerint aszimptotikusan stabil fixpontot találtunk.

2. MEGJEGYZÉS. A sajátértékek hibájáról megmutatható, hogy legfeljebb 10^{-3} hibát feltételezve a koordinátákban nem lesz nagyobb, mint 0.069 , ezért az aszimptotikus stabilitás igaz.

Vonzó halmaz létezése. Vegyünk fel egy téglalapot az origóval és $\dot{x} = 0$ görbére illeszkedő átlósan szemközti csúccsal úgy, hogy tartalmazza az összes stacionárius pontot. Ekkor vízszintes oldalán lefelé, függőleges oldalán balra, azaz befelé haladnak át a trajektóriák. Megint igaz, hogy minden trajektória korlátos.

3.5. A $k_2 = 0$ eset

Felhasználhatók a teljesen reverzibilis rendszer egyenletei, $M = 0$ mellett.

$$(13) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= x^2 - x^3 + KLy^2 \\ \dot{y} &= N - Ny - Ly^2 \end{aligned}$$

$N > 0$, $L > 0$. Az egyik nullklína egyszerű:

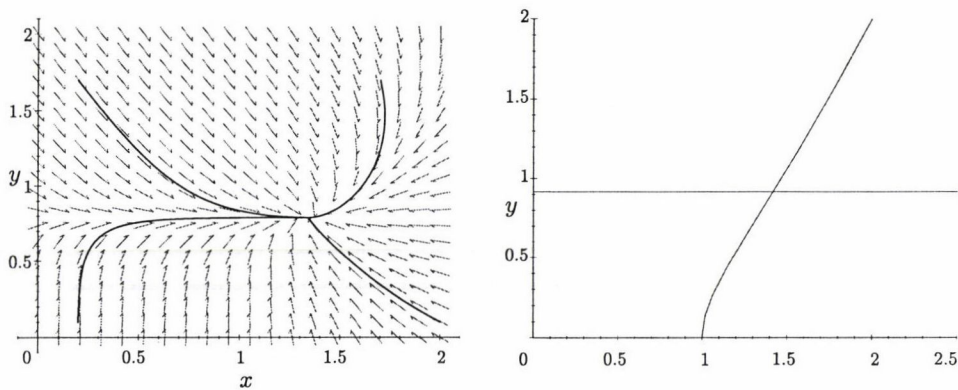
A pozitív félsíkon $\dot{y} = 0$ akkor és csak akkor, ha

$$y = \frac{-N + \sqrt{N^2 + 4LN}}{2L},$$

ami egy x -tengellyel párhuzamos egyenest ad, és itt $y > 0$. Az $\dot{x} = 0$ görbe paraméterezése a következő:

$$(14) \quad \begin{aligned} x(\tau) &= 1 + KL\tau^2 \\ y(\tau) &= \tau + KL\tau^3 \end{aligned}$$

16. és 17. ábra: A nullklínák és az iránymező szemléltetése $(K, L, N) = (1, 1, 3)$ esetén.



16. és 17. ábra

8. LEMMA. Ha $k_2 = 0$, akkor a paraméterek tetszőleges értékei mellett a rendszernek pontosan egy stacionárius pontja van, és ez globálisan aszimptotikusan stabil.

A negyedsík határán nincs stacionárius pont. Az $\dot{y} = 0$ nullklína félegyenese tetszőleges paraméterekre létezik. Az $\dot{x} = 0$ nullklína az $(1, 0)$ pontból indul, $x(t)$, $y(t)$ t -ben szigorúan monoton növekvő és nem korlátos. Emiatt létezik pontosan egy (x'', y'') metszéspontjuk a negyedsík belsejében. Tekintsük azokat a pozitív negyedsíkbeli téglalapokat, amelyek egyik csúcsa az origó. Ha a szemközti (x_1, y_1) csúcs az $\dot{x} = 0$ görbe pontja, és $x_1 > x''$, akkor a téglalap vonz. Periodikus megoldások csak az egyetlen stacionárius pont körül lehetnének, de ezek létezését megakadályozza a vízszintes, invariáns nullklína, amelyen a trajektóriák nem haladhatnak át. Így a kétdimenziós dinamikai rendszerek korlátos trajektóriáira vonatkozó ismereteinkből következően minden trajektória ω -határhalmaza az egyelemű (x'', y'') halmaz.

3.6. A $k_3=0$ eset

Bevezetve az

$$\alpha = \frac{k_1[A]}{l_1}, \quad \beta = \frac{l_1 l_3[B]}{k_1 k_2[A]}, \quad \gamma = \frac{l_1}{k_1^2[A]^2}, \quad K = \frac{l_3[B]}{k_2},$$

$$L = \frac{k_2}{k_1[A]}, \quad M = \frac{l_1^2 l_2 l_3[B]}{k_1^3 k_2[A]^3}$$

új paramétereket a (6)–(7) rendszer az alábbi alakba írható:

$$(15) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= x^2 - x^3 - K L x y + K M y^2 \\ \dot{y} &= L x y + L - M y^2 \end{aligned}$$

A Bendixson-kritériumból: Az esetleges periodikus megoldások metszik az $x = \frac{2+l}{3}$ egyenest.

Az $\dot{y} = 0$ görbe egyenlete: $x = \frac{M y}{L} - \frac{1}{y}$. A görbe $y = \sqrt{\frac{L}{M}}$ -nél metszi az y -tengelyt.

Az $\dot{x} = 0$: görbe koordinátafüggvényei az eddig alkalmazott módszerrel:

$$(16) \quad \begin{aligned} x(\tau) &= 1 - K L \tau + K M \tau^2 \\ y(\tau) &= \tau + K L \tau^2 + K M \tau^3 \end{aligned}$$

A görbe ugyanolyan jellegű, mint amelyet az $l_3 = 0$ esetben láttunk. A folytonosság és a meredekségek határértékei miatt most is létezik legalább egy stacionárius pont a negyedik belsejében, és vonzó téglalap létezése is az eddigiekhez hasonlóan megmutatható.

4. Speciális esetek

Észrevehető, hogy az $\dot{x} = F \circ (x, y)$, $\dot{y} = G \circ (x, y)$ kifejezések rendelkeznek azzal a kellemes tulajdonsággal, hogy sok közös, de ellentétes előjelű tagjuk van, amelyek összeadásakor kiesnek. Ezt fel tudjuk használni, ha további megkötéseket teszünk az $[X]$, $[Y]$ mennyiségekkel kapcsolatban.

$[Y] = c[X]$ **feltevés a teljesen irreverzibilis rendszerrel.** Egy ilyen lehet például az a feltételezés, hogy a reakcióterben folyamatosan nyomon követjük $[X]$, $[Y]$ változását, és úgy szabályozzuk a folyamatot, hogy Y mennyisége (koncentrációja) minden pillanatban X mennyiségének (koncentrációjának) rögzített c konstansszorosa legyen. Ez X és Y anyagok szükség szerinti betáplálásával vagy elvonásával érhető el. A reakcióterben lévő keverék viselkedését leíró egyenletek:

$$(17) \quad \begin{aligned} [Y] &= c[X] \\ [\dot{X}] &= \frac{-l_1}{1+c}[X]^3 + \frac{k_1[A]}{1+c}[X]^2 - \frac{k_3 c}{1+c}[X] + \frac{l_3}{1+c} = f([X]) \end{aligned}$$

Ebben az esetben gyorsan kiszámolhatóak a fix $[X]$ -ek, sőt minden nemnegatív $[X]$ -hez automatikusan nemnegatív $[Y]$ fog tartozni: $c[X]$. Az előjelek sorozata fokszám szerint: $- + - +$, három előjelváltás van, így a pozitív gyökök száma multiplicitással számolva 3 vagy 1. Azt kaptuk, hogy ebben a speciális esetben van legalább egy stacionárius pont.

Elégséges feltétel a stabilitásra. Stacionárius pontra $f([X]_0) = 0$. Ez a pont stabil akkor és csak akkor, ha f deriváltja $[X]_0$ -ban negatív. A deriváltfüggvény főgyűjtthatója negatív, másodfokú polinom, ezért biztosan fennáll a stabilitás, ha a deriváltpolinomnak egyáltalán nincs valós zérushelye, diszkriminánsa negatív. Azaz: $0 > 4k_1^2[A]^2 - 12l_1k_3c$, $c > \frac{k_1^2[A]^2}{3l_1k_3}$. Tehát c elegendően nagyra választásával biztosíthatjuk a stabilitást.

Speciális egyenlet $l_1 = 0$, $M = 1$, $K = 1$ mellett. Tegyük fel, hogy $l_1 = 0$, továbbá $M = 1$, $K = 1$. Az utóbbiak elérhetőek, ha képesek vagyunk $[A]$, $[B]$ szabályozására, mert pontosan egy feltételt kapunk mindkét koncentrációra. Egyenleteinkben csak egy paraméter marad, L . Stacionárius pontok éppen a következő egyenleteket egyszerre kielégítő koordinátájú pontok.

$$(18) \quad \begin{aligned} 0 &= x^2 - Lxy + y^2 \\ 0 &= Lxy + 1 - y - y^2 \end{aligned}$$

A két egyenlet összegéből $y = x^2 + 1$. Behelyettesítve (35)-be és rendezve kapjuk:

$$0 = x^4 - Lx^3 + 3x^2 - Lx + 1.$$

Az egyenlet negyedfokú, de szimmetrikus, ezért könnyen előállíthatók a gyökei. Ezekről azután már csak a megengedettséget kell leellenőrizni. Legyen

$$i_1 = \frac{L + \sqrt{L^2 - 4}}{2}, \quad i_2 = \frac{L - \sqrt{L^2 - 4}}{2}.$$

Ekkor $x_{1,2} = \frac{i_1 \pm \sqrt{i_1^2 - 4}}{2}$, $x_{3,4} = \frac{i_2 \pm \sqrt{i_2^2 - 4}}{2}$ Megfigyelés: $L < 2$ esetén nincs stacionárius pont.

5. Összegzés

Azt találtuk, hogy egyetlen esettől eltekintve a vizsgált rendszerek nem explozívak. Bizonyos feltételek mellett többet, globálisan aszimptotikusan stabil stacionárius pontok létezését sikerült kimutatni. Bemutattuk még, hogy hogyan lehet a T görbe segítségével elégséges feltételt adni Hopf-bifurkációra. Sejthető, hogy Hopf-bifurkáció más esetekben is kimutatható, mint itt sikerült. Konkrét előfordulásoknál további számításokra van szükség, ha valamelyik olyan esetről van szó, ahol nem sikerült explicit képlettel megadott eredményt találni.

Köszönetnyilvánítás. A szerző köszönetét fejezi ki Simon Péternek és Tóth Jánosnak a cikk írása közben nyújtott értékes segítségükért.

Hivatkozások

- [1] Dancsó, A., Farkas, H., Farkas, M. and Szabó, Gy., Investigations on a class of generalized Lotka–Volterra schemes, *Acta Appl. Math.* **23** (1991) 103–127.
- [2] Farkas H., Györgyi L., Póta Gy., Tóth J., „Az egzotikus kinetikai rendszerek matematikájának alapjai”, in: *Nemlineáris dinamika és egzotikus kinetikai jelenségek kémiai rendszerekben* Szerk: Bazsa György (egyetemi jegyzet, Debrecen–Budapest–Gödöllő) (1992), 13–116.
- [3] Fried Ervin, *Klasszikus és lineáris algebra* (Tankönyvkiadó, Budapest, 1977).
- [4] Gray, P. and Scott, S. K., Autocatalysis in isothermal, open systems, *J. Phys. Chem* **87** (1983), 1835.
- [5] Horn, F., Stability and complex balancing in mass-action systems with three short complexes, *Proc. Roy. Soc. London, Ser. A* (1973), 331–342.
- [6] Perko, Lawrence, *Differential Equations and Dynamical Systems* (Springer, New York, 1991).
- [7] Simon, Péter, The reversible LVA model, *Journal of Mathematical Chemistry* **9** (1992), 307–322.
- [8] Tallós Péter, *Dinamikai rendszerek alapjai* (Aula Kiadó, Budapest, 1999).

(Beérkezett: 2001. február 5.)

EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM
ALKALMAZOTT ANALÍZIS TANSZÉK
molt@cs.elte.hu

LOTKA–VOLTERRA-AUTOCATALATOR (LVA) WITH IRREVERSIBLE REACTION STEPS

TAMÁS MOLNÁR

In the article a chemical process is examined, that is similar to the reversible LVA model, but where one of the possible reaction steps is forbidden. The aim is to find the stationary points and to analyse the global behaviour of the system. In two subcases the occurrence of Hopf-bifurcation is shown using the parametrical representation method.

KIJELÖLT PONTPÁROKON ALAPULÓ KÉPREGISZTRÁCIÓS MÓDSZEREK

TANÁCS ATTILA

Szeged

A képregisztráció a digitális képfeldolgozás egyik alapfeladata. Célja kettő, egy-mástól függetlenül felvett kép geometriai viszonyának a meghatározása, vagyis annak a geometriai transzformációnak a megkeresése, melynek alkalmazása a két képet a „leg-jobban” fedésbe hozza egymással. A regisztrációs probléma megoldására 2- vagy 3-dimenziós képek esetén egyszerű, gyors, és jól használható megoldást biztosítanak a kijelölt pontpárokon alapuló módszerek, ahol a regisztrációt a két képen megadott azonos számú, egymásnak megfelelően párokba rendezett pontok ismeretében számítjuk ki. Jelen cikkben röviden áttekintjük a regisztrációs technikák legfontosabb jellemzőit, majd részletesen ismertetjük az általunk kidolgozott, illetve a szakirodalomból ismert, elsősorban az orvosi képek regisztrációjához használt, de számos további területen is hatékonyan alkalmazható, a kijelölt pontpárokon alapuló módszereket. A módszerek bemutatásakor nem törekedtünk a teljességre, bizonyos transzformációtípusok esetén még további, hasonló bonyolultságú és hatékonyságú eljárásokat is javasoltak. A célunk az volt, hogy minden típusra ismertessünk legalább egy, jól használható algoritmust.

1. Bevezetés

A képfeldolgozás számos problémájának megoldásakor szükség van olyan módszerre, ami különböző nézőpontból, különböző időpontban, vagy különböző képalakító berendezésekkel készült képeket egymással fedésbe hoz. Három egymásra épülő feladatot különböztethetünk meg. *Képregisztrációnak* (*image registration*) nevezzük a *bázis-* vagy *referenciakép* és az *illesztendő kép* közötti legjobb fedést biztosító geometriai transzformáció meghatározását. A *képillesztés* (*image matching*) feladata a regisztráció során megtalált transzformáció alkalmazása az illesztendő képen, vagyis az *illesztett kép* előállítására. A *képfúzió* (*image fusion*) alkalmazásával pedig a referencia- és az illesztett képből egy új képet állítunk elő, amelyen a két kép eltérései, illetve az egymást kiegészítő képtartalmak együttesen vizsgálhatóak. Mint látható, az illesztés feltételezi a regisztrációt, a képfúzió pedig a regisztrációt és az il-

lesztés előzetes végrehajtását. Jelen cikkben csak az első lépéssel, a regisztrációval foglalkozunk.

A regisztrációs, képfúziós technikák egyik legfontosabb alkalmazási területe az orvosi képfeldolgozás. A különböző időpontokban készített felvételek illesztésével lehetőség van pl. egy daganat változásának megfigyelésére, a különböző képalkotó berendezések képeinek fúziójával pedig pl. az anatómiai és a funkcionális képek együttes megjelenítése pontosabb diagnosztikai információt biztosít, illetve segíti a műtét és a terápia tervezését. Több alapos áttekintő cikk is megjelent erről a területről [12, 14, 16]. Regisztrációs módszerek fontosak még a légi- és műholdfelvételek feldolgozásakor, illetve a számítógépes látás egyes feladataiban [6].

A képek közötti különbségek három típusát különböztetjük meg. A legegyszerűbb esetben a képek között csak térbeli eltérés van, maga az objektum változatlan. A második típus esetén a felvételek készítésének körülményei változnak, pl. mások a légköri viszonyok a légifelvételek készítésekor, vagy más-más képalkotó berendezéssel készültek a képek. Az ebből fakadó különbségeket általában nehéz modellezni. A harmadik típus a legbonyolultabb, ekkor ugyanis maga a vizsgált objektum változik meg (pl. daganat eltávolítása előtt és után készültek a felvételek). Ebben az esetben éppen ezen változások detektálása, megfigyelése a cél, így az ebből fakadó különbségeket nem szabad eltüntetni a regisztráció során.

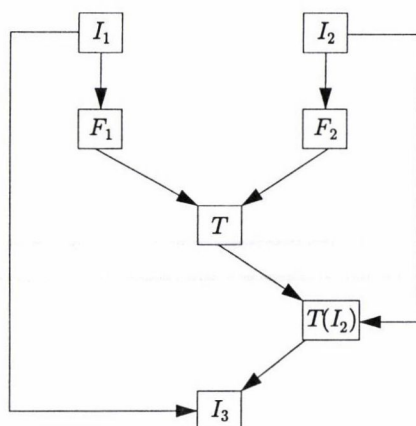
Bár minden egyes regisztrációs probléma a felsorolt típusok figyelembe vételével egyedi megközelítést igényel, minden módszer jellemezhető a következő négy komponens megválasztásával [6]:

- A *keresés tere* (*search space*) a képek illesztésére alkalmas geometriai transzformáció típusát határozza meg. A keresési tér dimenziója a keresett transzformáció szabad paramétereinek számával egyezik meg, ebben a térben kell az optimális pontot megkeresni. A leggyakrabban alkalmazott transzformációk a merev-test, az affin, a projektív, a polinomiális, illetve a nemlineáris transzformációk. Az egyes típusok tulajdonságaival, megadási módjaival a következő fejezetekben részletesen foglalkozunk.
- Meg kell határoznunk, hogy a megfelelő illesztést biztosító transzformáció kereséséhez milyen *képi jellemzőket* (*feature space*) használunk fel. A jellemzők alkalmas megválasztásával a feldolgozandó adatmennyiség radikálisan csökkenthető, így felgyorsítható a keresés. Ehhez természetesen szükséges az, hogy a kivont jellemzők relevánsak legyenek, vagyis jól jellemezzék az eredeti képet. A képi jellemzők lehetnek *külsők* (*extrinsic*) vagy *belső* (*intrinsic*). A külső jellemzők mesterségesen kerülnek a képre, kifejezetten a regisztráció elősegítésére (ilyenek pl. orvosi képeken a csontba fűrt, vagy bőrön rögzített markerek). A belső képjellemzőket ezzel szemben magából a képtartalomról származtatjuk (pl. pontok, határvonalak, felszínek, objektumok, vagy akár maga a teljes kép).
- A *hasonlósági mérték* (*similarity measure*) egy olyan függvény, amely tetszőleges transzformációs paraméterek esetén megadja, hogy az adott transzfor-

máció „milyen jól” illeszti a képeket. A regisztráció feladata ennek a függvénynek az optimalizálása. Kivont geometriai képjellemzők esetén (pontok, határvonalak, felszínek) a legkisebb négyzetes illesztés a leggyakoribb. A képpontok intenzitásértékén alapuló mértékek, mint pl. a kereszt-korreláció, az intenzitáskülönbségek négyzetösszege, vagy a kölcsönös információtartalom is széles körben használtak.

- A *keresési stratégia* azt határozza meg, hogy a hasonlósági mértéket milyen módszerrel optimalizáljuk. Kivont geometriai jellemzők esetén az optimális transzformáció gyakran direkt módszerrel megkapható. Bonyolultabb esetekben pl. iterációs módszerek, dinamikus programozási technikák, illetve ún. „durvától a finomig” többfelbontású kereső módszerek alkalmazhatóak.

Az 1. ábra a regisztrációt, az illesztést és a fúziót egyaránt tartalmazó eljárás fő lépéseit mutatja be.



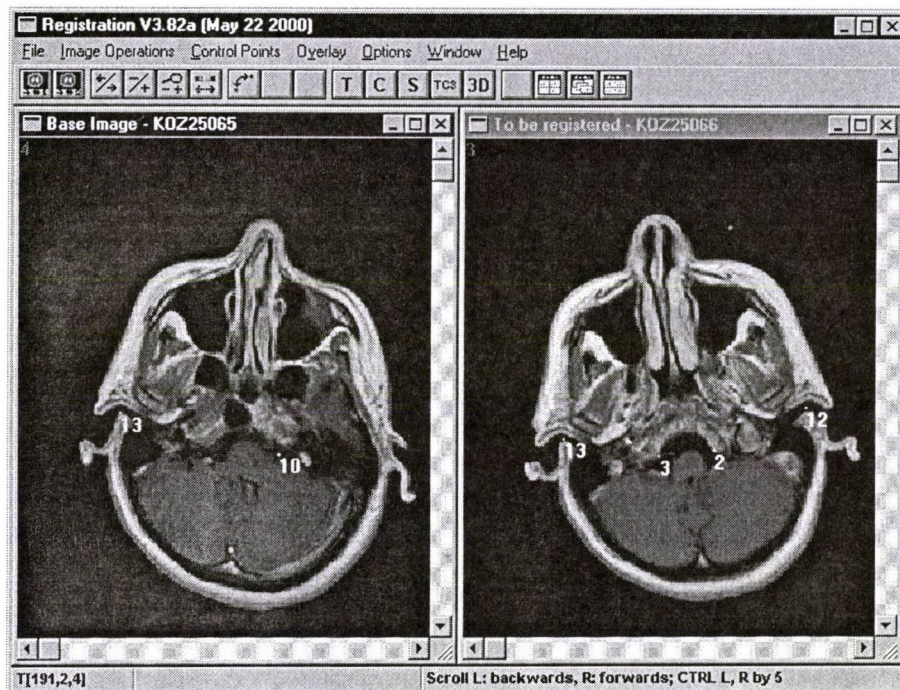
1. ábra. A képfúziós eljárás fő lépései. Az I_1 referencia- és az I_2 illesztendő képekből kivonjuk az F_1 és F_2 képi jellemzőket. Ezek felhasználásával kiszámítjuk a legjobb illesztést biztosító T transzformációt (regisztráció). A T geometriai transzformációt alkalmazzuk I_2 -re (képilesztés). Az illesztett képekből egy új I_3 képet állítunk elő, ahol a képek közötti eltérések, illetve az egymást kiegészítő képtartalmak vizsgálhatóak (képfúzió).

A regisztrációs probléma megoldására általános és robusztus megoldást kínálnak a kijelölt pontok, mint képi jellemzők. Egy általános pont-alapú módszer a következő három lépésből áll: először a pontokat kijelöljük, majd egyenként meghatározzuk, hogy az illesztendő képen kijelölt pontokhoz a báziskép melyik kijelölt pontja tartozik, végül az egymásnak megfelelőített pontpárok felhasználásával kiszámítjuk a legjobb illesztést biztosító transzformációt.

A pontok kiválasztása és párosítása történhet *interaktív* vagy *automatikus* módszerrel. Interaktív módszer esetén általában kevés (4–20) pontpárt jelölnek ki és párosítanak. Ekkor a szükséges lépések kényelmes végrehajtásához jó képmegje-

lenítő szoftver szükséges (2. ábra). Az automatikus kijelölő módszerek nagy számú pontot eredményeznek és ezek párosítása speciális algoritmust igényel. A leggyakrabban használt módszerek az ún. „head-hat” eljárás [20], a *hierarchikus Chamfer-illesztés* [2, 5], és az *iteratív legközelebbi pont* módszer [3].

A következő fejezetben ismertetésre kerülő pont-alapú módszerek feltételezik a pontok kijelölésének és párosításának előzetes végrehajtását.



2. ábra. A pontok hatékony kijelölése és párosítása komoly megjelenítő szoftvert igényel [26]. Az eljárás különösen 3D-ben nehéz, ahol az egyes pontpárok más-más sorszámú képszeleten jelenhetnek meg. Az ábrán fehér sorszámmal ellátott pontok jelzik a radiológus által kijelölt anatómiai pontpárokat. A sorszáмок a következő területeket jelentik: 2 és 3 az öreglyuk (foramen magnum) bal illetve jobb oldali határa, 10 a bal oldali halló-egyensúlyi ideg (vestibulocochlear nerve) hídhoz (pons) közeli pontja, 12 és 13 pedig a bal és jobb oldali külső hallójárat (acoustic meatus) alsó állkapcsi ízület (temporo-mandibular joint) mögötti része.

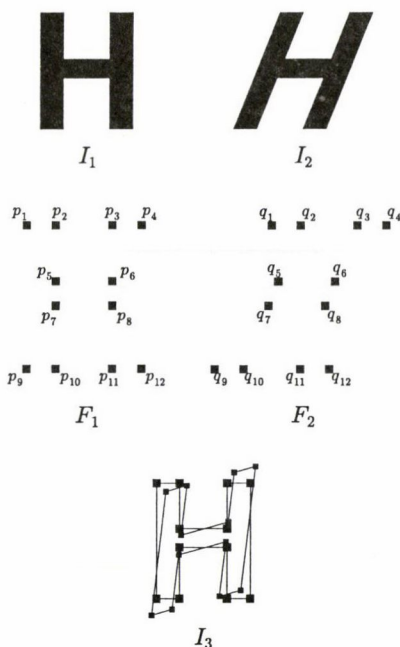
2. Pontpárokon alapuló regisztrációs módszerek

A k -dimenziós euklideszi térben az egymásnak megfeleltetett két ponthalmazt jelölje $\{p_i\}$ illetve $\{q_i\}$ ($i = 1, 2, \dots, n$), ahol $p_i = (p_{i1}, \dots, p_{ik})$ és $q_i = (q_{i1}, \dots, q_{ik})$. Ezek lesznek a *képi jellemzők*. A regisztráció feladata annak a $T : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ geomet-

riai transzformációnak a megkeresése, amely a $\{q_i\}$ ponthalmazt a $\{p_i\}$ ponthalmazba képezi le. Hacsak nem interpolációs nemlineáris transzformációt keresünk, a pontok kijelölési hibája, illetve a vizsgált objektum változása miatt általában pontos illesztés nem érhető el. Ezért az optimális T transzformációtól azt várjuk el, hogy a $\{q_i\}$ pontok képei és az azoknak megfelelő $\{p_i\}$ pontok távolságainak négyzetösszege minimális legyen, vagyis hogy a

$$\psi(T) = \sum_{i=1}^n \|T(q_i) - p_i\|^2$$

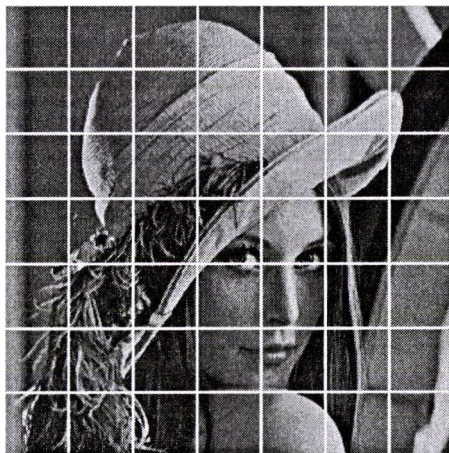
hibafüggvény (a *hasonlósági mérték*) legyen minimális (3. ábra). A következő alfejezetekben a leggyakrabban használt transzformáció típusokat (*keresési tereket*), azok tulajdonságait, megadási módjait, és az általunk ismert keresési stratégiákat mutatjuk be és hasonlítjuk össze.



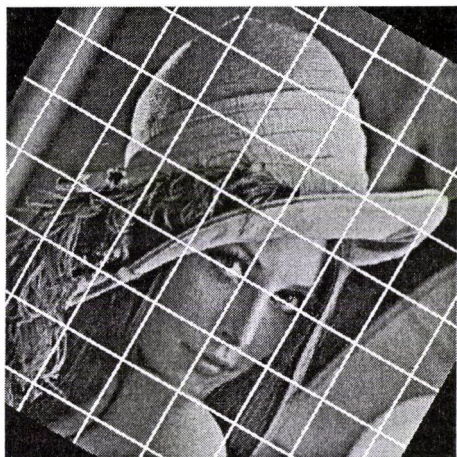
3. ábra. Az I_1 referenciaképből és a belőle nyírással (affin transzformáció) előállított I_2 illesztendő képből kivontuk a sarokpontokat, mint képi jellemzőket (F_1), (F_2). A nyírás miatt egyetlen merev-test transzformáció sem tudja a $\{q_i\}$ pontokat pontosan a $\{p_i\}$ pontokba leképezni. A legkisebb négyzetes értelemben optimális megoldásként kapott illesztett kép és a báziskép fúziója az I_3 képen látható (az egyes pontok könnyebb azonosítása végett csak az objektumok határvonalait ábrázoltuk).

2.1. Merev-test és hasonlósági transzformáció keresése

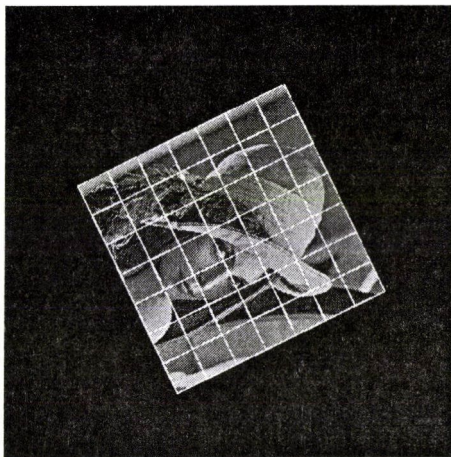
A merev-test transzformáció az egyik leggyakrabban használt transzformáció típus, amely az elforgatást és az eltolást foglalja magában, vagyis távolság-, párhuzamosság- és szögtartó. A hasonlósági transzformáció ezt bővíti ki úgy, hogy a koordinátatengelyek menti azonos mértékű skálázást is megengedi, így a párhuzamosságot és a szöget megtartja, de a távolságot nem (4. ábra).



(a)



(b)



(c)

4. ábra. Az egyes transzformációtípusok hatása. Az eredeti kép (a), és a rajta végrehajtott merev-test (b) és hasonlósági (c) transzformációk eredménye.

A transzformáció forgatási részének megadására több lehetőség is van. A leggyakrabban használtakat (ortonormált mátrixok, egység kvaternió, Euler-féle szögek) az egyes kereső eljárásoknál ismertetjük.

Merev-test transzformációt használnak pl. az orvosi képfeldolgozásban az agyról készült képek regisztrációjára. A hasonlósági transzformáció pedig pl. a fényképek esetén hasznos, ahol az objektum mérete és a kamerától való távolsága között közvetlen kapcsolat van.

2.1.1. Szinguláris érték szerinti felbontás A merev-test transzformáció meghatározásának ezt a módját Arun és munkatársai publikálták [1], később Umeyama terjesztette ki hasonlósági transzformáció keresésére [28]. A két módszer nagyon hasonló, ezért együtt tárgyaljuk őket.

A transzformációt a következő alakban keressük:

$$\psi = \sum_{i=1}^n \|p_i - (s \cdot R \cdot q_i + T)\|^2,$$

ahol R egy $m \times m$ méretű forgató mátrix (vagyis eleget tesz az $R \cdot R^T = I_m$ és a $\det(R) = 1$ feltételeknek, ahol I_m az $m \times m$ méretű egység mátrix), T egy m -elemű vektor, ami az eltolást adja meg, s pedig a (minden tengely mentén egyforma) skálázási tényező. Ha merev-test transzformációra van szükségünk, akkor $s = 1$. Az algoritmus a következő lépésekből áll.

Számítsuk ki a két pontthalmaz súlypontját:

$$\mu_p = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n p_i, \quad \mu_q = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n q_i,$$

és legyen

$$d_i = q_i - \mu_q, \quad d'_i = p_i - \mu_p, \quad \sigma_q^2 = \sum_{i=1}^n \|q_i - \mu_p\|^2,$$

$$H = \sum_{i=1}^n d_i \cdot d_i^T.$$

Legyen az $m \times m$ méretű H mátrix szinguláris érték szerinti felbontása $H = U \cdot D \cdot V^T$ [22], és legyen $X = V \cdot U^T$. Ha $\det(X) = 1$, akkor $\bar{R} = X$ az optimális forgató mátrix, $\bar{s} = \sigma_q^2 / \text{tr}(D)$ pedig az optimális skálázás. Ha $\det(X) = -1$, akkor X tükrözést ad. Mivel ez utóbbi számunkra nem megfelelő, ezért ebben az esetben további vizsgálatra van szükség. Ha H szinguláris értékei közül egy 0, akkor $\bar{R} = V' \cdot U^T$, és $\bar{s} = \sigma_q^2 / \text{tr}(D')$, ahol a V' és D' mátrixokat úgy kapjuk, hogy a V és D mátrixok utolsó oszlopbeli elemei előjelét megfordítjuk. Ha egyik szinguláris érték sem 0, akkor nincs megoldás.

Az optimális forgató mátrix és skálázás ismeretében az optimális \bar{T} eltolási vektor megkapható $\bar{T} = \mu_p - \bar{s} \cdot \bar{R} \cdot \mu_q$ alakban.

2.1.2. Egység kvaternió használata Az egység kvaternió használatát 3D merev-test transzformáció keresésére Horn vezette be [11]. Egység kvaterniónak egy $\vec{u}_R = (u_0, u_1, u_2, u_3)^T$ vektort nevezünk, ahol $u_0 \geq 0$ és $u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 1$. A vektor elemei a következő 3×3 méretű forgató mátrixot határozzák meg:

$$R(\vec{u}_R) = \begin{pmatrix} u_0^2 + u_1^2 - u_2^2 - u_3^2 & 2 \cdot (u_1 \cdot u_2 - u_0 \cdot u_3) & 2 \cdot (u_1 \cdot u_3 + u_0 \cdot u_2) \\ 2 \cdot (u_1 \cdot u_2 + u_0 \cdot u_3) & u_0^2 + u_2^2 - u_1^2 - u_3^2 & 2 \cdot (u_2 \cdot u_3 - u_0 \cdot u_1) \\ 2 \cdot (u_1 \cdot u_3 - u_0 \cdot u_2) & 2 \cdot (u_2 \cdot u_3 + u_0 \cdot u_1) & u_0^2 + u_3^2 - u_1^2 - u_2^2 \end{pmatrix}.$$

Jelölje $\vec{u}_t = (u_4, u_5, u_6)^T$ az eltolási vektort. A minimalizálandó függvény ekkor:

$$\psi = \sum_{i=1}^n \|p_i - (R(\vec{u}_R) \cdot q_i + \vec{u}_t)\|^2.$$

Számítsuk ki a két pontthalmaz súlypontját:

$$\mu_p = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n p_i, \quad \mu_q = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n q_i,$$

és legyen

$$\Sigma_{pq} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [(q_i - \mu_q) \cdot (p_i - \mu_p)^T]$$

a két pontthalmaz kereszt-kovariancia mátrixa. Legyen $\Delta = (A_{23}, A_{31}, A_{12})^T$, ahol $A_{ij} = (\Sigma_{pq} - \Sigma_{pq}^T)_{ij}$, és legyen

$$Q(\Sigma_{pq}) = \begin{pmatrix} \text{tr}(\Sigma_{pq}) & \Delta^T \\ \Delta & \Sigma_{pq} + \Sigma_{pq}^T - \text{tr}(\Sigma_{pq}) \cdot I_3 \end{pmatrix},$$

ahol I_3 a 3×3 méretű egységmátrix. A $Q(\Sigma_{pq})$ mátrix legnagyobb sajátértékéhez tartozó sajátvektort válasszuk az optimális elforgatást megadó \vec{u}_R vektornak. Ezt felhasználva az optimális eltolás megkapható

$$\vec{u}_t = \mu_p - R(\vec{u}_R) \cdot \mu_q$$

alakban.

2.1.3. Levenberg–Marquardt nemlineáris iteratív minimalizálás A hasonlósági transzformáció hét paraméterét jelölje $r_x, r_y, r_z, d_x, d_y, d_z$ és s (a három tengely körüli elforgatások és eltolások, valamint a skálázás). Ezek segítségével a transzformáció a következőképpen írható fel:

$$\begin{pmatrix} \bar{p}_{i1} \\ \bar{p}_{i2} \\ \bar{p}_{i3} \end{pmatrix} = s \cdot \mathcal{R}_z(r_z) \cdot \mathcal{R}_y(r_y) \cdot \mathcal{R}_x(r_x) \cdot \begin{pmatrix} q_{i1} \\ q_{i2} \\ q_{i3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_x \\ d_y \\ d_z \end{pmatrix},$$

ahol $\mathcal{R}_x(r_x)$, $\mathcal{R}_y(r_y)$ és $\mathcal{R}_z(r_z)$ a megfelelő tengely körüli elforgatást leíró 3×3 méretű mátrixok [9]. Ha merev-test transzformációra van szükségünk, akkor legyen $s = 1$, és elegendő a többi hat paramétert keresnünk.

A fenti egyenlet részletesebben kifejtve:

$$\begin{aligned}\bar{p}_{i1} &= q_{i1} \cdot s \cdot \cos r_y \cdot \cos r_z + q_{i2} \cdot s \cdot (\sin r_x \cdot \sin r_y \cdot \cos r_z + \cos r_x \cdot \sin r_z) + \\ &\quad + q_{i3} \cdot s \cdot (-\cos r_x \cdot \sin r_y \cdot \cos r_z + \sin r_x \cdot \sin r_z) + d_x \\ \bar{p}_{i2} &= -q_{i1} \cdot s \cdot \cos r_y \cdot \sin r_z + q_{i2} \cdot s \cdot (-\sin r_x \cdot \sin r_y \cdot \sin r_z + \cos r_x \cdot \cos r_z) + \\ &\quad + q_{i3} \cdot s \cdot (\cos r_x \cdot \sin r_y \cdot \sin r_z + \sin r_x \cdot \cos r_z) + d_y \\ \bar{p}_{i3} &= q_i^{(1)} \cdot s \cdot \sin r_y - q_{i2} \cdot s \cdot \sin r_x \cos r_y + q_{i3} \cdot s \cdot \cos r_x \cos r_y + d_z.\end{aligned}$$

A transzformáció hibája:

$$\psi = \sum_{i=1}^n (e_{i1}^2 + e_{i2}^2 + e_{i3}^2),$$

ahol $e_{i1} = p_{i1} - \bar{p}_{i1}$, $e_{i2} = p_{i2} - \bar{p}_{i2}$, $e_{i3} = p_{i3} - \bar{p}_{i3}$.

A ψ hibafüggvény $\mathcal{T} = (r_x, r_y, r_z, d_x, d_y, d_z, s) = (t_1, \dots, t_7)$ paraméterek szerinti minimalizálására a Levenberg–Marquardt nemlineáris iteratív módszer egy változatát használjuk. Ehhez szükséges a $\mathcal{G} = (g_1, \dots, g_7)$ gradiens vektor és az $\mathcal{A} = [a_{kl}]$ 7×7 méretű közelítő Hesse-féle mátrix kiszámítása, ahol a másodrendű derivált tagokat elhagyjuk [22]:

$$\begin{aligned}g_k &= \frac{\partial \psi}{\partial t_k} = -2 \sum_{i=1}^n \left[e_{i1} \left(\frac{\partial \bar{p}_{i1}}{\partial t_k} \right) + e_{i2} \left(\frac{\partial \bar{p}_{i2}}{\partial t_k} \right) + e_{i3} \left(\frac{\partial \bar{p}_{i3}}{\partial t_k} \right) \right], \\ a_{kl} &= -2 \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \bar{p}_{i1}}{\partial t_l} \frac{\partial \bar{p}_{i1}}{\partial t_k} + \frac{\partial \bar{p}_{i2}}{\partial t_l} \frac{\partial \bar{p}_{i2}}{\partial t_k} + \frac{\partial \bar{p}_{i3}}{\partial t_l} \frac{\partial \bar{p}_{i3}}{\partial t_k} \right),\end{aligned}$$

minden $1 \leq k, l \leq 7$ esetén.

A Levenberg–Marquardt algoritmus egy iterációs lépése az aktuális \mathcal{T} paraméterbecslés finomítására szolgáló $\Delta \mathcal{T}$ vektort határozza meg, ami kielégíti a következő egyenletrendszert:

$$(\mathcal{A} + \lambda \cdot \text{diag}(\mathcal{A})) \cdot \Delta \mathcal{T} = -\mathcal{G},$$

ahol λ egy stabilizációs tényező, amelynek értéke minden lépés után megváltozik. A kezdeti paraméterbecslés az identikus transzformáció $\mathcal{T} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1)$. Az iteráció véget ér a kívánt pontosság elérésekor vagy adott számú iterációs lépés végrehajtása után.

2.1.4. Merev-test transzformációt kereső eljárások tulajdonságai A gyakorlatban az egyik legnépszerűbb módszer a szinguláris érték szerinti felbontáson alapuló. Gyors, stabil, és tetszőleges dimenzió esetén használható. Egyetlen hátránya, hogy a tükrözés kikerüléséhez külön vizsgálatra van szükség. Az egység kvaternión alapuló módszer szintén gyors és stabil, sőt az eredmény mindig egy valós merev-test transzformáció lesz, nem igényel külön vizsgálatot. Jelen formájában viszont csak 3D-ben használható. A Levenberg–Marquardt iteratív minimalizáláson alapuló módszer már nem annyira megbízható, mint az előzőek. Egyrészt – a módszer jellegéből adódóan – a keresés lokális optimumban is megakadhat, másrészt a kerekítési hibák összegződnek. A keresés időigénye is nagyobb és kiterjesztése tetszőleges dimenzióra nehézkes. Ennek ellenére a gyakorlatban is alkalmaznak iterációs módszert [19].

2.2. Affin transzformáció keresése

Az affin transzformáció a merev-test, illetve a hasonlósági transzformációnál általánosabb lineáris transzformáció, amely az elforgatás és az eltolás mellett magában foglalja az egyes tengelyek menti különböző mértékű skálázást és nyírást. Egyesenes képe egyenes lesz, a párhuzamosságot megtartja, de nem szögtartó (5. ábra).

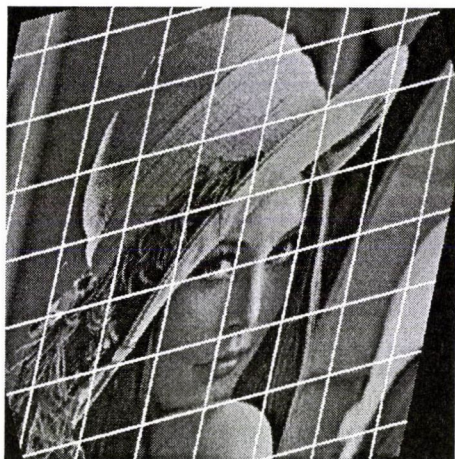
Affin transzformációra van szükség, pl. ha légifelvételeket különböző nézőpontokból készítünk, vagy ha a képalkotó berendezés nyíró torzítással, mint leképezési hibával rendelkezik (pl. CT illetve MR orvosi képalkotó berendezések bizonyos körülmények között) [16]. Két lehetséges kereső eljárást mutatunk be és hasonlítunk össze [26].

2.2.1. Normálegyenletek megoldása Minden $T : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ affin transzformáció megadható egy

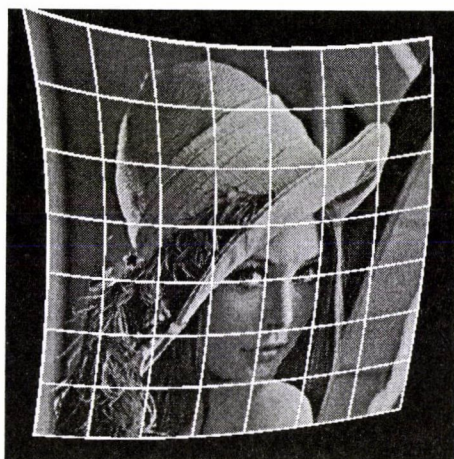
$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1k} & t_{1,k+1} \\ t_{21} & t_{22} & \cdots & t_{2k} & t_{2,k+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ t_{k1} & t_{k2} & \cdots & t_{kk} & t_{k,k+1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

valós mátrixszal. Tetszőleges $x = (x_1, \dots, x_k)$ és $y = (y_1, \dots, y_k) \in \mathbb{R}^k$ esetén $y = T(x)$ akkor és csakis akkor, ha

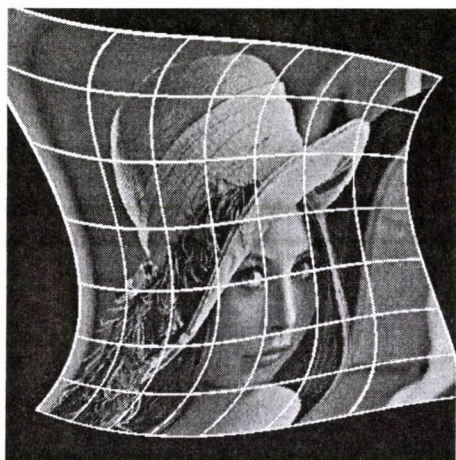
$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_k \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1k} & t_{1,k+1} \\ t_{21} & t_{22} & \cdots & t_{2k} & t_{2,k+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ t_{k1} & t_{k2} & \cdots & t_{kk} & t_{k,k+1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \\ 1 \end{pmatrix}.$$



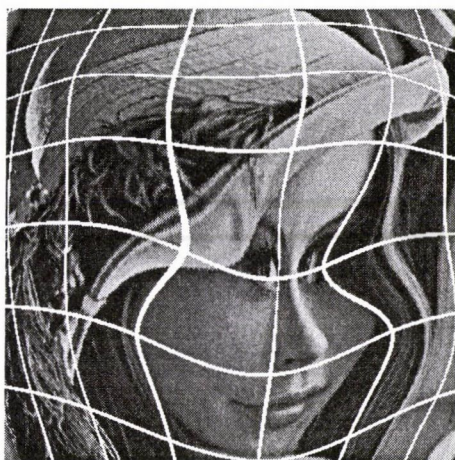
(d)



(e)



(f)



(g)

5. ábra. Az egyes transzformációtípusok hatása (folytatás). Az eredeti képen végrehajtott affin (d), másodfokú (e) és harmadfokú (f) polinom, valamint egy thin-plate spline (g) transzformáció eredménye.

Megjegyezzük, hogy ehhez a pontok homogén koordinátás reprezentációjára van szükség [9]. A transzformáció paramétereinek száma $k \cdot (k + 1)$ a mátrix nem konstans elemeinek megfelelően.

Legyenek $\{p_i\}$ és $\{q_i\}$ az előzőekben definiált pontthalmazok, a $\{p'_i\}$ pontthalmaz pedig $\{q_i\}$ T transzformáció melletti képe, vagyis $p'_i = T(q_i)$ ($i = 1, 2, \dots, n$). Elvárásunk az, hogy olyan T transzformációt találjunk, amely a $\{q_i\}$ pontokat pontosan $\{p_i\}$ -be viszi, azaz $p'_i = p_i = T(q_i)$ ($i = 1, 2, \dots, n$). Így egy $k \cdot n$ egyenletből álló, $\underline{b} = A \cdot \underline{t}$ alakú lineáris egyenletrendszert kapunk, ahol az ismeretlenek száma

$k \cdot (k + 1)$. Látható, hogy az egyértelmű megoldás szükséges (de nem elegendő) feltétele, hogy legalább $k + 1$ pontpár legyen. Ennél több pontpár esetén pedig az egyenletrendszer túlhatározott lesz, amelynek általános esetben nincs megoldása. A legkisebb négyzetes értelemben optimális megoldás az lesz, amely minimalizálja a $\underline{b} - A \cdot \underline{t}$ vektor euklideszi normáját:

$$\begin{aligned}\psi(t_{11}, \dots, t_{k,k+1}) &= \sum_{i=1}^n \|p'_i - p_i\|^2 = \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k (t_{j1} \cdot q_{i1} + \dots + t_{jk} \cdot q_{ik} + t_{j,k+1} - p_{ij})^2.\end{aligned}$$

A ψ ott veheti fel a minimumát, ahol a $\frac{\partial \psi}{\partial t_{11}}, \dots, \frac{\partial \psi}{\partial t_{k,k+1}}$ parciális deriváltak mindegyike egyenlő nullával:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \psi}{\partial t_{uv}} &= 2 \cdot \sum_{i=1}^n q_{iv} \cdot (t_{u,k+1} - p_{iu} + \sum_{l=1}^k t_{ul} \cdot q_{il}) = 0 \\ (u &= 1, 2, \dots, k, v = 1, 2, \dots, k), \\ \frac{\partial \psi}{\partial t_{u,k+1}} &= 2 \cdot \sum_{i=1}^n (t_{u,k+1} - p_{iu} + \sum_{l=1}^k t_{ul} \cdot q_{il}) = 0 \\ (u &= 1, 2, \dots, k).\end{aligned}$$

Így a következő $k \cdot (k + 1)$ elemű egyenletrendszert kapjuk:

$$\begin{pmatrix}
 a_{11} & \dots & a_{1k} & b_1 \\
 \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
 a_{k1} & \dots & a_{kk} & b_k \\
 b_1 & \dots & b_k & n \\
 & & & \\
 & & a_{11} & \dots & a_{1k} & b_1 \\
 & & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
 & & a_{k1} & \dots & a_{kk} & b_k \\
 & & b_1 & \dots & b_k & n \\
 & & & & & \\
 & & & & \ddots & \\
 & & & & & \\
 & & & & & a_{11} & \dots & a_{1k} & b_1 \\
 & & & & & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
 & & & & & a_{k1} & \dots & a_{kk} & b_k \\
 & & & & & b_1 & \dots & b_k & n
 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t_{11} \\ \vdots \\ t_{1k} \\ t_{1,k+1} \\ t_{21} \\ \vdots \\ t_{2k} \\ t_{2,k+1} \\ \vdots \\ t_{k1} \\ \vdots \\ t_{kk} \\ t_{k,k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} \\ \vdots \\ c_{1k} \\ d_1 \\ c_{21} \\ \vdots \\ c_{2k} \\ d_2 \\ \vdots \\ c_{k1} \\ \vdots \\ c_{kk} \\ d_k \end{pmatrix},$$

ahol

$$\begin{aligned}
 a_{uv} &= a_{vu} = \sum_{i=1}^n q_{iu} \cdot q_{iv}, \\
 b_u &= \sum_{i=1}^n q_{iu}, \\
 c_{uv} &= \sum_{i=1}^n p_{iu} \cdot q_{iv}, \\
 d_u &= \sum_{i=1}^n p_{iu} \\
 (u &= 1, 2, \dots, k, v = 1, 2, \dots, k).
 \end{aligned}$$

Megjegyezzük, hogy ez a módszer ekvivalens az $A^T \cdot A \cdot \underline{t} = A^T \cdot \underline{b}$ ún. *normál-egyenletek* megoldásával. A megoldás akkor és csak akkor létezik egyértelműen, ha $\det(M) \neq 0$, ahol

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} & b_k \\ b_1 & \dots & b_k & n \end{pmatrix},$$

ami ekvivalens azzal, hogy a q_i pontok nem esnek ugyanazon $(k-1)$ -dimenziós hipersíkra. A bizonyítást a következő alfejezetben adjuk meg.

2.2.2. Szinguláris érték szerinti felbontás Az előzőekben láttuk, hogy a legkisebb négyzetes megoldást megkaphatjuk az

$$(1) \quad A^T \cdot A \cdot \underline{t} = A^T \cdot \underline{b}$$

normálegyenletek megoldásával. Az egyenletrendszer eliminációs módszerrel történő megoldása helyett vegyük A szinguláris érték szerinti felbontását ($A = U \cdot D \cdot V^T$) [22], és helyettesítsük be (1)-be:

$$V \cdot D \cdot U^T \cdot U \cdot D \cdot V^T \cdot \underline{t} = V \cdot D \cdot U^T \cdot \underline{b}.$$

A szinguláris érték szerinti felbontás tulajdonságai miatt

$$U^T \cdot U = V^T \cdot V = V \cdot V^T = I_{k \cdot (k+1)},$$

így

$$D^2 \cdot V^T \cdot \underline{t} = D \cdot U^T \cdot \underline{b},$$

vagyis

$$\underline{t} = V \cdot D^{-1} \cdot U^T \cdot \underline{b} = V \cdot D^+ \cdot U^T \cdot \underline{b} = A^+ \cdot \underline{b},$$

ahol $D^+ = (\sigma_1^+, \dots, \sigma_{k \cdot (k+1)}^+)$ diagonálmátrix,

$$\sigma_i^+ = \begin{cases} 1/\sigma_i & , \text{ha } \sigma_i > 0 \\ 0 & , \text{ha } \sigma_i = 0. \end{cases}$$

Az A^+ mátrixot nevezik az A mátrix *Penrose-Moore-féle pszeudo inverz mátrixának* is.

Bizonyítható, hogy ha $\text{rang}(A) = k \cdot (k+1)$, akkor az így kapott \underline{t} a feladat egyetlen megoldása, míg ha $\text{rang}(A) < k \cdot (k+1)$, akkor bár a feladat nem oldható meg egyértelműen, de \underline{t} lesz a legkisebb normájú megoldás [21].

A kérdés tehát az, hogy az egyértelmű megoldáshoz szükséges $\text{rang}(A) = k \cdot (k+1)$ feltétel mikor teljesül? Látható, hogy akkor, ha az A mátrix $k \cdot n$ darab sorvektora közül ki tudunk választani $k \cdot (k+1)$ darabot úgy, hogy azok lineárisan független vektorrendszert alkossanak. Ez viszont akkor és csakis akkor tehető meg, ha az n darab q_i pont közül ki tudunk választani $k+1$ darabot úgy, hogy azok lineárisan függetlenek legyenek, vagyis egyik sem legyen előállítható a többi k kiválasztott pont lineáris kombinációjaként. Ez pedig ekvivalens azzal, hogy ezek a pontok nem esnek ugyanazon $k-1$ dimenziós hipersíkra. Ezt az állítást más módszerrel is bizonyítottuk [25].

2.2.3. Affin transzformációt kereső módszerek összehasonlítása A normálegyenletek eliminációs módszerrel történő megoldása egyszerű és gyors. Tetszőleges számú pontpár esetén is k darab $k+1$ egyenletből álló egyenletrendszert kell megoldani. Hátránya viszont, hogy szinguláris esetben nem oldható meg, szingulárisához közeli esetben pedig megoldása numerikusan instabillá válhat. A szinguláris érték szerinti felbontáson alapuló módszer még szinguláris esetben is stabil, viszont a pontpárok számának növelésével a felbontandó mátrix mérete lineárisan nő.

Orvosi képek regisztrációja esetén a pontpárok száma viszonylag kevés (4–20), és könnyen biztosítható, hogy a megoldandó feladat ne legyen szinguláris, így ilyen célra bármelyik megközelítés jól használható.

2.3. Projektív transzformáció

A projektív transzformáció a legáltalánosabb lineáris transzformáció. Egyenes képe egyenes lesz, de sem a távolságot, sem a szöget, sem a párhuzamosságot nem tartja. 2D vetületi képek 3D képekhez történő regisztrációjakor használják.

Tetszőleges k -dimenzióban megadható egy

$$\mathcal{T} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1k} & t_{1,k+1} \\ t_{21} & t_{22} & \cdots & t_{2k} & t_{2,k+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ t_{k1} & t_{k2} & \cdots & t_{kk} & t_{k,k+1} \\ t_{k+1,1} & t_{k+1,2} & \cdots & t_{k+1,k} & t_{k+1,k+1} \end{pmatrix}$$

valós mátrixszal. A transzformáció számításakor a pontok homogén koordinátás reprezentációjára van szükség [9]. Egy $u = (u_1, \dots, u_k)$ pont képe $v = (v_1, \dots, v_k)$ lesz a következő módon:

$$(z_1, \dots, z_k, w)^T = \mathcal{T} \cdot (u_1, \dots, u_k, 1)^T,$$

$$v_1 = \frac{z_1}{w}, \dots, v_k = \frac{z_k}{w},$$

ha $w \neq 0$. Ha $w = 0$, akkor a homogén koordinátás definíció a végtelen távoli pontot jelenti.

Bár a projektív transzformáció kétségtelenül fontos a gyakorlatban, ilyen típusú transzformációt kereső, kijelölt pontpárokon alapuló módszerrel még nem találkozunk a szakirodalomban.

2.4. Polinomiális transzformációk

Bizonyos esetekben, például ha a képalkotó berendezés globális nemlineáris torzítást végez a képen, lineáris transzformáció helyett nemlineárisra van szükség. A legegyszerűbb ilyen transzformációk az m -edfokú polinomiális transzformációk, amelyekre az a jellemző, hogy egy egyenes képe egy m -edfokú polinom által meghatározott görbe lesz [13] (5. ábra). A transzformációt a következő módon definiáljuk 2D-ben:

$$u_x = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^{m-i} a_{ij} \cdot v_x^i \cdot v_y^j$$

$$u_y = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^{m-i} b_{ij} \cdot v_x^i \cdot v_y^j$$

$$u = (u_x, u_y) \in \mathbb{R}^2, \quad v = (v_x, v_y) \in \mathbb{R}^2,$$

illetve 3D-ben:

$$u_x = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^{m-i} \sum_{k=0}^{m-i-j} a_{ijk} \cdot v_x^i \cdot v_y^j \cdot v_z^k$$

$$u_y = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^{m-i} \sum_{k=0}^{m-i-j} b_{ijk} \cdot v_x^i \cdot v_y^j \cdot v_z^k$$

$$u_z = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^{m-i} \sum_{k=0}^{m-i-j} c_{ijk} \cdot v_x^i \cdot v_y^j \cdot v_z^k$$

$$u = (u_x, u_y, u_z) \in \mathbb{R}^3, \quad v = (v_x, v_y, v_z) \in \mathbb{R}^3.$$

Látható, hogy az $m = 1$ esetben az affin transzformációt kapjuk. Gyakorlatban másod- illetve harmadfokú polinomokat használnak. Ennél nagyobb fokszám esetén a transzformáció paramétereinek meghatározása egyre számításigényesebb, és a minimálisan szükséges pontpárok $T(m)$ száma is négyzetesen nő (1. táblázat).

Az egyszerűbb felírási mód kedvéért a másodfokú 2-dimenziós eset legkisebb négyzetes megoldását adjuk meg. Az eljárás könnyen kiterjeszthető magasabb fokszámra és dimenzióra is.

Fokszám	2D	3D
1	3	4
2	6	10
3	10	20
4	15	35
m	$T(m) = \frac{(m+1) \cdot (m+2)}{2}$	$T(m) = T(m-1) + \frac{(m+1) \cdot (m+2)}{2}$

1. táblázat: Minimálisan szükséges pontpárok száma a polinom fokszámának függvényében

2.4.1. Másodfokú polinom transzformáció 2D-ben Legyenek $\{p_i\}$ és $\{q_i\}$ az előzőekben definiált ponthalmazok. Az előző alfejezetben megadott képlet kifejtve a 2-dimenziós másodfokú ($m = 2$) esetre:

$$p_{i1} = a_{00} + a_{10} \cdot q_{i1} + a_{01} \cdot q_{i2} + a_{20} \cdot q_{i1}^2 + a_{11} \cdot q_{i1} \cdot q_{i2} + a_{02} \cdot q_{i2}^2$$

$$p_{i2} = b_{00} + b_{10} \cdot q_{i1} + b_{01} \cdot q_{i2} + b_{20} \cdot q_{i1}^2 + d_{11} \cdot q_{i1} \cdot q_{i2} + b_{02} \cdot q_{i2}^2.$$

A legkisebb négyzetes megoldást a következő egyenletrendszerek megoldásával kapjuk:

$$A^T \cdot A \cdot \begin{pmatrix} a_{00} & b_{00} \\ a_{10} & b_{10} \\ a_{01} & b_{01} \\ a_{20} & b_{20} \\ a_{11} & b_{11} \\ a_{02} & b_{02} \end{pmatrix} = A^T \cdot \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \\ \vdots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} \end{pmatrix},$$

ahol

$$A = \begin{pmatrix} 1 & q_{11} & q_{12} & q_{11}^2 & q_{11} \cdot q_{12} & q_{12}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & q_{n1} & q_{n2} & q_{n1}^2 & q_{n1} \cdot q_{n2} & q_{n2}^2 \end{pmatrix}.$$

2.5. Nemlineáris transzformációk

Gyakran előfordul, hogy a képen szereplő objektumok alakja vagy egymáshoz viszonyított helyzete megváltozik. Ha ez a változás nagy, akkor az előzőekben tárgyalt globális technikák nem alkalmasak a képek pontos regisztrálására, így nemlineáris transzformációra van szükség.

Kétféle nemlineáris pont-alapú transzformáció típust különböztethetünk meg. Az *interpolációs* technikák biztosítják, hogy a két kijelölt ponthalmazt pontosan egymásba viszik, a *közelítő* technikák esetében ez nem mindig teljesül, ekkor ugyanis kényszerfeltételeket szabhatunk meg a pontkijelölés pontatlanságának ellensúlyozására (pl. szabályozhatjuk, hogy a transzformáció mennyire térhet el az affintól). Interpolációs technika pl. a következő alfejezetben ismertetésre kerülő ún. „thin-plate spline” módszer, amely egy vékony fémlemez minimális görbületi energiájának megfelelő interpolációt ad [4]. Más matematikai megközelítéssel kidolgozták a módszer közelítő változatát is [23]. A thin-plate spline tulajdonsága, hogy egy kijelölt pont pozíciójának megváltoztatása globális hatást fejt ki: a kép „távoli” részén is láthatunk emiatt változást a transzformált képen. Ennek a gyakran nem kívánatos hatásnak a kiküszöbölésére dolgozták ki a B-spline alapú transzformációt, ahol az ilyen változtatások hatása már lokális [7]. A nemlineáris transzformációk megadásához használható alapfüggvényekről összefoglaló cikket találhatunk [10].

2.5.1. Thin-plate spline transzformáció A „thin-plate spline” interpolációt Bookstein vezette be [4] (5. ábra). Tetszőleges dimenzió esetén értelmezhető, most a 3D-s változatot adjuk meg. A transzformáció $3 \cdot (n + 4)$ darab szabad paraméterét

a következő egyenletrendszer megoldásával kapjuk meg:

$$\begin{pmatrix} U(q_1 - q_1) & \dots & U(q_1 - q_n) & 1 & q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ U(q_n - q_1) & \dots & U(q_n - q_n) & 1 & q_{n1} & q_{n2} & q_{n3} \\ 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ q_{11} & \dots & q_{n1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ q_{12} & \dots & q_{n2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ q_{13} & \dots & q_{n3} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_n & \beta_n & \gamma_n \\ a & b & c \\ a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & p_{n3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

ahol az $U((r_x, r_y, r_z)) = \sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2}$ függvény az ún. biharmonikus egyenlet fundamentális megoldása 3D-ben. A paraméterek ismeretében egy $u = (u_x, u_y, u_z) \in \mathbb{R}^3$ pont képe egy $v = (v_x, v_y, v_z) \in \mathbb{R}^3$ pont lesz, ahol

$$v_x = a + a_x \cdot u_x + a_y \cdot u_y + a_z \cdot u_z + \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot U(q_i - u)$$

$$v_y = b + b_x \cdot u_x + b_y \cdot u_y + b_z \cdot u_z + \sum_{i=1}^n \beta_i \cdot U(q_i - u)$$

$$v_z = c + c_x \cdot u_x + c_y \cdot u_y + c_z \cdot u_z + \sum_{i=1}^n \gamma_i \cdot U(q_i - u).$$

Megjegyezzük, hogy ha $\alpha_i = \beta_i = \gamma_i = 0$ (minden $i = 1, 2, \dots, n$ esetén), akkor az eredmény a következő mátrix által definiált affin transzformáció lesz:

$$\begin{pmatrix} a_x & a_y & a_z & a \\ b_x & b_y & b_z & b \\ c_x & c_y & c_z & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

A 2D-s változat a 3D-s alapján könnyen felírható, csak az U függvény definíciója tér el:

$$U((r_x, r_y)) = (r_x^2 + r_y^2) \cdot \ln(r_x^2 + r_y^2).$$

Megjegyezzük, hogy a lineáris transzformációk esetében a képillesztés (vagyis a transzformáció alkalmazásának) időigénye független a pontpárok számától, ezzel szemben a thin-plate spline transzformáció esetében az időigény a pontpárok számának növelésével arányosan nő.

3. Pont-alapú módszerek további jellemzői

Felmerülhet a kérdés, hogy miért van szükség ennyiféle transzformációtípus keresésére? Nyilvánvaló, hogy egy adott szabadságfokkal rendelkező transzformáció csak a megfelelő típusú deformációkat képes korrigálni, általánosabbakat nem (pl. egy merev-test transzformáció csak az elforgatásokat és az eltolást). Viszont egy nagyobb szabadsági fokkal rendelkező transzformációnak a kisebbek speciális esetét képzik (pl. az affin transzformáció magában foglalja a merev-testet). A probléma ekkor abból származik, hogy az egymásnak megfeleltetett pontpárok kijelölése – már csak a képek digitális volta miatt is – a gyakorlatban sohasem pontos. Ezek a pontatlanságok pedig hamis deformációkhoz vezethetnek. Például ha tudjuk, hogy a két kép csak eltolásban és elforgatásban különbözik, akkor egy merev-test transzformációt kereső algoritmus eredményeként egy, az optimálishoz közeli transzformációt kapunk. Ha viszont affin transzformációt keresünk, akkor hamis nyíró és skálázó hatást is láthatunk az illesztett képen. Megállapíthatjuk tehát, hogy emiatt mindig a deformációt legjobban modellező transzformációt kell választanunk.

Egy másik fontos kérdéskör a pont-alapú módszerek pontosságára vonatkozik. Mint láttuk, az optimális transzformációt egy hibafüggvény minimalizálásával kapjuk meg, amely függvény értékei mind nemnegatívak. A kérdés az, hogyha ez a függvény nulla értéket vesz fel, akkor biztosan tökéletes az illesztés? Gyakorlati feladatoknál a válasz nemleges. A regisztráció feladata ugyanis igazából a képek, és nem a kivont képi jellemzők illesztése. A pontatlanul kivont ponthalmazok pontos illesztése pedig nem garantálja a képek pontos illesztését. Ezt a két hibafajtát tehát külön kell választanunk.

Gyakorlati problémák esetében a képek illesztésének pontosságát általában vizuálisan tudjuk megítélni. Elméleti szempontból fontos annak megállapítása, hogy a kijelölés pontosságának mértéke, illetve a kijelölt pontpárok száma hogyan befolyásolja ezt? Numerikus szimulációkkal többen is vizsgálták a merev-test [8, 15, 17, 18, 27], és az affin transzformációkat [24, 27]. Az eredmények megállapítják, hogy a képek illesztésének pontossága egyenesen arányos a pontok kijelölésének pontosságával, és adott kijelölési pontosság esetén fordítottan arányos a pontpárok számának négyzetgyökével. Adott számú pontpár és kijelölési pontosság esetén pedig egyenesen arányos a pontok által meghatározott térfogat köbgyökével [24, 27]. Ajánlott tehát minél több pontot, minél pontosabban, minél nagyobb térfogatrészből kiválasztani.

4. Összefoglalás

A cikkben összefoglaltuk a regisztrációs módszerek legfontosabb tulajdonságait, majd részletesen ismertettük az általunk kidolgozott, illetve a szakirodalomban található, kijelölt pontpárokon alapuló transzformációkereső eljárásokat.

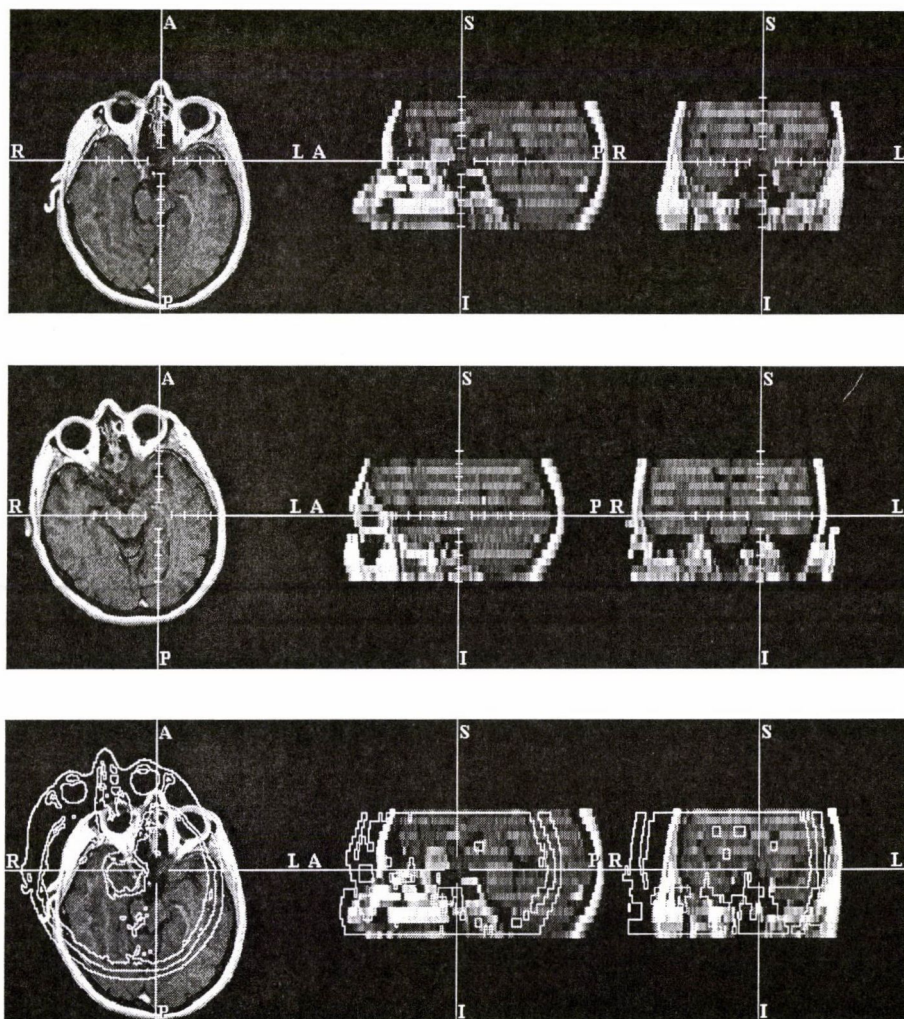
A lineáris pont-alapú módszerek megbízhatóak és jól használhatóak, amennyiben a keresendő transzformáció ténylegesen lineáris, vagy legalábbis jól közelíthető vele. A gyakorlatban általában ilyenek pl. a műhold- illetve légifelvételek, illetve az agyról készült orvosi képek, amelyek regisztrációjához néhány (4–20) pontpár kijelölése elegendő. Orvosi képek regisztrációjára mind a mai napig a külső, pl. csontba fűrt markerek segítségével meghatározott lineáris transzformációt tekintik a legpontosabbnak [29].

Amennyiben a képek közötti különbségek nemlineáris transzformáció keresését igénylik, a pont-alapú módszerek használata nehézkessé, megbízhatatlanabbá válik. Általában nagy számú pontpár kiválasztása szükséges, ráadásul a nemlineáris transzformációnak jól kell modelleznie a képen látható objektumok deformációját. Az orvosi képfeldolgozásban ilyen probléma merül fel pl. a hasi szervekről, a gerincről, illetve műtét előtt és után készült felvételek regisztrációjakor. A csontok illetve a lágy szövetek deformációs képessége jelentősen eltér, jelenleg is aktív kutatás tárgyát képezi ezek megfelelő modellezése. A jelenlegi eredmények alapján elmondható, hogy ilyen esetben a pontpárok helyett inkább kijelölt felszíneket, térfogatokat, illetve a képek intenzitásértékeit érdemes használni.

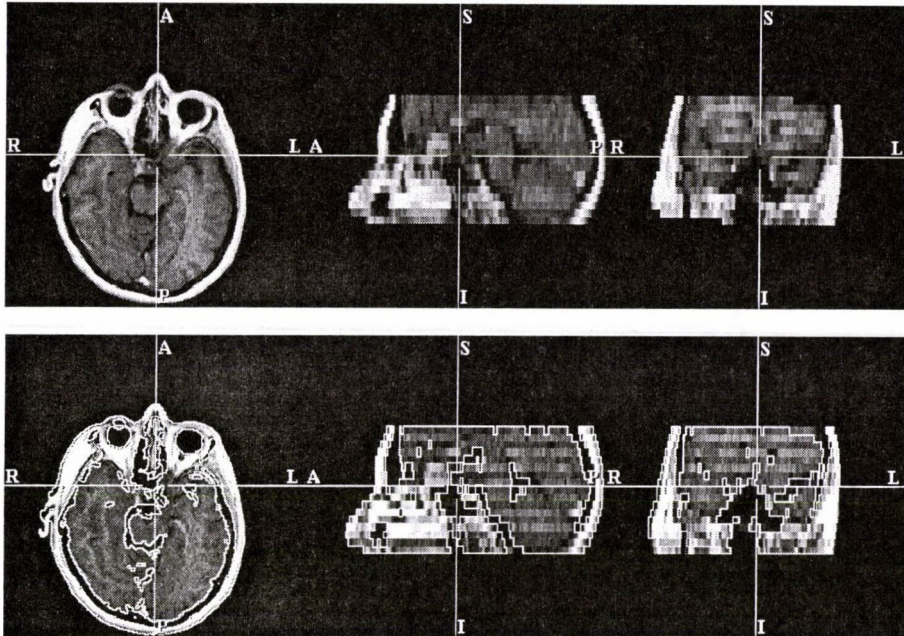
Köszönetnyilvánítás. Köszönetet mondunk dr. Csernay Lászlónak (Szegedi Tudományegyetem Orvostudományi Kar) az MRI képekért, és dr. Nagy Endrének (Szegedi Tudományegyetem Orvostudományi Kar) az anatómiai pontpárok kijelöléséért.

Munkánkat az OTKA T023804 és az FKFP 0908/1997 pályázatok támogatták.

A regisztrációs eredményt bemutató 6. és 7. ábrák a Slicer program segítségével (<http://www.slicer.org/>) készültek.



6. ábra. 3D MRI agyfelvételek regisztráció előtt. Felül a báziskép, középen az illesztendő kép, alul a báziskép és az illesztendő kép körvonalának egymásra vetítése látható a három tengely mentén elmeszve (axial, saggital, coronal).



7. ábra. A regisztráció és az azt követő illesztés eredménye. Felül az illesztett kép, alul a báziskép és az illesztett kép körvonalának egymásra vetítése látható a három tengely mentén elmetszve (axial, sagittal, coronal). A regisztrációhoz radiológus által kijelölt 13 anatómiai pontpárt és a szinguláris érték szerinti felbontáson alapuló merev-test módszert alkalmaztuk. Tapasztalatunk alapján a pontpárok kijelölése kb. 5–10 percet, a regisztráció és az illesztés végrehajtása néhány tizedmásodpercet vesz igénybe.

Irodalom

- [1] Arun, K. S., Huang, T. S. and Blostein, S. D., Least-squares fitting of two 3-D point sets, *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence* **9**, 5 (1987), 698–703.
- [2] Barrow, H. G., Tenenbaum, J. M., Bolles, R. C. and Wolf, H. C., "Parametric correspondence and chamfer matching: two new techniques for image matching", in: *Proc. 5th Int. Joint Conf. Artificial Intelligence*, vol. 14 (1992), pp. 239–256.
- [3] Besl, P. J. and McKay, N. D., A method for registration of 3d shapes, *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence* **14** (1992), 239–256.
- [4] Bookstein, F. L., Principal warps: thin-plate splines and the decomposition of deformations, *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence* **11** (1989), 567–585.
- [5] Borgfors, G., "An improved version of the chamfer matching algorithm", in: *Proceedings of the 7th International Conference on Pattern Recognition*, vol. 2 (1984), pp. 1175–1177.
- [6] Brown, L. G., A survey of image registration techniques, *ACM Computing Surveys* **24** 4 (1992), 325–376.

- [7] Declerck, J., Subsol, G., Thirion, J. P. and Ayache, N., Automatic retrieval of anatomical structures in 3d medical images, *Technical Report No. 2485, INRIA Sophia-Antipolis, France* (1995).
- [8] Fitzpatrick, J. M., West, J. B. and Maurer, C. R., Predicting error in rigid-body point-based registration. *IEEE Transaction on Medical Imaging* **17** (1998), 694–702.
- [9] Foley, J. D., van Dam, A., Feiner, S. K. and Hughes, J. F., *Computer Graphics – Principles and Practice* (Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Massachusetts, 1991).
- [10] Fornefett, M., Rohr, K. and Stiehl, H. S., “Radial basis functions with compact support for elastic registration of medical images”, in: *Proc. Int. Workshop on Biomedical Image Registration* (1999), pp. 173–185.
- [11] Horn, B. K. P., Closed-form solution of absolute orientation using unit quaternions, *J. Opt. Soc. Amer. A* **4** (1987), 629–642.
- [12] Lavallée, S., “Registration for computer-integrated surgery: methodology, state of the art”, in: *Computer-integrated surgery, Technology and clinical applications*, R. H. Taylor, S. Lavallée, G. C. Burdea and R. Mösges, eds., MIT Press, Cambridge, MA (1996), pp. 77–97.
- [13] Mahling, D. H., “Coordinate systems and map projections for gis”, in: *Geographical information systems – Principles and Applications*, D. Maguire, M. F. Goodchild and D. W. Rhind, eds., Longman Scientific and Technical (1991).
- [14] Maintz, J. B. A. and Viergever, M. A., A survey of medical image registration. *Medical Image Analysis* **2**, 1 (1998), 1–36.
- [15] Mandava, V. R., Fitzpatrick, J. M., Maurer, C. R., Maciunas, R. J. and Allen, G. S., Registration of multimodal volume head images via attached markers, *SPIE Proceedings* **1652** (1992), 271–282.
- [16] Maurer, C. R. and Fitzpatrick, J. M., “A review of medical image registration,” in: *Interactive image-guided neurosurgery*, R. J. Maciunas, ed., American Association of Neurological Surgeons (Park Ridge, IL, 1993).
- [17] Maurer, C. R., Fitzpatrick, J. M., Wang, M. Y., Galloway, R. L., Maciunas, R. J. and Allen, G. S., Registration of head volume images using implantable fiducial markers, *IEEE Transaction on Medical Imaging* **16** (1997), 447–462.
- [18] Maurer, C. R., McCrory, J. J. and Fitzpatrick, J. M., Estimation of accuracy in localizing externally attached markers in multimodal volume head images, *SPIE Proceedings* **1898** (1993), 43–54.
- [19] Menke, M., Atkins, M. S. and Buckley, K. R., A software compensation method for video-metrically detected motion during head pet scans, *IEEE Trans. Nuclear Sci.* **43**, 2 (1996), 310–317.
- [20] Pelizzari, C. A., Chen, G. T., Spelbring, D. R., Weichselbaum, R. R. and Chen, C. T., Accurate three-dimensional registration of CT, PET, and/or MR images of the brain, *Journal of Computer Assisted Tomography* **13**, 1 (1989), 20–26.
- [21] Popper, G. and Csizmás, F., *Numerikus módszerek mérnököknek* (Akadémiai Kiadó, 1993).
- [22] Press, W. H., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. T. and Flannery, B. P., *Numerical Recipes in C: The Art of Scientific Computing*, 2nd ed. (Cambridge University Press, New York, NY, 1992).
- [23] Rohr, K., Stiehl, H. S., Sprengel, R., Beil, W., Buzug, T. M., Weese, J., and Kuhn, M. H., “Point-based elastic registration of medical image data using approximating thin-plate splines”, in: *Proc. 4th Int. Conf. on Visualization in Biomedical Computing* (1996), pp. 297–306.

- [24] Tanács, A., Czédli, G., Palágyi, K. and Kuba, A., "Point-based registration assuming affine motion", in: *Proc. Int. Workshop Algebraic Frames for the Perception-Action Cycle*, AFPAC 2000, Lecture Notes in Computer Science 1888, Springer (2000), pp. 329–338.
- [25] Tanács, A., Czédli, G., Palágyi, K. and Kuba, A., "Affine matching of two sets of points in arbitrary dimensions", in: *Acta Cybernetica*, vol. 15 (2001), pp. 101–106.
- [26] Tanács, A., Palágyi, K. and Kuba, A., Medical image registration based on interactively defined anatomical landmark points, *Int. J. Machine Graphics & Vision* 7 (1998), 151–158.
- [27] Tanács, A., Palágyi, K. and Kuba, A., "Target registration error of point-based methods assuming rigid-body and linear motions," in: *Proc. Int. Workshop on Biomedical Image Registration* (1999), pp. 223–233.
- [28] Umeyama, S., Least-squares estimation of transformation parameters between two point patterns, *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence* 13 (1991), 376–380.
- [29] West, J. B. and et al., Retrospective intermodality registration techniques for images of the head: Surface-based versus volume-based, *IEEE Transaction on Medical Imaging* 18, 2 (1999).

(Beérkezett: 2001. március 9.)

SZEGEDI TUDOMÁNYEGYETEM
KÉPFELDOLGOZÁS ÉS SZÁMÍTÓGÉPES GRAFIKA TANSZÉK
H-6701 SZEGED PF. 652
tanacs@inf.u-szeged.hu

IMAGE REGISTRATION METHODS BASED ON INTERACTIVELY IDENTIFIED POINT PAIRS

ATTILA TANÁCS

Registration is a fundamental task in digital image processing. Its purpose is to find a geometrical transformation that relates the points of an image to their corresponding points of another image. A general and easy to use solution for registration problems is selecting pairs of points as features. In this paper, after a short general introduction which describes the most common features of the registration methods, we discuss some of the point based methods proposed by us and other authors. We successfully use these in the field of medical image registration but they also can be used in other fields including computer vision and remotely sensed data processing. We didn't intend to describe all the available methods. For some transformation types such as rigid-body, there are several others with similar complexity and reliability. We intended to give at least one useful method for every transformation types.

AZ ARÁNYOS ELOSZTÁSI ELJÁRÁS EGY KARAKTERIZÁCIÓJA

TASNÁDI ATTILA*

Budapest

Amennyiben egy tárgy iránt megnyilvánuló igények meghaladják a rendelkezésre álló mennyiséget, akkor valamilyen eljárás szerint szét kell osztanunk a szükséges mennyiséget a szereplők között. Az elosztási eljárásokat szokás igazságossági, invariancia és más típusú axiómákkal jellemezni. Ebben a cikkben az arányos elosztási eljárást jellemezzük egy igazságossági és egy invariancia axióma segítségével.

1. Bevezetés

Az életben számtalanszor találkozunk olyan helyzetekkel, amikor egy tárgy iránti mennyiségi igények meghaladják a tárgyból rendelkezésre álló mennyiséget. A tárgy szót átvitt értelemben használjuk, azaz nemcsak fizikai formában megjelenő tárgyakra gondolunk. Példának tekinthetjük a kárpótlási igényeket, egy csődbement cég hitelezőinek igényeit, egy születésnapra torta szeletei iránt megnyilvánuló igényeket, a képviseleti problémákat, stb.

A képviseleti problémát itt külön ki is emelném, mivel jól rámutat arra, hogy milyen tágra értelmezzük ebben a cikkben a tárgy fogalmát. Ha csoportok képviseletének kérdéséről akarjuk vizsgálni, akkor a kérdéses tárgy a képviselői hely, míg az egyes csoportok képviselőhelyek iránti igényének mértéke – a mindenki szeretné magát személyesen képviselni elvből kiindulva – a csoport létszámával egyezik meg. Ilyen képviseleti probléma például az egyes területi egységek képviselése egy ország parlamentjében, a karok képviselése az Egyetemi Tanácsban, stb. A képviseleti problémát részletesen tárgyalja Young [6] könyvének 4. fejezete.

*A szerző kifejezi köszönését egy anonim bíráló hasznos megjegyzéseiért. A kutatás kezdete az MTA Bolyai János Kutatási ösztöndíj és a BKÁE normatív kutatástámogatási pályázat (2001/78) keretében folyt. A kutatás folytatását az OTKA (F 043496) tette lehetővé.

A vizsgálódásaink során feltesszük, hogy mind az igények, mind az elosztandó mennyiség egészértékű. Az ilyen típusú elosztási problémákat diszkrét elosztási problémáknak szokás nevezni. A fent említett képviselői probléma például egy diszkrét elosztási probléma. Moulin [1] determinisztikus elosztási eljárásokat vizsgálva kimutatta, hogy axiomatikus tulajdonságai alapján az úgynevezett prioritási szabály – amely a szereplőket egy az igényüktől és az elosztandó mennyiségtől független fontossági sorrendbe rendezi – kitüntetett szerepet tölt be. A prioritási szabály szerint egy alacsonyabb fontosságú szereplő csak akkor részesülhet az elosztandó mennyiségből, ha az összes nála fontosabb szereplő igényét maradéktalanul ki lehet elégíteni. Kiemelendő Moulin-nek a diszkrét elosztási problémára vonatkozó tétele [1, 1. tétel], amely szerint a három invariancia axiómát (konzisztencia, alulról előállíthatóság és felülről előállíthatóság) egyszerre egyedül csak az úgynevezett prioritási szabály teljesíti. Ez egy meglehetősen negatív állítás ugyanis a prioritási szabály egy nem igazságos elosztási eljárás.

A determinisztikus modellkeretben adódó negatív eredmény feloldható, ha az elosztás folyamata során megengedjük a véletlent, azaz az elosztásban résztvevő szereplőknek juttatott mennyiségek valószínűségi változók. A valószínűségi modellkeretben Moulin [2] többféleképpen karakterizálja az úgynevezett arányos elosztási eljárást, amely szerint az elosztandó egységeket úgy sorsoljuk ki a szereplők között egymásután, hogy minden egyes szereplő a fennmaradó igényekkel arányos valószínűségekkel juthat az éppen kisorsolandó egységhez. Az arányos elosztási eljárás – akárcsak a prioritási szabály – eleget tesz a konzisztencia, alulról előállíthatósági és felülről előállíthatósági axiómáknak. Ebben a cikkben az arányos elosztási eljárásra adunk egy egyszerű karakterizációt.

2. A modellkeret

Jelölje \mathbb{N} a nemnegatív egész számok halmazát és legyen \mathcal{N} a lehetséges szereplők egy véges halmaza. Tetszőleges $N \subset \mathcal{N}$, $x \in \mathbb{N}^N$ és $M \subset N$ esetén vezessük be az $x_M = \sum_{i \in M} x_i$ jelölést.

Egy *elosztási probléma* az $(N, t, (x_i)_{i \in N})$ hármassal írható le, ahol $N \subset \mathcal{N}$ a szereplők halmaza, $t \in \mathbb{N}$ az N -beli szereplők részére elosztandó mennyiség és $x_i \in \mathbb{N}$ az $i \in N$ szereplő igénye. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $x_N > t$, mivel ellenkező esetben mindenki megkaphatja az általa igényelt teljes mennyiséget.

A lehetséges *elosztások* halmazát jelölje $\Omega_{N,t,x}$, azaz

$$\Omega_{N,t,x} = \{\omega \in \mathbb{N}^N \mid \omega_N = t, \forall i \in N : 0 \leq \omega_i \leq x_i\},$$

és jelölje $\mathcal{P}(\Omega_{N,t,x})$ az $\Omega_{N,t,x}$ halmaz hatványhalmazát. A ρ valószínűségi *elosztási eljárás* minden egyes $(N, t, (x_i)_{i \in N})$ elosztási problémához hozzárendel egy az $(\Omega_{N,t,x}, \mathcal{P}(\Omega_{N,t,x}))$ téren értelmezett valószínűségi mértéket, amelyet $\rho_{N,t,x}$ -szel

jelölünk. Továbbá jelölje ekkor $\rho_{N,t,x}^i$ az $i \in N$ szereplőnek jutatott mennyiség eloszlását, amely a $\rho_{N,t,x}$ egy peremeloszlása.

Az arányos elosztási eljárás jellemzéséhez két axiómára lesz szükségünk. Az első szerint, ha a rendelkezésre álló mennyiség megnövekszik, akkor azonos elosztáshoz kell jutnunk a megnövekedett mennyiség egyidejű elosztása esetén, illetve az eredeti mennyiség és a növekmény külön-külön történő elosztása esetén. Ezt az axiómát alulról előállíthatósági axiómának nevezzük.

1. AXIÓMA. *Alulról előállíthatóság:*

$$0 \leq t' \leq t \leq x_N \Rightarrow \rho_{N,t,x}(\omega) = \sum_{\substack{\omega' \in \Omega_{N,t',x} \\ \omega' \leq \omega}} \rho_{N,t',x}(\omega') \rho_{N,t-t',x-\omega'}(\omega - \omega')$$

teljesüljön minden $N \subset \mathcal{N}$ halmazra, minden $t, t' \in \mathbb{N}$ elosztandó mennyiségre, minden $x \in \mathbb{N}^N$ igényvektorra és minden $\omega \in \Omega_{N,t,x}$ elosztásra.

Megjegyzendő, hogy az alulról előállíthatósági axiómát eredetileg determinisztikus elosztási eljárásokra fogalmazták meg (lásd például Moulin [1]). A determinisztikus modellkeret valószínűségi kiterjesztését illetően Moulin [2] és a szerző [4] Moulin-től függetlenül elért eredményére utalunk.

Az elemzésünk során használt második axióma egy igazságossági axióma, amely szerint a várható elosztásoknak az igényekkel arányosoknak kell lenniük.

2. AXIÓMA. *Arányos várható részesedés:*

$$\sum_{k=0}^{x_i} k \rho_{N,t,x}^i(k) = x_i \frac{t}{x_N}$$

teljesüljön minden $N \subset \mathcal{N}$ halmazra, mindegyik $i \in N$ szereplőre, minden $t \in \mathbb{N}$ elosztandó mennyiségre és minden $x \in \mathbb{N}^N$ igényvektorra.

3. A karakterizáció

Definiáljuk az arányos elosztási eljárást: Egy adott $(N, t, (x_i)_{i \in N})$ elosztási probléma esetén jutassunk az $i \in N$ szereplőnek x_i darab sorsjegyet. Majd húzzunk ki visszatevés nélkül t darab sorsjegyet az x_N darab sorsjegy közül és végül minden egyes szereplő a kihúzott sorsjegyeivel azonos mennyiségben részesül az elosztandó tárgyból. A definícióból kifolyólag az arányos elosztási eljárás a polihipergeometriai eloszlással írható le, tehát

$$\rho_{N,t,x}(\omega) = \frac{\prod_{i \in N} \binom{x_i}{\omega_i}}{\binom{x_N}{t}}$$

tetszőleges $\omega \in \Omega_{N,t,x}$ elosztás esetén.

1. TÉTEL. Az arányos elosztási eljárás karakterizálható az alulról előállíthatósági és az arányos várható részesedés axiómákkal.

Bizonyítás. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $N = \{1, \dots, n\}$. A továbbiakban az alábbi két azonosságot fogjuk majd használni:

$$(1) \quad \binom{m}{k} \binom{m-k}{l} = \binom{m}{k+l} \binom{k+l}{l}$$

$$(2) \quad \sum_{k_1 + \dots + k_p = k} \prod_{i=1}^p \binom{m_i}{k_i} = \binom{\sum_{i=1}^p m_i}{k}$$

Először is győződjünk meg arról, hogy az arányos elosztási eljárás kielégíti mind az alulról előállíthatósági, mind az arányos várható részesedés axiómákat. Legyen $0 \leq t - u = t' \leq t \leq x_N$ és vegyünk egy tetszőleges $\omega \in \Omega_{N,t,x}$ elosztást. Ekkor az arányos elosztási eljárás definíciója, (2), disztributivitás és (1) miatt a következő egyenlőségek adódnak:

$$\begin{aligned} \rho_{N,t,x}(\omega) &= \rho_{N,t,x}(\omega) \frac{1}{\binom{t}{u}} \binom{t}{u} = \frac{\prod_{i=1}^n \binom{x_i}{\omega_i}}{\binom{x_N}{t}} \frac{1}{\binom{t}{u}} \sum_{\substack{\omega'_N = t-u \\ 0 \leq \omega' \leq \omega}} \prod_{i=1}^n \binom{\omega_i}{\omega_i - \omega'_i} = \\ &= \sum_{\substack{\omega'_N = t-u \\ 0 \leq \omega' \leq \omega}} \frac{\prod_{i=1}^n \binom{x_i}{\omega_i} \binom{\omega_i}{\omega_i - \omega'_i}}{\binom{x_N}{t} \binom{t}{u}} = \sum_{\substack{\omega'_N = t-u \\ 0 \leq \omega' \leq \omega}} \frac{\prod_{i=1}^n \binom{x_i}{\omega'_i} \binom{x_i - \omega'_i}{\omega_i - \omega'_i}}{\binom{x_N}{t-u} \binom{x_N - t + u}{u}} = \\ &= \sum_{\substack{\omega' \in \Omega_{N,t',x} \\ \omega' \leq \omega}} \rho_{N,t',x}(\omega') \rho_{N,t-t',x-\omega'}(\omega - \omega'), \end{aligned}$$

amelyek alapján látható az alulról előállíthatósági axióma teljesülése. Továbbá az arányos elosztási eljárás nyilván kielégíti az arányos várható részesedés axiómáját, mivel a polihipergeometriai eloszlás egydimenziós peremeloszlásainak várható értékei tx_i/x_N .

A fordított irányt t szerinti indukcióval látjuk be. Tekintsük először a $t = 1$ esetet. Ekkor az arányos várható részesedés axiómája miatt bármelyik $i \in N$ szereplőnek juttatott mennyiség eloszlása

$$\begin{aligned} \rho_{N,1,x}^i(1) &= \frac{x_i}{x_N} = \frac{\binom{x_i}{1} \binom{x_N - x_i}{0}}{\binom{x_N}{1}} \quad \text{és} \\ \rho_{N,1,x}^i(0) &= \frac{x_N - x_i}{x_N} = \frac{\binom{x_i}{0} \binom{x_N - x_i}{1}}{\binom{x_N}{1}} \end{aligned}$$

tetszőleges $x \in \mathbb{N}^N$ igényvektorra. Mivel $\rho_{N,1,x}^i(1) = \rho_{N,1,x}(e_i)$ és $\Omega_{N,1,x} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, ezért bármely $\omega \in \Omega_{N,1,x}$ elosztásra teljesül a következő egyenlőség

$$(3) \quad \rho_{N,1,x}(\omega) = \frac{\prod_{i=1}^n \binom{x_i}{\omega'_i}}{\binom{x_N}{1}}.$$

Vegyünk egy tetszőleges rögzített $x \in \mathbb{N}^N$ igényvektort. Az indukciós feltevés szerint

$$(4) \quad \rho_{N,t-1,x}(\omega') = \frac{\prod_{i=1}^n \binom{x_i}{\omega'_i}}{\binom{x_N}{t-1}}$$

tetszőleges $\omega' \in \Omega_{N,t-1,x}$ elosztásra. Az alulról előállíthatósági axióma, (3), (4), (1), és (2) felhasználásával az alábbi egyenlőségeket kapjuk:

$$\begin{aligned} \rho_{N,t,x}(\omega) &= \sum_{\substack{\omega' \in \Omega_{N,t-1,x} \\ \omega' \leq \omega}} \rho_{N,t-1,x}(\omega') \rho_{N,1,x-\omega'}(\omega - \omega') = \\ &= \sum_{\substack{\omega' \in \Omega_{N,t-1,x} \\ \omega' \leq \omega}} \frac{\prod_{i=1}^n \binom{x_i}{\omega'_i} \binom{x_i - \omega'_i}{\omega_i - \omega'_i}}{\binom{x_N}{t-1} \binom{x_N - t + 1}{1}} = \sum_{\substack{\omega'_N = t-1 \\ 0 \leq \omega' \leq \omega}} \frac{\prod_{i=1}^n \binom{x_i}{\omega'_i} \binom{\omega_i}{\omega_i - \omega'_i}}{\binom{x_N}{t} \binom{t}{1}} = \\ &= \frac{\prod_{i=1}^n \binom{x_i}{\omega_i}}{\binom{x_N}{t}} \frac{1}{\binom{t}{1}} \sum_{\substack{k_1 + \dots + k_n = 1 \\ 0 \leq k_i \leq \omega_i}} \prod_{i=1}^n \binom{\omega_i}{k_i} = \frac{\prod_{i=1}^n \binom{x_i}{\omega_i}}{\binom{x_N}{t}} \end{aligned}$$

tetszőleges $\omega \in \Omega_{N,t,x}$ elosztásra. Tehát $\rho_{N,t,x}$ valóban egy polihipergeometriai eloszlás, azaz ρ szükségszerűen az arányos elosztási eljárás. \square

4. Irodalmi kitekintés

Moulin [2] megadja a valószínűségi modellkeretben a három invariancia axiómának (konzisztencia, alulról előállíthatóság és felülről előállíthatóság) egyidejűleg eleget tevő elosztási eljárások halmazát. Lényegében az ezen halmazba tartozó eljárások a szereplőket prioritási osztályokba sorolják és az így adódó prioritási osztályokon belül engedik csak meg a visszatevés mintavételen alapuló arányos elosztás alkalmazását.¹ Moulin [2, 2. tétel következménye] szerint csak az arányos

¹A pontosan két szereplőt tartalmazó prioritási osztályokon belül az arányos elosztási eljárás kívül másfajta elosztási eljárás is megengedhető.

elosztási eljárás „prioritás mentes”. Ezért igazságossági megfontolásból ez utóbbi eljárás kitüntetett szerepet játszik a valószínűségi modellkereten belül.

Végezetül megemlítenék még két további valószínűségi elosztási eljárást. A fair sorbaállási eljárás szerint az elosztandó mennyiséget több fordulóban osztjuk el úgy, hogy minden egyes fordulóban a még igényekkel rendelkező szereplőket véletlen sorrendben egy-egy egységhez juttatjuk a még el nem osztott egységekből. Ezen eljárást többféleképpen karakterizálja Moulin és Stong [3]. A másik általam még említeni kívánt eljárás a fair maradék elosztási eljárás, amely szerint mindenkinek garantált az igényeivel arányos részesedésének lefelé kerekített értéke és a maradékot pedig úgy osztjuk el, hogy teljesüljön az arányos várható részesedés axiómája. A fair maradék eljárás definíciója és egy karakterizációja megtalálható a szerző egy másik cikkében [5].

Hivatkozások

- [1] Moulin, H., Priority rules and other asymmetric rationing methods, *Econometrica* **68** (2000) 643–684.
- [2] Moulin, H., The Proportional Random Allocation Of Indivisible Units, *Social Choice and Welfare* **19** (2002) 381–413.
- [3] Moulin, H. and Stong, R., Fair Queuing and Other Probabilistic Allocation methods, *Mathematics of Operations Research* **27** (2002) 1–30.
- [4] Tasnádi, A., Stochastic Rationing Methods, mimeo (Budapesti Közgazdaságtudományi és Államigazgatási Egyetem, 2000, www.bkae.hu/~tasnadi).
- [5] Tasnádi, A., On Probabilistic Rationing Methods, *Mathematical Social Sciences* **44** (2002) 211–221.
- [6] Young, H. P., *Equity, in Theory and Practice* (Princeton University Press, Princeton, 1994).

(Beérkezett: 2001. június 27.)

BUDAPESTI KÖZGAZDASÁGTUDOMÁNYI ÉS
ÁLLAMIGAZGATÁSI EGYETEM
MATEMATIKA TANSZÉK
1093 BUDAPEST, FŐVÁM TÉR 8.
attila.tasnadi@math.bke.hu

A CHARACTERIZATION OF THE PROPORTIONAL PROBABILISTIC
RATIONING METHOD

ATTILA TASNÁDI

Rationing occurs if the demand for a certain good exceeds its supply. In such situations a rationing method has to be specified in order to determine the allocation of the scarce good to the agents. Moulin [2] characterized the proportional probabilistic rationing method in several ways. In this paper we give a simple proof of a characterization of the proportional probabilistic rationing method.

AZ $LPT(k)'$ ALGORITMUS EGYFORMA PÁRHUZAMOS GÉPEK ÜTEMEZÉSÉRE

DÓSA GYÖRGY ÉS VIZVÁRI BÉLA

Veszprém, Budapest

Az egyforma párhuzamos gépek ütemezése az ütemezéstudományt sokat vizsgált, klasszikus feladata. A feladat NP-teljes, nem ismert olyan polinom lépésszámú algoritmus, amely minden esetben meghatározná egy optimális megoldást. Az egyik legkorábbi approximációs algoritmus Graham LPT algoritmus. E cikkben az LPT algoritmusnak megadjuk egy lehetséges általánosítását, részletesen foglalkozunk az új algoritmuscsalád elméleti hatékonyságával, valamint illusztrációként közlünk néhány feladatosztályon kapott futási eredményeket is.

1. Bevezetés

Egyforma párhuzamos gépek ütemezésével, a $P \parallel C_{\max}$ feladattal foglalkozunk, amely a következő: Adott egy feladathalmaz: $T = \{T_1, T_2, \dots, T_n\}$, ahol T_i ($i = 1, \dots, n$) olyan munkát jelent, amelyet m gép valamelyikével kell elvégezni. A T_i munka elvégzésének ideje $l(T_i)$. A munkák egy ütemezésén a T halmaz valamely $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, \dots, P_m\}$ partícióját értjük, ekkor az i -edik gép végzi a P_i -ben lévő feladatokat, az egy-egy gépen elvégzendő munkák sorrendje közömbös. A \mathcal{P} ütemezés teljes átfutási ideje az utolsó munka befejezési idejét jelenti, ahol feltesszük, hogy a gépek a 0 időpontban kezdenek dolgozni. A teljes átfutási időt $L(\mathcal{P})$ -vel jelöljük. A \mathcal{P}^* ütemezés optimális, ha a T halmaz tetszőleges \mathcal{P} ütemezése esetén teljesül az $L(\mathcal{P}^*) \leq L(\mathcal{P})$ egyenlőtlenség. Ilyen optimális ütemezés biztosan van, esetleg több is lehet. Az $L(\mathcal{P}^*)$ értéket jelöljük $OPT(T)$ -vel. Könnyen igazolható, hogy a feladat NP-teljes [4].

Az egyik legkorábbi heurisztikus megoldó algoritmus a Graham-féle LPT (longest processing time) algoritmus [6] a nevéhez híven a munkákat sorbarakja úgy, hogy a végrehatási idők monoton nemnövekvő sorozatot alkossanak. (Nevezzük ezt a sorrendet a továbbiakban LPT-sorrendnek.) Ezután a munkákat ebben a sor-

rendben mohó módon ütemezi, a soron következő munka olyan gépre kerül, hogy ezáltal a teljes átfutási idő a lehető legkevésbé növekszik. Jelöljük $\text{ALG}(T)$ -vel egy adott ALG algoritmus által meghatározott ütemezés átfutási idejét a T feladathalmaz esetében. Az algoritmusok hatékonyságát gyakran mérik úgy, hogy az $\text{ALG}(T)/\text{OPT}(T)$ érték legfeljebb mekkora lehet. Legyen tehát

$$(1) \quad R_m(\text{ALG}) = \sup_T \left\{ \frac{\text{ALG}(T)}{\text{OPT}(T)} \mid T \text{ tetszőleges feladathalmaz} \right\}.$$

Az előbbi értéket az algoritmus elméleti hatékonyságának nevezzük. Az LPT algoritmus esetén $R_m(\text{LPT}) = \frac{4}{3} - \frac{1}{3m}$ [6]. Az LPT-nél jelentősen hatékonyabb (legalábbis a legrosszabb eset tekintetében) a Multifit algoritmus. Ez ládapakolási algoritmust és logaritmikus keresést váltogat, és teljesül hogy $R_m(\text{Multifit}(k)) \leq 1.22 + 2^{-k}$ [1], ahol k az elvégzett iterációk száma. E két algoritmus vizsgálatával foglalkozik [10]. A feladatot tovább vizsgálva később kiderült, hogy tetszőleges kicsi pozitív ε -hoz megadható olyan $\text{ALG}(\varepsilon)$ algoritmus, amelyre $R_m(\text{ALG}(\varepsilon)) < 1 + \varepsilon$. Az ilyen algoritmus-családot polinomiális idejű approximációs sémának (PTAS) nevezik [8]. Általában persze az ε szám csökkenése esetén a lépésszám növekszik. A témában érdeklődő olvasónak részletesebb áttekintés kedvéért a [7], [9], [11] műveket ajánljuk.

Graham [6] cikkében felvázolja az LPT algoritmusnak a következő általánosítást: A munkákat LPT-sorrendbe rendezzük, ezután az első k számú munkát optimálisan ütemezzük, majd a hátralévő munkákat az LPT algoritmus szerint ütemezzük. Nevezzük ezt az algoritmust $\text{LPT}(k)$ -nak. Jelen cikkünkben az LPT algoritmusnak egy másik, $\text{LPT}(k)'$ -vel jelölt általánosításával foglalkozunk: A sorbarendezés után, amikor megkeressük a következő k számú munka optimális ütemezését, csak a soron következő munkát ütemezzük ennek megfelelően, majd megint a következő k darab munka optimális ütemezésének megkeresésével folytatjuk tovább az algoritmust, most is csak egyet ütemezzük ennek megfelelően, és így tovább. Ez is egy viszonylag egyszerű, és még nem vizsgált általánosítása az LPT algoritmusnak. Látni fogjuk, hogy a legrosszabb eset vizsgálatának tekintetében ez hatékonyabb az $\text{LPT}(k)$ algoritmusnál. Rögzített k esetén az algoritmus lépésszáma a kezdeti sorbarendezeztől eltekintve, ami $n \log n$ lépés, lineáris futásidejű, és $k \rightarrow \infty$ esetén az algoritmus hatékonysága 1-hez tart.

Korábbi cikkeink ([2] és [3]) más általánosítási lehetőségekkel foglalkoznak. [2] közli az LPT és a Multifit algoritmusoknak egy olyan közös általánosítását, amelynek során az elméleti hatékonyság nem romlik, $\frac{4}{3} - \frac{1}{3m}$ marad. Azt, hogy a Graham-féle LPT algoritmus a mai napig népszerű, széles körben alkalmazott módszer, és további kutatások tárgya is, mutatja [5] is. Ez a cikk lényegében [2]-hez hasonló eredményeket közöl.

A cikk szerkezete a következő. A második fejezetben előkészítjük az algoritmus vizsgálatát, a harmadikban pontos becslést adunk az algoritmus elméleti hatékonyságára két gép és tetszőleges k esetén. A következő két fejezetben szintén pontos

becslést adunk tetszőleges gépszám, valamint $k = 3$ és $k = 4$ esetén. Az utolsó fejezetben két táblázatban illusztráljuk a kapott módszer hatékonyságát.

A továbbiakban az egyszerűség kedvéért az optimális ütemezésnél szereplő gépeket optimális gépeknek nevezzük, a legrövidebb átfutási idővel rendelkező munkát A -val jelöljük, és a munkák hosszát gyakran $l(T)$ helyett csak T -vel fogjuk jelölni.

2. Az LPT algoritmus, és általánosítási lehetőségei

Graham LPT algoritmus a következő: Először a munkákat nemnövekvő sorrendbe rakjuk a végrehajtásukhoz szükséges idő szerint. Ezután ebben a sorrendben ütemezzük őket, mindig a legkorábban felszabaduló gépre tesszük a következő munkát. Az LPT algoritmus esetén $R_m(LPT) = \frac{4}{3} - \frac{1}{3m}$, a becslés éles voltának bizonyítására az alábbi feladathalmaz szolgál:

$$(2) \quad T = \{2m-1, 2m-1, 2m-2, 2m-2, \dots, m+1, m+1, m, m, m\}$$

Az LPT korábbiakban említett, Graham cikkében szereplő $LPT(k)$ általánosításának elméleti hatékonysága a k paraméter növekedésével javul: $R_m(LPT(k)) \leq 1 + \frac{1-1/m}{1+[k/m]}$, és a becslés éles ha a gépek m száma osztója a k paraméternek [6].

Jegyezzük meg, hogy $1 \leq k \leq 2m$ esetén nem kapunk az $R_m(LPT) = \frac{4}{3} - \frac{1}{3m}$ konstansnál jobb értéket. Alább megadjuk az LPT egy másik lehetséges általánosítását: az $LPT(k)'$ algoritmus során a munkákat LPT -sorrendbe rendezzük. Ezután megkeressük a következő k számú munka optimális elhelyezését. Ezután csak azt rögzítjük, hogy a sorban következő munka melyik gépre kerül, és ezt a két lépést ismételjük. Amikor utoljára már csak k darab munka marad, azokat utoljára egyszerre optimálisan ütemezzük. Nyilvánvaló, hogy $k = 1$ esetén az eredeti LPT algoritmust kapjuk. Az algoritmus formális leírása a következő:

Az $LPT(k)'$ algoritmus.

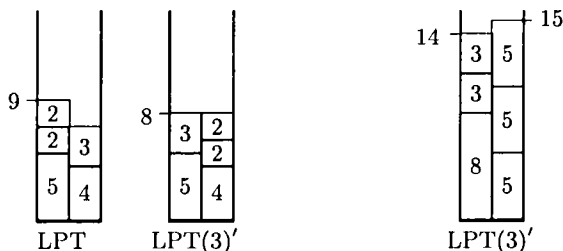
1. Legyen m a gépek, n a feladatok száma. Legyen $1 \leq k \leq n$ rögzített pozitív egész.
2. Rakjuk sorba a munkákat a végrehajtási idejük nemnövekvő sorrendjében. Legyen $n_1 = n$.
3. Készítsük el a soron következő k számú munka összes lehetséges ütemezését. Ezek közül válasszuk ki azokat, amikor az átfutási idő növekedése minimális.
4. Az előbbiektől válasszuk ki azokat az ütemezéseket, amikor a még nem ütemezett munkák közül a sorban következő a lehető legkorábbi időpontra kerül. Az így kapott ütemezések közül válasszunk olyat, amikor a következő munka a lehető legkisebb sorszámú gépre kerül, és ütemezzük erre a gépre a következő munkát.
5. Legyen $n_1 := n_1 - 1$. Ha $n_1 > k$, akkor menjünk a 2. lépésre, egyébként helyezzük el optimálisan a maradék k számú munkát, és vége.

Megjegyzés. Azt várjuk, hogy így az $LPT(k)$ -nál hatékonyabb algoritmust kapunk. Sajnos az algoritmus lépésszáma is növekszik, azonban viszonylag kicsi k paraméter esetén még gyors, és jól működő algoritmusokat kapunk, ahogyan ezt az utolsó fejezetben demonstráljuk.

2.1. TÉTEL. Az $LPT(2)'$ algoritmus megegyezik az eredeti LPT algoritmussal.

Bizonyítás. Tekintsünk egy olyan pillanatot, amikor a következő két munkát akarjuk optimálisan elhelyezni. Ha ezek két különböző gépre kerülnek, akkor a korábbi időpontra érdemes ütemezni a hosszabb idejűt, és a másik gépre a másik munkát. Az LPT algoritmus ugyanezt teszi. Ha egy gépre kerül a következő két munka, akkor ide tenné a következő munkát az LPT algoritmus is. Mindkét esetben a két algoritmus ugyanazt az ütemezést készíti el. \square

Jegyezzük meg, hogy $LPT(2)$ is megegyezik az eredeti LPT-vel, de $LPT(3)$ már különbözik tőle. Az $LPT(3)'$ és LPT is különbözik már egymástól, erre példa lehet $m = 2$ mellett a $\mathcal{T} = \{5, 4, 3, 2, 2\}$ feladathalmaz, amelynek az LPT algoritmus 9, az $LPT(3)'$ pedig 8 átfutási idővel rendelkező ütemezését készíti el. (1. ábra, balra) Az ábrán az úgynevezett Gantt-táblával szemléltetjük a feladatok ütemezését: A függőleges sávok egy-egy gépet jelentenek, a téglalapok pedig a munkákat szimbolizálják. A sáv alja megfelel a 0 időpontnak, és a legmagasabbra felnyúló téglalap tetejének magassága pedig a teljes átfutási időnek.



1. ábra

2.2. Definíció. Egy \mathcal{T} feladathalmazt (p/q) ellenpéldának nevezünk, ha az optimális megoldás értéke q , az $LPT(k)'$ algoritmus által kapott ütemezés teljes átfutási ideje pedig p . Az ellenpélda minimális, ha kisebb elemszámú (p/q) ellenpélda nem létezik.

2.3. LEMMA. Legyen \mathcal{T} (p/q) ellenpélda. Ekkor tetszőleges $\alpha > 0$ esetén \mathcal{T} egyben $(\alpha p/\alpha q)$ ellenpélda is. \square

2.4. LEMMA. Legyen a gépek száma $m \geq 2$, legyen \mathcal{T} minimális (p/q) ellenpélda az $LPT(k)'$ algoritmus esetén, vagyis legyen $OPT(\mathcal{T}) = q$, míg az $LPT(k)'$ által kapott megoldás értéke p . Legyen $A \in \mathcal{T}$ minimális magasságú téglalap. Ekkor teljesül $A \geq \frac{m}{m-1}(p - q)$.

Bizonyítás. Legyen \mathcal{T}_1 az utolsóként elhelyezett k számú téglalap, legyen $\mathcal{T}_0 = \mathcal{T}_1 \setminus \{A\}$, és legyen $\{B\} \cup \mathcal{T}_0$ az utolsó előtti elhelyezésnél lerakott k darab téglalap. (Vagyis az utolsó előtti elhelyezésnél megkerestük $\{B\} \cup \mathcal{T}_0$ optimális elhelyezését, és ezután a B téglalapot rögzítettük. Ekkor maradt még meg az utolsó k darab téglalap, $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_0 \cup \{A\}$.) Amikor $\{B\} \cup \mathcal{T}_0$ -t elhelyeztük, a minimalitás miatt nem értük el a p magasságot. Rögzítsük most egy pillanatra az összes $\{B\} \cup \mathcal{T}_0$ -beli téglalap helyét. Tegyük most a lehető legalacsonyabb helyre az A téglalapot. Ez az ütemezés nem lehet jobb annál, mint amikor csak a B téglalapot rögzítjük az LPT(k)' szerint, és az utolsó $\mathcal{T}_0 \cup \{A\}$ halmazt optimálisan helyezzük el. Ezért az A téglalap teteje most eléri a p magasságot.

A téglalapok összmérete legfőljebb $m \cdot q$. Egyik gép átfutási ideje legalább p . A többi gépek közül így van olyan, amelyiknek az átfutási ideje legfőljebb $q - \frac{p-q}{m-1}$. Mivel az A téglalapot a lehető legalacsonyabb helyre tettük, ezért amelyik gépre került, ott sem lehetett az előbbinél több az átfutási idő. Viszont az A téglalap elhelyezésével elértük a p magasságot, ezért az A téglalap magassága legalább $p - (q - \frac{p-q}{m-1}) = \frac{m}{m-1}(p-q)$. \square

Megjegyzés. Az előző lemmánál azért kellett ilyen körülményesen eljárni a legrövidebb munka hosszúságának alsó becslésénél, mert az az LPT(k)' algoritmust elvégezve nem biztos, hogy a legrövidebb idejű munka végződik majd a legkésőbbi időpontban. Az 1. ábra jobboldali részén olyan szituáció látható, amikor nem a legrövidebb téglalap teteje van a legmagasabban. Két gép van és $k = 3$, valamint $\mathcal{T} = \{8, 5, 5, 5, 3, 3\}$. Az első három munka elhelyezése után a két gép aktuális átfutási ideje 8, illetve 10. Ezután az utolsó három munka elhelyezése az ábrán látható módon lesz optimális, a két 3 hosszúságú munka kerül az első, és az 5 hosszú munka a második gépre. A teljes átfutási idő 15, és nem a legrövidebb idejű munka végződik a legkésőbbi időpontban. Az sem igaz, hogy csak egy munka végződhet a legkésőbbi időpontban: a $\mathcal{T} = \{6, 5, 5, 5, 5, 3\}$ feladathalmaz és három gép esetén két 5 hosszúságú munka végződik legkésőbb. A következő fejezetben pontos becslést adunk LPT(k)' hatékonyságára két gép és tetszőleges k esetén.

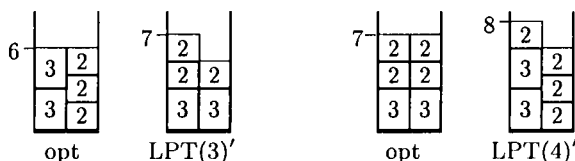
3. Két gép esete

Két gép esetén az LPT(4)' algoritmus az LPT(4) hatékonysági becslésénél szereplő, és az élességet bizonyító $\mathcal{T} = \{3, 3, 2, 2, 2\}$ feladathalmaznak optimális ütemezését készíti el, ugyanis itt öt munka van, az első téglalap elhelyezése után már csak négy marad, amit LPT(4)' optimálisan ütemez. Hasonló a helyzet nagyobb k esetén is: az LPT(k) algoritmus éles ellenpéldája $k + 1$ munkából áll, és ezeket az LPT(k)' optimálisan ütemezi. Az LPT(k) algoritmusnak a két gépre vonatkozó ellenpéldái olyan feladathalmazok, ahol két 3 hosszúságú munka van, és még $k - 1$ darab 2 hosszúságú munka. Emiatt ha a két 3 hosszúságú téglalapot már valahogyan elhelyeztük, akkor a többi helye már adódik; másrészt ha ennek a két

3 hosszúságú téglalapnak a helyét az elején elrontjuk, akkor ezt a hibát már nem lehet helyrehozni. Ezért az $LPT(k)'$ algoritmus az $LPT(k+1)$ hatékonysági becslésénél szereplő feladathalmaz elemeit már nem tudja "jól" ütemezni; így teljesül a következő becslés: $R_2(LPT(k)') \geq \frac{k+4}{k+3}$. Alább belátjuk, hogy ez a becslés éles.

3.1. TÉTEL. Két gép, és tetszőleges $\alpha \geq 0$, egész esetén az $LPT(3+2\alpha)'$ algoritmus elméleti hatékonysága $R_2(LPT(3+2\alpha)') = \frac{7+2\alpha}{6+2\alpha}$.

Bizonyítás. Legyen először $\alpha = 0$. A $\mathcal{T} = \{3, 3, 2, 2, 2\}$ példa mutatja, hogy a szorzó értéke legalább $\frac{7}{6}$. (2. ábra, balra) Tegyük fel, hogy ennél nagyobb. Ekkor a 2.4. Lemma miatt a legrövidebb téglalapnak a magassága több mint 2. Emiatt legföljebb 4 darab téglalap van, mert optimális ütemezés esetén mindegyik gépen legföljebb két munka van. Ezeket viszont $LPT(3)'$ optimálisan helyezi el.

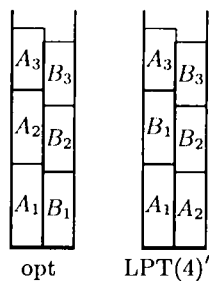


2. ábra

Most vegyük az általános esetet. Az ellenpélda hasonló az előbbihez, csak még 2α darab 2 egység hosszú téglalapot hozzáveszünk az előbbiekhöz. Ekkor a két 3 egység hosszúságú téglalap kerül alul egymás mellé, és így adódik a $\frac{7+2\alpha}{6+2\alpha}$ arány. Tegyük fel hogy ennél rosszabb a hatékonyság. A legkisebb magasság ekkor több mint 2. Emiatt legföljebb $2(\alpha+2)$ téglalap van, ekkor viszont az algoritmus optimális ütemezést ad, ellentmondást kaptunk. \square

3.2. TÉTEL. Két gép, és tetszőleges $\alpha \geq 0$, egész esetén az $LPT(4+2\alpha)'$ algoritmus elméleti hatékonysága $R_2(LPT(4+2\alpha)') = \frac{8+2\alpha}{7+2\alpha}$.

Bizonyítás. Megint tekintsük először az $\alpha = 0$ esetet. A $\mathcal{T} = \{3, 3, 2, 2, 2, 2\}$ ellenpéldánál $\frac{8}{7}$ arányt kapunk, ugyanis a két 3 egység hosszú téglalapot az algoritmus egymás fölé teszi. (2. ábra) Tegyük fel hogy $R_2 > \frac{8}{7}$. A 2.4. Lemma alapján a legrövidebb téglalap magassága több mint 2. Emiatt legföljebb 6 téglalap van. 6-nál kevesebb nem lehet, mert akkor az algoritmus optimális megoldást ad, emiatt pontosan 6 darab téglalap van, és minden optimális gépre pontosan három-három feladat kerül. Az első optimális gépre kerüljön az A_1, A_2 , és A_3 feladat, míg a másikkra a B_1, B_2 , és B_3 . Feltehető, hogy $A_1 \geq A_2 \geq A_3$, és $B_1 \geq B_2 \geq B_3$, valamint $A_1 \geq B_1$. Mivel összesen hat munka van, az első kettő elhelyezése után a többi már egyszerre helyezzük el. Két esetet különböztetünk meg.



3. ábra

1. A_1 és A_2 a két legnagyobb téglalap. Ha ezek egymás fölé kerülnek az $LPT(4)'$ algoritmus során is, akkor optimális megoldást kapunk. Tegyük fel ezért, hogy egymás mellé kerülnek, tehát két különböző gépre. Tegyük ekkor a B_1 téglalapot A_1 fölé (A_2 eredeti helyére), a többit pedig arra a gépre, amelyiken optimális elhelyezéskor voltak. Ekkor $A_1 + B_1 + A_3 \leq A_1 + A_2 + A_3 \leq 7$. Másrészt ha a másik gépen $A_2 + B_2 + B_3 > 8$ lenne, akkor $A_2 > B_1 + 1$ lenne, amiből $A_2 > 3$, ekkor viszont $A_1 + A_2 + A_3 > 3 + 3 + 2 = 8$, ami lehetetlen. Ezért ha a maradék négy téglalapot optimálisan helyezzük el, mindkét gépen legfeljebb 8 az átfutási idő, ez ellentmondás.

2. A_1 és B_1 a két legnagyobb téglalap. Ha egymás mellé, két külön gépre kerülnek, akkor optimális megoldást kapunk. Tegyük fel hogy egy gépre kerülnek. Tegyük ekkor az A_2 téglalapot a B_1 helyére. Ekkor az előzőhöz hasonlóan kapjuk: A második gépen legfeljebb 7 az átfutási idő. Az első gépen ha $A_1 + B_1 + A_3 > 8$ lenne, akkor $B_1 > A_2 + 1$, ahonnan $B_1 > 3$, ami megint lehetetlen, mert akkor $B_1 + B_2 + B_3 > 3 + 2 + 2 = 7$. A maradék négy téglalapot optimálisan elhelyezve megint mindkét gépen legfeljebb 8 az átfutási idő, ami ellentmondás.

Az általános esetben ellenpéldának megfelel az előző, kiegészítve 2α darab 2 egység magasságú téglalappal, a bizonyítás többi része ez előző esettel analóg módon elvégezhető. \square

4. Az $LPT(3)'$ algoritmus

Ezzel a két gép, és tetszőleges k esetét megvizsgáltuk. Most következzen a tetszőleges számú gép, és $k = 3$ esete. A bevezetésben láttuk, hogy ez már nem egyezik meg az LPT -vel. A következő fejezetben megmutatjuk, hogy ugyan LPT és $LPT(3)'$ különböző algoritmusok, de az $LPT(3)'$ elméleti hatékonysága tetszőleges gépszám esetén ugyanakkora, mint az LPT algoritmus elméleti hatékonysága. A későbbiekben hasznos lesz a következő definíció, és az azt követő lemmák.

4.1. Definíció. Tegyük fel, hogy valamely gépek olyanok, hogy minden gépre legfeljebb két munka van ütemezve, és azok a következő sorrendben helyezkednek

el: az alsó sorban balról jobbra, fölötte pedig fordítva, jobbról balra csökken a munkák hosszúsága, továbbá ha egy gépre két munka van ütemezve, akkor a későbbi időpontban kezdődő (a felső sorban levő) munka végrehajtási ideje nem hosszabb, mint a korábban kezdődőnek a végrehajtási ideje. Nevezzük a munkáknak ezt a sorrendjét reguláris sorrendnek.

4.2. LEMMA. *Tegyük fel, hogy minden gépen legfeljebb két munka van. Helyezzük el a munkákat újra, a reguláris sorrendjük szerint. Ekkor a teljes átfutási idő nem növekedett.*

Bizonyítás. Helyezzük el a munkákat a reguláris sorrendjük szerint, és tegyük fel, hogy nőtt a teljes átfutási idő. Az alsó sorban legyenek az A_1, \dots, A_m munkák, a felette levők pedig legyenek B_j, \dots, B_m . Az első $j - 1$ gépen csak egy munka van. ($1 \leq j \leq m$) Tegyük fel, hogy a maximális átfutási idő az i -edik gépen adódik, és ez $A_i + B_i$. Ha azt akarjuk, hogy a teljes átfutási idő csökkenjen, akkor az A_1, \dots, A_i munkákat külön gépre kell tenni, mert ha kettő ezek közül egy gépre kerülne, akkor a teljes átfutási idő legalább akkora lesz, mint az előbb. Ezekre a gépekre nem kerülhet egy munka sem az A_{i+1}, \dots, A_m , B_i, \dots, B_m munkák közül, mert akkor megint nem csökkenne a teljes átfutási idő. Ez utóbbi $2(m - i) + 1$ darab munka ezek szerint legfeljebb $m - i$ számú gépen van, ezért van olyan gép, amelyiken legalább három munka van. Ezek szerint a reguláris sorrend szerinti ütemezés optimális azok között, amikor minden gépen legfeljebb két munka van. \square

Megjegyzés. Az előbbi lemma miatt ha van olyan optimális ütemezés, amelyik esetén minden gépen legfeljebb két munka van, akkor a munkák reguláris ütemezése is optimális megoldást ad.

4.3. LEMMA. *Tegyük fel, hogy a \mathcal{T} feladathalmaznak valamely optimális ütemezése esetén mindegyik gépen legfeljebb két munka van. Ekkor az $LPT(k)'$ algoritmus tetszőleges $k \geq 3$ esetén a munkákat a reguláris sorrendben ütemezi.*

Bizonyítás. Alkalmazzuk az előző lemmát a \mathcal{T} feladathalmaz egy részhalmazára, az első néhány munkára. E feladathalmaznak is van olyan optimális ütemezése, amikor minden gépen legfeljebb két munka van, ezért e munkák reguláris ütemezése is optimális. Ez azt jelenti, hogy ha a munkákat a reguláris sorrendjükben helyezzük el, minden egyes munka elhelyezésekor, a már elhelyezett munkák halmazára nézve optimális az ütemezésünk. Tekintsük azt a pillanatot, amikor az $LPT(k)'$ algoritmus a j -edik munkát ütemezi, ahol $1 \leq j \leq n - k + 1$, ahol n a munkák száma. Ekkor $j - 1$ munka helyét már rögzítettük, és most éppen a k következőt tesszük még valahova úgy, hogy az átfutási idő minimális legyen. Tegyük fel, hogy az első $j - 1$ számú munka a reguláris sorrendben lett ütemezve. Az előbbieket miatt a következő k számú munka optimális elhelyezései között szerepel az is, amikor az első $j - 1 + k$ munka mindegyike a reguláris sorrend szerinti gépen van, továbbá a j -edik munka nem kerülhet korábbi időpontra, mint ha a reguláris sorrend szerinti helyére kerül. így a j -edik munka is a reguláris sorrend szerint lesz ütemezve. \square

4.4. KÖVETKEZMÉNY. *Ha van olyan optimális megoldás, amikor mindegyik gépre legfőljebb két munka van ütemezve, $LPT(k)'$ optimális megoldást ad.*

Bizonyítás. Az előbbi két lemma szerint a feltétel teljesülése esetén a munkák reguláris sorrendben való ütemezése optimális megoldást határoz meg, másrészt pedig $LPT(k)'$ a munkákat reguláris sorrendben helyezi el. E kettőt összevetve kapjuk hogy $LPT(k)'$ optimális megoldást határoz meg. \square

Megjegyzés. Az alábbi lemmában egy másik, közvetlen bizonyítási lehetőséget mutatunk arra, hogy ha van olyan optimális megoldás, amikor minden gépre legfőljebb két munka kerül, akkor $LPT(k)'$ optimális megoldás készít el. Itt nem használjuk fel azt, hogy a munkák sorrendje reguláris. Emiatt e bizonyítási lehetőség egyrészt rövidebb, másrészt viszont kevesebbet mond az $LPT(k)'$ algoritmus működéséről.

4.5. LEMMA. *Legyen a gépek száma $m \geq 3$, valamint legyen $k \geq 3$. Tegyük fel, hogy mindegyik optimális gépre legfőljebb két munka van ütemezve. Ekkor $LPT(k)'$ optimális megoldást határoz meg.*

Bizonyítás. Legyen \mathcal{T} tetszőleges (p/q) ellenpélda. Legyen j azon optimális gépek száma, amelyekre egy munka lett ütemezve, ekkor $m - j$ számú gépen pedig két munka van. Végezzük el az $LPT(k)'$ algoritmust a $\mathcal{T} \setminus \{A\}$ feladathalmazra, (ahol A a legrövidebb idejű munka.) Most legalább $j + 1$ olyan gép van, amelyen csak egy munka van. Ezen gépek bármelyikére ha rátesszük az A munkát, a 2.4. Lemma szerint az átfutási idő több lesz mint p . Emiatt ezek a munkák az optimális ütemezésnél is egyedül voltak a gépeiken, ami ellentmondás, mert csak j olyan optimális gép volt, amelyre egy munka lett ütemezve. Ez azt jelenti, hogy (p/q) ellenpélda semmilyen p -re és q -ra nem létezik, vagyis az algoritmusunk optimális megoldást ad. \square

4.6. TÉTEL. *Az $LPT(3)'$ algoritmus elméleti hatékonysága tetszőleges m gép-szám esetén $R_m(LPT(3)') = \frac{4m-1}{3m}$.*

Bizonyítás. Lássuk először a három gép esetét. Az eredeti LPT algoritmusnál Graham példája a következő: $\mathcal{T} = \{5, 5, 4, 4, 3, 3, 3\}$. Az első hat feladat optimális ütemezésénél minden gépen két feladat van, (az átfutási idő 8). Erre a hat feladatra alkalmazva az előző lemmát, kapjuk, hogy az első négy munkát az $LPT(3)'$ algoritmus ugyanígy helyezi el. Az utolsó három munkát elhelyezve az ütemezés átfutási ideje 11 lesz. (Az LPT is így ütemezi a munkákat.) Az optimum értéke 9, és így $R_3(LPT(3)') \geq \frac{11}{9}$. Másrészt tegyük fel, hogy van olyan feladathalmaz, ahol az optimális megoldás értéke 9, míg az $LPT(3)'$ algoritmus által adott megoldás értéke több mint 11. A 2.4. Lemma szerint a legrövidebb téglalap magassága több mint 3. Emiatt minden optimális gépen legfőljebb két feladat van. Az előző két lemma miatt $LPT(3)'$ optimális megoldást ad, ami ellentmondás.

Lássuk most az általános esetet. Graham példája tetszőleges számú gép esetén olyan feladathalmaz, ahol az optimum értéke $3m$. A munkák száma $2m + 1$. Az első $2m$ számú munka optimális elhelyezése ugyanaz, mint amit ahova az LPT algoritmus teszi őket, és ekkor minden gépen két munka van. Most alkalmazva a 4.3. Lemmát $k = 3$ esetére és az első $2m$ munkára, az első $2m - 2$ munkát az $LPT(3)'$ ugyanoda teszi, mint ahova azok az LPT algoritmusnál kerülnek. Az utolsó három egyforma hosszúságú munkát már nem tudjuk jobban elhelyezni, mint az LPT, így kapjuk a $4m - 1$ átfutási időt. Emiatt $R_m(LPT(3)') \geq \frac{4m-1}{3m}$. Tegyük fel, hogy van olyan feladathalmaz, ahol az optimális megoldás értéke $3m$ egység, míg az $LPT(3)'$ algoritmus által adott megoldás értéke több, mint $4m - 1$. A legrövidebb téglalap magassága több mint m , emiatt minden optimális gépen legfeljebb két feladat van. Alkalmazva az előző lemmákat, az $LPT(3)'$ algoritmus optimális megoldást határoz meg, ami ellentmondás. \square

5. Az $LPT(4)'$ algoritmus elméleti hatékonysága

5.1. A három gép esete

Az előbbi bizonyítási technika sajnos az $LPT(4)'$ algoritmus esetén már nem működik, mert a 4 legkisebb munka hosszúsága a (2) példában már nem egyforma. Az $LPT(k)$ (vessző nélküli) algoritmus esetén belátható, hogy például három gép esetén az $LPT(3)$, $LPT(4)$, $LPT(5)$ és $LPT(6)$ algoritmusok elméleti hatékonysága megegyezik az LPT elméleti hatékonyságával, $LPT(7)$ volt az első, amelynek az elméleti hatékonysága javult az előzőekhez képest. Most, a vesszős algoritmusnál más a helyzet. Az előbbi $T = \{5, 5, 4, 4, 3, 3, 3\}$ feladathalmaz esetében $LPT(3)$ még ugyanazt az ütemezést készíti el mint az LPT, de $k = 4$ esetén már olyan ütemezést kapunk, amikor a teljes átfutási idő nem 11, hanem csak 10, $k = 5$ és $k = 6$ esetén pedig már optimális megoldást kapunk. Több gép esetén is hasonló szituáció tapasztalható, amiből azt sejtjük hogy $k \geq 4$ esetén a vesszős algoritmus elméleti hatékonysága jobb mint az LPT elméleti hatékonysága (tetszőleges gépszámnál). A cikk további részében ezt bizonyítjuk be, és pontos becslést adunk $LPT(4)'$ elméleti hatékonyságára. Szükségünk lesz a következő előkészítésre:

5.1. LEMMA. *Legyen a gépek száma $m \geq 3$, valamint $k \geq 4$. Legyen T olyan minimális ellenpélda, ahol $q = 3m - 3$, és $p > 4m - 5$. Helyezzük el $T \setminus \{A\}$ elemeit az $LPT(k)'$ algoritmus szerint. Ekkor nincs olyan gép, amelyiknek az átfutási ideje legalább akkora, mint valamely optimális gép átfutási ideje.*

Bizonyítás. Hajtsuk végre az $LPT(k)'$ algoritmust $T \setminus \{A\}$ -ra. Ekkor bármelyik gépre téve az A munkát a gép átfutási ideje legalább p lesz. Tegyük fel, hogy a P_i gép átfutási ideje legalább akkora, mint valamely optimális gép ideje. Tegyük az A munkát egy másik, mondjuk a P_j gépre. Ekkor P_j -n az átfutási idő több mint $4(m - 1) - 1$. Ez azt jelenti, hogy a P_j gépen levő, az optimumértékhez viszonyított

$m - 2$ egységnyi többlet a többi $m - 2$ gépen jelentkezik hiányként, így ezek közül van olyan gép, mondjuk P_i , ahol az átfutási idő kisebb mint $3m - 4$. Ha erre a gépre tennénk az A munkát, az átfutási idő több lenne mint $4m - 5$, emiatt $A > m - 1$. Emiatt minden optimális gépen legfeljebb két munka van, ami a 4.5. Lemma miatt lehetetlen, mert akkor az algoritmusunk optimális megoldást határoz meg. \square

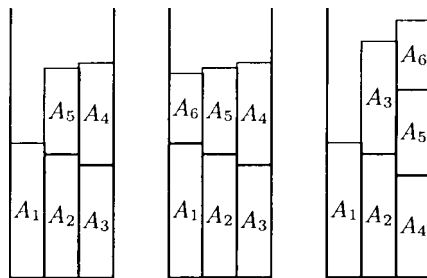
5.2. LEMMA. Legyen a gépek száma $m \geq 3$. Legyen \mathcal{T} olyan ellenpélda, ahol $q = 3m - 3$, és $p > 4m - 5$. Ekkor nincs olyan optimális gép, amelyiken csak egyetlen munka lenne. Továbbá helyezzük el $\mathcal{T} \setminus \{A\}$ elemeit az LPT(k)' algoritmus szerint. Ekkor minden gépre legalább két munka került.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy az optimális ütemezésnél egy munka, mondjuk B egyedül van, és ez a heurisztikus algoritmusnál a P_i gépre kerül. Itt most legalább akkora az átfutási idő mint B optimális gépén, és az előző lemma miatt ellentmondást kaptunk. Most nézzük az állítás második részét. Hajtsuk végre az LPT(k)' algoritmust $\mathcal{T} \setminus \{A\}$ -ra. Tegyük fel, hogy a P_i gépen csak egy munka van, a B munka. Ha ide tesszük még A -t, akkor ez több lesz mint $4m - 5$, ezért a B munka az optimális ütemezésnél is egyedül volt. Az előbb belátott rész miatt most is ellentmondást kaptunk. \square

Az előző lemma alapján feltehető, hogy ha \mathcal{T} olyan ellenpélda, ahol $q = 3m - 3$, és $p > 4m - 5$, akkor minden optimális gépen legalább kettő munka van. Másrészt mivel $A > \frac{m}{m-1}(m-2) = m-1 - \frac{1}{m-1}$, minden optimális gépen legfeljebb három munka van.

Az alábbi lemmában megvizsgáljuk, hogy hova helyezi az algoritmus a három legnagyobb munkát. A lemmát később nem csak $m = 3$ gép esetén fogjuk alkalmazni, hanem több gép esetén is, akkor az utolsó három gépre.

5.3. LEMMA. Legyen $m = 3$, és $A_1 \geq A_2 \geq A_3 \geq A_4 \geq A_5 \geq A_6$ hat munka. Ekkor az LPT(4)' algoritmus a A_1 és A_2 munkákat különböző gépre ütemezi. Továbbá a A_3 munkát az algoritmus vagy az előzőektől különböző gépre teszi, vagy pedig a A_2 gépére kerül. Ez utóbbi esetben a hat munkára vonatkozó teljes átfutási idő $\max\{A_2 + A_3, A_4 + A_5 + A_6\}$, ami kisebb, mint $A_1 + A_6$.

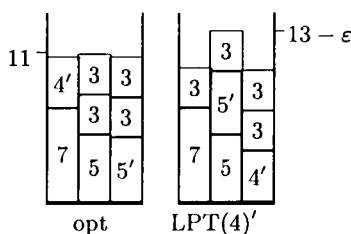


4. ábra

Bizonyítás. Az első öt munka elhelyezésekor a baloldali ábra szerinti elhelyezés nem rosszabb, mint ha A_2 is az első gépre kerülne. Emiatt feltehető, hogy A_1 az első, A_2 pedig a második gépre kerül. Nézzük hova kerülhet A_3 . Ha a hat munka optimális ütemezésénél minden gépre pontosan két munka kerül, akkor a 4.4 Következmény miatt ezek reguláris sorrendben lesznek, és $\text{LPT}(4)'$ ugyanígy helyezi el őket, ekkor tehát A_3 a harmadik gépre került. Ellenkező esetben, ha optimális ütemezésnél nem minden gépre kerül két munka, akkor van olyan gép ahol csak egy munka lesz, és ez az első gép, ahol a leghosszabb idejű munka van. A többi öt munka lesz a másik két gépen. Ekkor A_3 kerülhet a harmadik gépre (középső ábra), vagy a másodikra is. Ez utóbbi esetben az öt munkából a két leghosszabb egy gépen van, ezért a többi három munka: A_4 , A_5 és A_6 már az utolsóra fog kerülni (jobboldali ábra). A teljes átfutási idő $\max\{A_2 + A_3, A_4 + A_5 + A_6\}$, ami kisebb, mint $A_1 + A_6$, mert különben A_6 az első gépre került volna. \square

5.4. TÉTEL. Legyen a gépek száma $m = 3$. Ekkor $r_m(\text{LPT}(4)') = \frac{13}{11}$.

Bizonyítás. Az éles ellenpélda a következő ábrán látható.



5. ábra

Az első optimális gépen levő két munka hossza 7 és $4 - \varepsilon$, a középsőn 5, 3 és 3, az utolsón pedig $5 - \varepsilon$, 3, illetve 3. (Az ábrán a $4 - \varepsilon$ hosszúságú munkát $4'$ -vel, az $5 - \varepsilon$ hosszúságú munkát $5'$ -vel jelöltük.) Az $\text{LPT}(4)'$ végrehajtása során a 7 hosszúságú munka az első, az 5 hosszúságú a második gépre kerül. A következő lépésben ha kerülné munka az első gépre, ott legalább 10 lenne az új átfutási idő. Ennél kisebb lesz az ütemezés átfutási ideje, ha a következő négy munkát az ábrán látható módon helyezzük el, mert ekkor csak $10 - \varepsilon$ lesz az új átfutási idő. A többi munka helye már adódik. Végül, az ütemezés teljes átfutási ideje $13 - \varepsilon$, a hatékonyság aránya $\frac{13-\varepsilon}{11}$, aminek szupremuma a tétel állításában szereplő $\frac{13}{11}$.

Most tegyük fel, hogy \mathcal{T} olyan ellenpélda, ahol $q = 11$, és $p > 13$. Három esetet vizsgálunk meg aszerint, hogy mennyi azon gépek száma, amelyeken az optimális ütemezésnél három munka van. Mindegyik esetben teljesülnek a következők: $3 < A \leq 3\frac{2}{3}$, (az utóbbi azért, mert különben nem férhetne el három munka egy optimális gépen), amelyik optimális gépen három munka van, ott a legnagyobb munka hossza kisebb mint $11 - 3 - 3 = 5$.

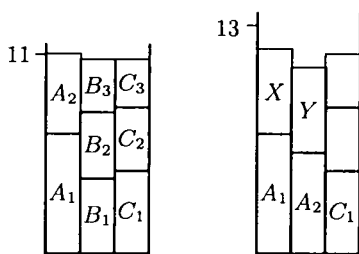
1. eset: Minden optimális gépen 3 munka van.

Legyen $A = 3 + \varepsilon$. Ekkor a leghosszabb munka hosszúsága legföljebb $11 - (3 + \varepsilon) - (3 + \varepsilon) = 5 - 2\varepsilon$. Az optimális gépeken a középső sorban levő munkák hossza kisebb mint 4, mert ha legalább 4 lenne, akkor a legalsó munka hossza is legalább 4, plusz még a fölül levő munka ami több mint 3, ez együtt meghaladná a 11-et. Emiatt az is igaz, hogy legalább hat olyan munka van, amelyek ideje kisebb mint négy, ezért a négy legkisebb munka mindegyikére is igaz ez. Helyezzük el az első 5 munkát az $LPT(4)'$ algoritmus szerint. Most egyik gépen sem lehet 4, vagy annál több munka, mert akkor ezek együttes hossza legalább 12 lenne, és ez ellentmond az 5.1. Lemmának. Két eset lehetséges. Egyik az, hogy egyik gépen 3, a másik kettő gépen egy-egy munka van. Amelyik gépeken egy darab munka van, tegyük oda a hátramaradt négy munka közül bármelyik kettőt: A három munka együttes ideje kisebb mint $5 + 4 + 4 = 13$, és ellentmondást kaptunk. Most tegyük fel azt, hogy az első öt elhelyezése után az első két gépen kettő-kettő, a harmadikon egy munka van. Legföljebb három olyan munka van, amelyeknek a hossza több mint 4. Emiatt feltehető, hogy például a második gépen levő két munka közül az egyik négynél kisebb. Tegyük most a legkisebb munkát az első gépre, egy bármelyik másikat a másodikra, és a maradék kettőt a harmadikra. A második és harmadik gépen megint $5 + 4 + 4 = 13$ -nál kisebb az átfutási idő. Az első gépen levő három munka hossza pedig legfeljebb $2 \cdot (5 - 2\varepsilon) + 3 + \varepsilon$, ami kisebb mint 13, megint ellentmondást kaptunk, mert mégis van olyan elhelyezése az utolsó négy munkának, amikor nem lépi túl a gépek átfutási ideje a 13-at.

2. eset: Az optimális gépeken 2–3–3 munka van.

Az első optimális gépen vannak az A_1, A_2 munkák, a többin három munka van. (5. ábra baloldali része) Legyen $A = 3 + \varepsilon$, így amelyik gépen három munka van, ezek között a munkák között a legnagyobb kisebb mint $5 - 2\varepsilon$. Hajtsuk végre az $LPT(4)'$ algoritmust $\mathcal{T} \setminus \{A\}$ -ra. Hét munkát helyeztünk el. Az A_1 és A_2 munka nem kerülhet egy gépre az 5.1. Lemma miatt. Emiatt külön gépre kerülnek, mondjuk az első gépre kerül A_1 , a másodikra pedig A_2 . Ha van olyan gép, amelyiken csak két munka van, mégpedig olyan optimális gépekről való munkák közül, amelyek három munka volt, akkor e két munka együttes hossza legfeljebb $2 \cdot (5 - 2\varepsilon)$, és így $2 \cdot (5 - 2\varepsilon) + 3 + \varepsilon = 13 - 3\varepsilon < 13$, ami ellentmondásra vezet, mert ide tehető még az A munka úgy, hogy a 13 egységnyi magasságot nem lépjük túl. Emiatt a harmadik gépen három darab munka van, ezek mindegyike az utolsó két optimális gépről való. Jut még egy-egy munka az A_1 és A_2 munkákon kívül az első és a második gépre. Ekkor tehát az A_1 gépén rajta kívül csak egy munka van, legyen ez a munka az X , ugyanígy legyen az A_2 gépén rajta kívül az Y . Erre az Y munkára $A_2 + Y + A > 13$, ahol $Y \leq 5 - 2\varepsilon$, és így $A_2 + 5 - 2\varepsilon + 3 + \varepsilon > 13$, amiből $A_2 > 5 + \varepsilon$, ebből pedig következik, hogy $A_1 < 6 - \varepsilon$, mert kettőjük hosszának összege legföljebb 11. Az is következik ebből, hogy A_2 a második legnagyobb munka, és A_1 a leghosszabb, és az is, hogy $\varepsilon < 0.5$, mert $2A_2 \leq 11$.

Rakjuk sorba az $\{A_1, A_2, B_1, B_2, B_3, C_1, C_2, C_3\}$ munkákat a végrehajtási idejük csökkenő sorrendjében, és legyen $\{T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6\}$ az első hat munka ebben az új sorrendben. Már tudjuk, hogy $T_1 = A_1$, és $T_2 = A_2$. A 5.3. Lemma miatt a har-

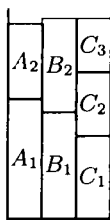


6. ábra

madik legnagyobb munka csak akkor kerülhetne a második gépre, ha $T_4 + T_5 + T_6$ kisebb, mint $T_1 + T_6$. Azonban ekkor $T_4 + T_5 < T_1$. A baloldali munkák mindegyikének hossza több mint 3, emiatt $A_1 > 6$ lenne, de láttuk már, hogy $A_1 < 6$. Emiatt a harmadik legnagyobb munka a harmadik gépre kerül. A harmadik legnagyobb munka vagy B_1 vagy C_1 lehet csak, legyen például az utóbbi. Tudjuk, hogy B_2, B_3, C_2, C_3 mindegyikének a hossza kisebb mint 4. Ha az első gépre tesszük az A munkát, meghaladjuk a 13 magasságot, vagyis $A_1 + X + A > 13$. Emiatt $6 - \varepsilon + X + 3 + \varepsilon > 13$, amiből kapjuk, hogy $X > 4$, ez az X csak B_1 lehet. Tekintsük a második gépet. Ha ide tesszük az A munkát, meghaladjuk a 13 magasságot: $A_2 + Y + A > 13$. Itt Y a B_2, B_3, C_2, C_3 munkák valamelyike, így $Y < 4$. Ezért az előbbi egyenlőtlenség bal oldalán $A_2 \leq 5.5, Y < 4, A = 3 + \varepsilon$, ezek összege több mint 13, amiből $\varepsilon > 0.5$ következik, és ez ellentmondás.

3. eset: Az optimális gépeken 2–2–3 munka van

Az első optimális gépen legyenek az A_1, A_2 munkák, a másodikon B_1, B_2 , a harmadikon pedig a C_1, C_2 , és C_3 munka.



7. ábra

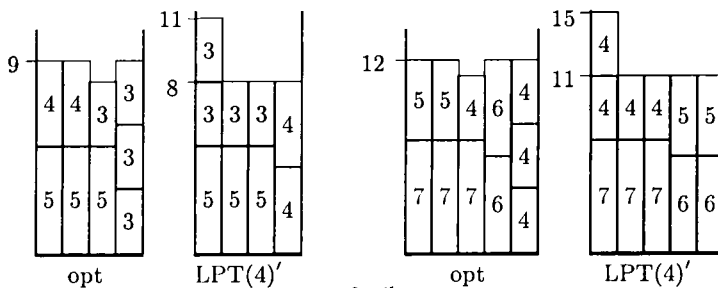
Feltehető, hogy az első két gépen reguláris sorrendben vannak a munkák, így A_1 a leghosszabb munka az A_1, A_2, B_1, B_2 munkák között. Helyezzük el az $LPT(4)'$ algoritmus szerint a hat leghosszabb munkát, ezek között szerepel A_1 is, kerüljön ő az első gépre. Még nem értük el a p magasságot. Ha most az első gépre került másik munka is, és ennek a hossza legalább akkora mint A_2 hossza, akkor alkalmazva az 5.1. Lemmát kapjuk hogy $\frac{p}{q} \leq \frac{4(m-1)-1}{3(m-1)} = \frac{7}{6}$, ellentétben azzal, hogy az

ellenpéldánknál $\frac{p}{q} = \frac{13}{11} > \frac{7}{6}$. Ha nincs az első gépen másik munka, akkor tegyük ide az utolsó munkát, A -t, ez legfeljebb akkora mint A_2 , és az ütemezés teljes átfutási ideje kisebb mint p , ez megint ellentmondás. Maradt az a lehetőség, hogy került az első gépre másik munka is, legyen X , de ennek az X munkának a hossza kisebb mint A_2 hossza. Ekkor A_2 szerepel a hat legnagyobb munka között, hiszen a nála kisebb X is szerepel. Cseréljük ki az X és A_2 munkákat. Ahova most X került ott csökkent az átfutási idő, az első gépen pedig $A_1 + A_2$ lett az átfutási idő, mindkettő kisebb mint p . Tegyük a legkisebb munkát A_1 gépétől különböző gépre, itt most nagyobb lesz az átfutási idő mint p , és a 5.1. Lemmában alkalmazott gondolatmenet szerint ellentmondást kapunk. \square

Ezzel a tételt beláttuk. Sőt, az utolsó esetben egy általánosabb tétel is kimondható:

5.5. TÉTEL. Legyen a gépek száma $m \geq 4$, és a munkák száma $2m + 1$. Ekkor az LPT(4)' algoritmus által kapott ütemezés és az optimumérték arányára teljesül a $\frac{p}{q} \leq \frac{4m-5}{3m-3}$ egyenlőtlenség. Továbbá a jobboldali konstans a lehető legkisebb.

Bizonyítás. A becslés élességét igazoló példát a következő módon kapjuk: Vegyük Graham példáját $m - 1$ gép esetére. Vegyünk most még egy gépet, és ezen legyen egy $2m - 3$, valamint egy $m - 1$ méretű munka. Könnyen látszik, hogy LPT(4)' a reguláris sorrendben teszi le a munkákat az utolsó négy egyforma hosszú munka kivételével. Ekkor az első három gép kivételével mindegyiknek az átfutási ideje $3m - 4$, az első háromé ennél $(m - 1)$ -gyel kisebb. Már nem tudjuk jobban az utolsó négy munkát elhelyezni, mint hogy három kerül az első három gépre, egy pedig akárhova. Az ütemezés teljes átfutási ideje $4m - 5$ lesz. Az alábbi ábrán láthatók az éles ellenpéldák $m = 4$, illetve $m = 5$ esetén.



8. ábra

Most lássuk be, hogy az előbbi arány legfeljebb ekkora. Feltehető, hogy az első $m - 1$ optimális gépen két-két munka van, és ezek a regulális sorrend szerint helyezkednek el, az utolsó optimális gépen pedig három munka van. Az első gépen levő munkák legyenek A_1 és A_2 , ($A_1 \geq A_2$), az utolsó gépen pedig legyen C_1 , C_2 , és C_3 . A négy legrövidebb idejű munka között van A_2 , mert nála csak a C betűs munkák lehetnek kisebbek. Szintén teljesül az, hogy A_1 szerepel a $2m - 3$ darab legnagyobb munka között, mert van négy másik munka, amelyek hossza az övénel

nem nagyobb. Helyezzük el az $LPT(4)'$ algoritmus által a $2m$ darab legnagyobb munkát, kerüljön A_1 az első gépre. A bizonyítás további része az előző tétel bizonyításának megfelelő részével megegyezik. \square

Megjegyzés. Az 5.4. Tételben az élességet bizonyító ellenpélda most nem Graham példájának valamilyen módosításából származik, másrészt a $\frac{13}{11}$ hatékonysági érték jobb mint az LPT vagy $LPT(3)'$ hatékonysági szorzója, mert az $\frac{11}{9}$.

Az 5.4. Tételben annak az esetnek a vizsgálata volt a legbonyolultabb, amikor 2, 3 és 3 munka volt az optimális gépeken. Ez azért van, mert az éles ellenpélda is ebbe az esetbe tartozott, másrészt belátható, hogy a másik két esetben, tehát amikor 3, 3 és 3, vagy pedig 2, 2 és 3 munka van az optimális gépeken, a legrosszabb hatékonyságú ellenpélda aránya $\frac{13}{11}$ -nél kisebb, pontosabban $\frac{7}{6}$ -dal egyenlő. Ez utóbbi állítás bizonyítását itt nem részletezzük.

5.2. A négy gép esete

5.6. TÉTEL. Legyen a gépek száma $m = 4$. Ekkor $r_m(LPT(4)') = \frac{11}{9}$.

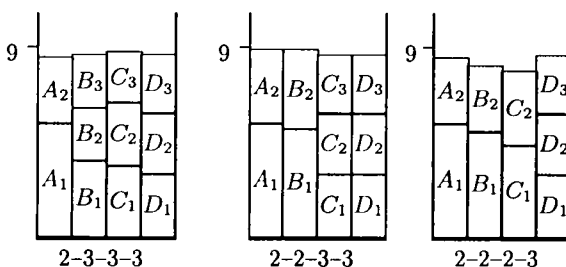
Bizonyítás. A $\frac{11}{9}$ -es (éles) ellenpélda a 8. ábra baloldali részén látható. Másrészt tegyük fel, hogy a \mathcal{T} ellenpélda esetén $q = 9$, és $p > 11$. A 4.5. és 5.2. Lemmák miatt mindegyik optimális gépen vagy kettő, vagy három munka van, és van olyan optimális gép, ahol három munka van. Négy esetet fogunk megvizsgálni, aszerint, hogy mennyi azon gépek száma, amelyeken az optimális ütemezésnél három munka van. Mindegyik esetben teljesülnek a következők: $2\frac{2}{3} < A \leq 3$, amelyik optimális gépen három munka van, ott a legnagyobb munka kisebb mint $3\frac{2}{3}$. Az $LPT(4)'$ algoritmust $\mathcal{T} \setminus \{A\}$ -ra végrehajtva a kapott átfutási idők mindegyike több mint 8. Emiatt a téglalapok összterülete $4 \cdot 9$ -nél legfeljebb 1-gyel kisebb, és emiatt minden optimális gép átfutási ideje is legalább 8.

1. eset: Minden optimális gépen 3 munka van.

A legnagyobb hosszúságú munka hossza legfeljebb $9 - 2 \cdot 2\frac{2}{3} = 3\frac{2}{3}$. Hajtsuk végre az $LPT(k)'$ algoritmust $\mathcal{T} \setminus \{A\}$ -ra. Mivel az elhelyezett munkák száma 11, van olyan gép, ahova legfeljebb két munka jutott. Ezek együttes hosszúsága legfeljebb $7\frac{1}{3}$. Ha ide tesszük még az A munkát, az együttes hosszúság több lesz mint 11, ezért $A > 3\frac{2}{3}$, ami ellentmondás.

2. eset: Az optimális gépeken 2–3–3–3 munka van.

Az első optimális gépen vannak az A_1, A_2 munkák, a többin három munka van. Tudjuk hogy $A > 2\frac{2}{3}$. Amelyik gépen három munka van, ezek között a munkák között a legnagyobb legfeljebb $9 - 2A$. Hajtsuk végre az $LPT(k)'$ algoritmust $\mathcal{T} \setminus \{A\}$ -ra. Tíz munkát helyeztünk el. Az A_1 és A_2 munka nem kerülhet egy gépre az 5.1. Lemma miatt, emiatt külön gépre kerülnek. $A_2 \leq 4.5$. Ha A_2 gépén rajta kívül csak egy munka van, akkor valamely X munkára $A_2 + X + A > 11$, ahol $X \leq 9 - 2A$, és így $4.5 + 9 - A > 11$ vagyis $A < 2.5$ lenne. Emiatt A_2 gépén rajta kívül még



9. ábra

legalább két munka van, A_1 gépén is van rajta kívül még legalább egy munka. Emiatt van olyan gép, amelyiken csak két munka van, mégpedig olyan optimális gépekről való munkák közül, amelyekeken három munka volt. E két munka együttes hossza legfeljebb $2(9 - 2A)$, és így $2(9 - 2A) + A > 11$, vagyis $A < 2\frac{1}{3}$, ami megint ellentmondás.

3. eset: Az optimális gépeken 2-2-3-3 munka van.

Az első optimális gépen legyenek az A_1 , A_2 munkák, a másodikon B_1 , B_2 , a többin három munka van. Feltehető, hogy az első két gépen reguláris sorrendben vannak a munkák. A_1 és B_1 a két leghosszabb munka, LPT(4)' során ezek külön gépre, mondjuk az első két gépre kerülnek. Az 5.1. Lemma miatt a B_2 munka egyik előbbi gépre sem kerülhet, ő tehát a harmadik gépre kerül. Amelyik optimális gépen két munka van, e két munka közül a nagyobbik hossza több mint 4, a harmadik és negyedik optimális gépről valóak hossza kisebb mint $3\frac{2}{3}$, emiatt $B_2 > 4$. Ha B_2 gépén még két másik munka is lenne, az együtt több mint $4 + 2 \cdot 2\frac{2}{3} > 9$, ami a 4.5. Lemma miatt lehetetlen. így B_2 gépén rajta kívül csak egy másik munka van. Ez nem lehet a harmadik vagy negyedik optimális gépről való, mert akkor az előző esetben látott módon $B_2 + X + A > 11$, amiből ellentmondást kapunk. Vagyis B_2 gépén rajta kívül nem lehet más, mint az A_2 munka, és egyben az is igaz, hogy B_2 a harmadik, A_2 pedig a negyedik legnagyobb munka. Most az 5.3. Lemmát az utolsó három gépre alkalmazva ebből következik, hogy B_1 és a hetedik legnagyobb munka hosszának összege nagyobb, mint e négy munka közül valamelyik háromnak az összege, emiatt $B_1 > 2 \cdot 2\frac{2}{3} = 5\frac{1}{3}$, de akkor $B_2 < 3\frac{2}{3}$, ami ellentmondás, hiszen láttuk már korábban, hogy $B_2 > 4$.

4. eset: Az optimális gépeken 2-2-2-3 munka van.

Már korábban láttuk (5.5. Tétel), hogy ebben a szituációban a hatékonyság értéke nem lehet rosszabb mint $\frac{4m-5}{3m-3}$, ami most négy gép esetén $\frac{11}{9}$. \square

5.3. Öt vagy több gép esete

5.7. LEMMA. Legyen a gépek száma $m \geq 5$. Legyen \mathcal{T} olyan ellenpélda, ahol $q = 3(m-1) = 3m-3$, és $p > 4(m-1) - 1 = 4m-5$. Helyezzük el $\mathcal{T} \setminus \{A\}$ elemeit az $\text{LPT}(4)'$ algoritmus szerint. Ekkor egyik gépen sincs kettőnél több munka.

Bizonyítás. Legyen először a gépek száma $m = 5$, ekkor $q = 12$, és $p > 15$. Legyen $A = 3\frac{3}{4} + \varepsilon$, ahol $\varepsilon > 0$. Tegyük fel, hogy a P_i gépen legalább három munka van. Tegyük az A munkát egy másik, mondjuk a P_j gépre. Ekkor P_j -n az átfutási idő több mint 15. A P_i gépen az átfutási idő több mint $3(3\frac{3}{4} + \varepsilon) = 11\frac{1}{4} + 3\varepsilon$, amiatt a maradék három gép valamelyikén az átfutási idő kisebb mint $11\frac{1}{4} - \varepsilon$, ekkor viszont ide még beférne a legkisebb munka, ellentmondást kaptunk.

Ehhez hasonlóan adódik a bizonyítás ötnél több gép esetére. Legyen a 2.4. Lemma alapján $A = \frac{m}{m-1}(m-2) + \varepsilon = m-1 - \frac{1}{m-1} + \varepsilon$, ahol $\varepsilon > 0$. Ha a P_i gépen legalább három munka van, akkor tegyük az A munkát egy másik gépre, amilyen ekkor az átfutási idő több mint $4m-5$. A többi gép átfutási idejének átlaga kisebb mint $3m-3 - \frac{m-2}{m-1} = 3m-4 + \frac{1}{m-1}$. A P_i gépen három munka van, ezek együttes ideje több mint $3m-3 - \frac{3}{m-1} + 3\varepsilon$, ami az előbbi átlagnál $\frac{m-5}{m-1} + 3\varepsilon$ -nel több. Emiatt a maradék $m-2$ gép valamelyikén az átfutási idő kisebb mint $3m-4 + \frac{1}{m-1} - \frac{m-5}{(m-2)(m-1)} - \frac{3\varepsilon}{m-2}$. Ha ehhez hozzáadjuk az A munka idejét, az együtt több mint $p = 4m-5$ kell hogy legyen:

$$3m-4 + \frac{1}{m-1} - \frac{m-5}{(m-2)(m-1)} - \frac{3\varepsilon}{m-2} + m-1 - \frac{1}{m-1} + \varepsilon > 4m-5$$

Ezt rendezve kapjuk, hogy $\varepsilon > \frac{1}{m-1}$, amiből $A > m-1$ következik. Ez ellentmondás, mert akkor három munka együttes ideje több mint $3m-3$. \square

Az előző lemma miatt feltehető, hogy a munkák száma pontosan $2m+1$, egy optimális gépen három, a többin kettő munka van.

5.8. TÉTEL. Legyen a gépek száma $m \geq 5$. Ekkor $r_m(\text{LPT}(4)') = \frac{4m-5}{3m-3}$.

Bizonyítás. Az állítás az előző lemma és az 5.5. Tétel következménye. \square

Megjegyzés. Az előbbieken beláttuk, hogy $\text{LPT}(4)'$ algoritmus elméleti hatékonysága tetszőleges gépszám esetén jobb, mint az LPT algoritmus elméleti hatékonysága, pontosabban ugyanakkora, mint az LPT hatékonysági szorzója $m-1$ gép esetén, ami kisebb, mint LPT szorzójának értéke m gép esetén. Az is következik ebből, hogy az $\text{LPT}(4)'$ algoritmus elméleti hatékonysága minden gépszám esetén jobb, mint az $\text{LPT}(4)$ (vessző nélküli) algoritmus elméleti hatékonysága, más szóval, valóban javítottunk az $\text{LPT}(k)$ algoritmuson.

Még annyit jegyezzünk meg, hogy három gép esetén belátható, (a bizonyításra most itt nem térünk ki), hogy az $\text{LPT}(5)'$ és $\text{LPT}(6)'$ algoritmusok elméleti hatékonysága $\frac{7}{6}$. Az előbbieken alapján azt sejtjük, hogy tetszőleges gépszám esetén ha

k -t növeljük, az elméleti hatékonyság nem romlik. Másrészt könnyen látható, hogy $R_m(\text{LPT}(k)')$ a k paraméter növelésével 1-hez tart:

5.9. TÉTEL. $\lim_{k \rightarrow \infty} R_m(\text{LPT}(k)') = 1$.

Bizonyítás. Tekintsünk egy tetszőleges (p/q) ellenpéldát, ahol $p = \alpha q$ valamely 1-nél nagyobb α -ra. Ekkor a legkisebb idejű munka időtartama legalább $\frac{m}{m-1}(p-q) = \frac{m}{m-1}(\alpha-1)q$, ezért egy-egy optimális gépre legfeljebb $\lfloor \frac{m-1}{(\alpha-1)m} \rfloor$ számú munka lehet ütemezve, vagyis a munkák száma legfeljebb $\lfloor \frac{m-1}{\alpha-1} \rfloor$. Legyen a k paraméter értéke legalább ekkora, ez esetben optimális megoldást kell hogy kapjunk, vagyis tetszőleges (p/q) törtre elég nagy k esetén már nincs ilyen ellenpélda. \square

6. Numerikus eredmények

Illusztráció céljából közöljük az alábbi eredményeket, ahol kétféle összehasonlítást végeztünk: egyrészt az LPT(k)' algoritmust az LPT, valamint LPT(k) algoritmusokkal hasonlítottuk össze, másrészt megvizsgáltuk az LPT(k)' algoritmus viselkedését néhány feladatosztályban, a k paraméter növelése esetén. A táblázatokban m a gépek számát, n a feladatok számát jelenti. Az első táblázatban a feladatok időtartamát minden esetben a $[9, 18]$ intervallumból választottuk egyenletes eloszlás szerint, lefelé, egész számmá való kerekítéssel. Azt vizsgáltuk, hogy az egyes algoritmusok száz esetből hányszor adtak minimális eredményt.

	m	n	LPT	LPT(k_1)	LPT(k_2)'	k_1	k_2
1.	2	14	91	97	100	10	10
2.	3	15	85	85	85	10	10
3.	5	20	78	57	72	10	10
4.	2	15	0	0	100	10	10
5.	3	16	0	0	100	10	10
6.	5	21	0	3	99	10	10
7.	2	15	16	14	99	10	4
8.	3	16	21	26	96	10	4
9.	5	21	7	24	95	10	6

Az LPT, LPT(k), és LPT(k)' algoritmusok összehasonlítása

A következőket tapasztaljuk: Ha a gépek száma osztója a feladatok számának, (első három feladatosztály), az algoritmusok hatékonysága között nincs lényeges különbség: ilyenkor az egyszerű LPT is olyannyira az optimumhoz közeli eredményt

ad, hogy ezen a másik két algoritmus nem tud lényegesen javítani. A következő három feladatosztály majdnem ugyanaz mint az első három, de a feladatok számát mindhárom esetben eggyel növeltük. Ennek eredménye az lett, hogy az $LPT(k)'$ algoritmus egészen rendkívüli módon jobb a másik kettőnél: a 4. és 5. példa esetén mind a száz esetben az az $LPT(k)'$ jobb eredményt adott mint a másikak. Az utolsó három feladatosztály megegyezik a középső hárommal, csak annyi változás történt, hogy az $LPT(k)'$ paraméterét csökkentettük (négyre, illetve hatra), míg az $LPT(k)$ paramétere 10 maradt. Ennek eredményeképpen $LPT(k)'$ egyrészt felgyorsult, másrészt némileg romlott (a másik kettő kezd feljönni hozzá), de még így is sokkal hatékonyabb maradt mint a másik kettő algoritmus. Jegyezzük meg, hogy a mai modern számítógépek nagyságrendekkel gyorsabbak, mint amelyek a [6] cikk keletkezésének idején voltak. Vagyis igaz ugyan, hogy az $LPT(k)$ esetén csak egyszer, az algoritmus elején kell optimális megoldását számolni egy részfeladatnak, az $LPT(k)'$ esetében pedig sokszor, ez a mai számítógépekkel már hatékonyan implementálható.

A második táblázat annak illusztrálására szolgál, hogy mi történik, ha a gépek száma rögzített, és az $LPT(k)'$ algoritmus k paraméterét növeljük. A gépek és munkák számát itt is m , illetve n jelöli, a felső sorban a k paraméter növekvő értékei szerepelnek, és a feladatok időtartamát a $[p_1, p_2]$ intervallumból választottuk

	m	n	p_1, p_2	LPT	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
1.	2	31	9,18	0	2	1	4	6	26	33	67	78
2.	3	22	9,18	0	0	0	0	0	11	19	41	90
3.	3	22	5,19	0	0	18	21	38	69	81	90	97
4.	3	22	5,25	1	2	28	41	60	80	86	97	99
5.	4	21	9,18	0	0	0	0	1	5	11	31	90
6.	5	31	9,18	0	1	0	0	11	20	35	61	95
7.	3	27	9,18	88	75	80	71	68	77	67	76	84

Az első hat sorban arra látunk példát, amikor az algoritmus hatékonysága a k paraméter növekedésével együtt növekszik. Itt a feladatok n száma nem osztható a gépek m számával. A 3. és 4. esetek vizsgálatakor a $\frac{p_2}{p_1}$ tört értékét növeltük. Minden esetben növekvő az $LPT(k)'$ hatékonysága. A 7. példában a feladatok száma osztható a gépek számával. Itt, mint korábban is láttuk, nem javított az $LPT(k)$ algoritmuson a módosított $LPT(k)'$ algoritmus, legalábbis $k \leq 10$ esetén. Az utolsó három k -ra az $LPT(k)'$ hatékonysága azonban már növekvő tendenciát mutat: 67, 76 és 84 esetben kaptunk minimális megoldást a kilenc algoritmus által kapott megoldásokra vonatkoztatva. $k = 12$ -re viszont már 95-öt kapunk (ez a táblázatban nem szerepel).

Az $LPT(k)'$ algoritmus bonyolultsága, ugyanúgy mint az $LPT(k)$ -é, a k paraméter növelésével exponenciálisan növekszik. Ha azonban a k paraméter értékét

rögzítjük, az algoritmus lépésszáma $n \log n$, a kezdeti sorbarendezés miatt, a többi lépés n lineáris függvénye. A számítógépes program futása például öt gép, $k = 10$ és 30 munka esetén Pentium I típusú géppel kilenc-tíz másodpercig tartott. Hozzá kell tenni azonban azt, hogy ezek az adatok csak az illusztráció célját szolgálják; az algoritmus számítógépes realizációjakor lényegesen gyorsabban dolgozó program is készíthető. Elmondhatjuk, hogy az algoritmus hatékonysága a k paraméter növelésével növekszik, ha a gépek száma nem osztója a feladatok számának. Ellenkező esetben is javuló hatékonyság tapasztalható, de csak valamilyen nagyobb k értéktől kezdve.

Hivatkozások

- [1] Coffman, E. E. Jr., Garey, M. R. and Johnson, D. S., An application of bin-packing to multiprocessor scheduling, *SIAM J. Comput.* **7** (1981) 1–17.
- [2] Dósa, Gy., Általánosított Multifit típusú módszerek egyforma párhuzamos gépek ütemezésére, *Alkalmazott Matematikai Lapok* **19** (1999) 155–168.
- [3] Dósa, Gy., Általánosított Multifit típusú módszerek II, *Alkalmazott Matematikai Lapok* **20** (2000), 91–111.
- [4] M. R. Garey and D. S. Johnson, *Computers and intractability* (Freeman, New York, 1979).
- [5] Goldberg, R. R. and Shapiro, J., Extending Graham's result on scheduling to other heuristics, *Operations Research Letters* **29** (2001) 149–153.
- [6] Graham, R. L., Bounds on multiprocessor timing anomalies, *SIAM J. Appl. Math.* **17** (1969) 416–429.
- [7] Hall, L. A., "Approximation algorithms for scheduling", in: *Approximation Algorithms for NP-Hard Problems*, Ed. D. S. Hochbaum (PWS Publishing Company, MA, 1977), pp. 1–45.
- [8] Hochbaum, D. S. and Shmoys, D. B., Using dual approximation algorithms for scheduling problems: theoretical and practical results, *J. Assoc. Comput. Math.* **34** (1) (1987) 144–162.
- [9] Lawler, E. L., Lenstra, J. K., Rinnooy Kan, A. H. G. and Shmoys, D. B., "Sequencing and scheduling: algorithms and complexity", in: *Handbooks in Operation Research and Management Science*, Vol. 4 (North-Holland, Amsterdam, 1993), pp. 445–522.
- [10] Vizvári, B. and Demir, R., "It is Difficult to Find a Difficult Problem for the Scheduling of Identical Parallel Machines", Research Report, Department of Industrial Engineering of Bilkent University, IEOR-9212, 1992.
- [11] Vizvári, B., *Bevezetés a termelésirányítás matematikai elméletébe* (Egyetemi jegyzet, ELTE, 1992).

(Beérkezett: 2001. július 4.)

DÓSA GYÖRGY
VESZPRÉMI EGYETEM
dosagy@almos.vein.hu

VIZVÁRI BÉLA
ELTE OPERÁCIÓKUTATÁSI TANSZÉK
vizvari@math.elte.hu

ALGORITHM $LPT(k)'$ FOR SCHEDULING IDENTICAL PARALLEL MACHINES

GYÖRGY DÓSA AND BÉLA VIZVÁRI

This paper is devoted to some heuristics for the problem $P \parallel C_{\max}$. This problem is known to be NP-complete. Graham's list scheduling method is generalized in the following way: First a nonincreasing processing time order of the tasks is determined. Then the next two steps are iterated: 1: Find the best possible allocation of the next k tasks. 2: Assign only the next task accordingly to this schedule. We prove that this algorithm improves the theoretical efficiency of Graham's algorithm, and we also give some numerical results, as well.

SZILÁRDSÁGTANI TENZOROK SÍKGÖRBÉI

DR. NÉMETH FERENC

Budapest

A dolgozat szilárdságtani tenzorok olyan síkgörbéit ismerteti, amelyek a vasbeton lemezek törési elméletének kutatása során nagyon jó demonstrációs eszköznek bizonyultak. A tárgyalt görbék a tenzorok egyik tranformációs egyenletével írhatók le.

1. Bevezetés

A szilárdságtanban közismert fogalom a valamely pontban uralkodó feszültségi állapot, amelyet egy másodrendű feszültségi tenzorral lehet leírni. Ez általános térbeli esetben 3×3 -as, síkbeli esetben pedig 2×2 -es mátrixú. De ugyanilyen felépítésű a rugalmas testek valamely pontjában (annak kis környezetében) keletkező alakváltozási állapot tenzora, valamint a szilárd testek tehetetlenségi tenzora is. Továbbá ugyanilyen, de csak 2×2 -es mátrixú a síkidomok tehetetlenségi tenzora, valamint a hajlított lemezek nyomatéki tenzora, és a falak, tárcsák, héjak membránerejének tenzora is.

E tenzorok ábrázolására a szilárdságtanban ismert és használatos a Mohr-féle kör, amely szerkesztéses megoldásokra is alkalmas. Kevésbé ismert, a szerző által sok esetben előnyösebbnek talált, és tenzorkörös ábrázolásnak nevezett eljárás [1], mely ugyancsak szerkesztéses feladatmegoldásokat tesz lehetővé. A tenzorkörös ábrázolás mellett nagyon hasznosnak bizonyult a vasbeton lemezek törési elméletének kutatása során [2], [3], [4], a hajlító nyomatékok polágörbéje, ami tulajdonképpen a nyomatéki tenzor egyik tranformációs egyenletének ábrája.

Ez az egyenlet $m_\varphi = m_1 \cos^2 \varphi + m_2 \sin^2 \varphi$ alakú, ahol m_1 és m_2 a nyomatéki tenzor sajátértékei (főnyomatékai), m_φ pedig a hajlító nyomaték az 1-es fő-tengellyel φ szöget bezáró normálisú metszetben. Itt a polár tengely az 1. fő-tengely. Ha a polár tengely egy tetszőleges x tengellyel esik egybe, akkor $m_\varphi =$

$m_x \cos^2 \varphi + m_y \sin^2 \varphi + m_{xy} \sin 2\varphi$ alakú lesz a szóbanforgó transzformációs egyenlet. Ez az egyenlet ugyanolyan alakú görbét ír le, mint az előző egyszerűbb egyenlet, csak ferdék lesznek a tengelyek.

E cikkben a görbéknek a lehetséges alakjait és tulajdonságait fogjuk vizsgálni, e függvény matematikai elemzése útján. Célunknak az egyszerűbb függvényforma is megfelel.

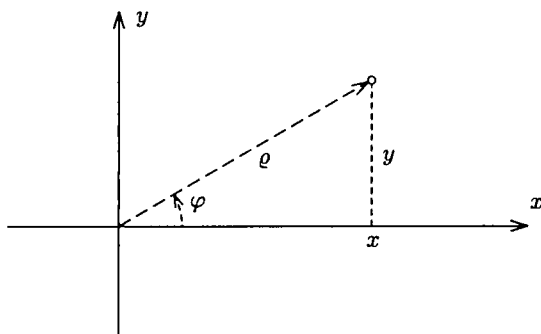
2. A vizsgált függvény

A vizsgált függvény polárkoordinátás alakban:

$$(2.1) \quad \rho = a \cos^2 \varphi + b \sin^2 \varphi$$

Az 1. ábrán a koordináta rendszerünket mutatjuk meg. Innen leolvasható: $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$. Ide behelyettesítve (2.1)-et, előállítható e függvény paraméteres alakja:

$$(2.2) \quad \begin{aligned} x &= a \cos^3 \varphi + b \sin^2 \varphi \cos \varphi \\ y &= a \cos^2 \varphi \sin \varphi + b \sin^3 \varphi. \end{aligned}$$



1. ábra

A derékszögű koordinátás függvényalak előállításához az (2.1) függvényből ki-
szöböljük ki a szögfüggvényeket $\cos \varphi = \frac{x}{\rho}$ és $\sin \varphi = \frac{y}{\rho}$ behelyettesítésével, akkor

$$\rho = a \frac{x^2}{\rho^2} + b \frac{y^2}{\rho^2},$$

innen

$$ax^2 + by^2 = \rho^3.$$

Mivel $\rho = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$, azért derékszögű koordinátákban az

$$(2.3) \quad ax^2 + by^2 - (x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} = 0$$

implicit alak adódik.

3. A tenzorgörbe jellegzetes alakjai

A görbe alakja az a és b mennyiségektől függ. Mindegyik esetben azonban mind az x , mind az y szimmetria tengely, amelyekben a metszéspontok $x = \pm a$, illetve $y = \pm b$ helyen vannak.

A polárkoordinátás egyenletet használva a görbület a

$$(3.1) \quad K = \frac{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''}{(\rho^2 + \rho'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

képletből számítható ki [6]. Felhasználva a

$$\rho' = (b - a) \sin 2\varphi$$

$$\rho'' = 2(b - a) \cos 2\varphi$$

deriváltakat, levezethető, hogy a tengelyekkel való metszéspontokban a következő képletek adják a görbületet:

$$(3.2) \quad x \text{ tengelyen: } K = \frac{3a - 2b}{a^2} \quad (a \neq 0)$$

$$(3.3) \quad y \text{ tengelyen: } K = \frac{3b - 2a}{b^2} \quad (b \neq 0).$$

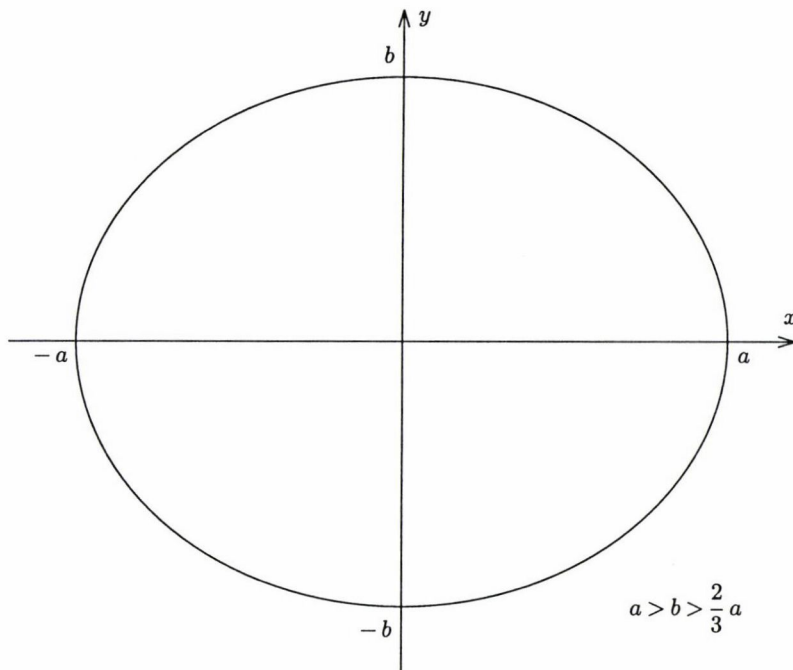
Lássunk néhány jellegzetes görbealakot. Mindegyik esetben az a mennyiséget pozitívnak és ugyanakkorának tekintjük, míg a b értéket $b = a$ -ból kiindulva csökkentjük, átmenve negatívba is, egészen $b = -a$ értékig.

1. eset: $b = a$. Ekkor a görbe a sugarú kör,

2. ábra: $a > b > \frac{2}{3}a$. A görbe ellipszis szerű, a és b féltengelyhosszakkal.

3. ábra: $b = \frac{2}{3}a$. E speciális esetben az y tengellyel való metszéspontban zérus a görbület. Ugyanakkor az x tengelynél a görbület $K = \frac{5}{3a}$. E képletek a (3.3) és (3.2) összefüggésekből vezethetők le.

4. ábra: $\frac{2}{3}a > b > 0$. A görbe piskóta formájú. Ezen az ábrán $b = 0,4a$. Az x tengelynél pozitív, míg az y tengelynél negatív a görbület. A két szakasz határán inflexiós pont, illetve a kettős szimmetria folytán pontok találhatók. Az inflexiós



2. ábra

ponthoz tartozó φ_1 polárszög a görbület (3.1) képletének számlálójában álló kifejezés zérus-voltából vezethető le. A φ_1 szög az alábbi egyenletből számítható ki:

$$(3.4) \quad (3b^2 - 2ab) \operatorname{tg}^4 \varphi_1 + (6a^2 - 10ab + 6b^2) \operatorname{tg}^2 \varphi_1 + (3a^2 - 2ab) = 0$$

Megjegyezzük, hogy ez az egyenlet a φ_1 -re csak az itt tárgyalt esetben (4. ábra) ad valós megoldást, tehát csak itt vannak inflexiós pontok. Az összes további esetben csak „látszólagos” az inflexió.

Levezethető, hogy y_{extr} szélső értékekhez tartozó polár szög a

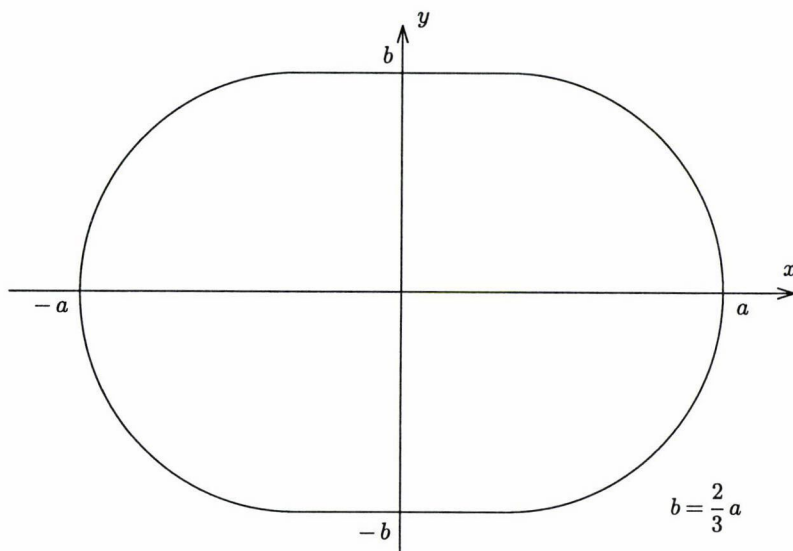
$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \sqrt{\frac{a}{2a - 3b}}$$

képletből számítható ki.

5. ábra: $b = 0$. Ez esetben kettős tojásgörbe adódik.

A polárszöget pozitív értelemben növelve 0-tól 2π -ig, a ρ polárkoordináta úgy változik, hogy a görbének az origóban kettős visszatérési pontja van, függőleges érintővel. A görbének itt tehát nincs inflexiója. A maximális y ordinátájú pontok polárszöge a $\varphi_0 = \arccot(\pm \sqrt{2}) + k\pi$, képletből számítható ki, ahol $k = 0, 1$. E pontok derékszögű koordinátáit pedig az

$$x_0 = \pm a \cos^3 \varphi_0 = \pm 0,5443a,$$



3. ábra

$$y_{\max} = \pm a \cos^2 \varphi_0 \sin \varphi_0 = \pm 0,3849a$$

képletek adják.

6. ábra: $a \cdot b < 0$. Az a és b ellentétes előjelű, itt $b = -0,4a$.

A görbe kettős lemniszkáta szerű. Az origó négyszeres pont, amelyben az érintők α szöge abból a feltételből vezethető le, hogy ott $\rho = 0$ kell legyen. Ily módon a

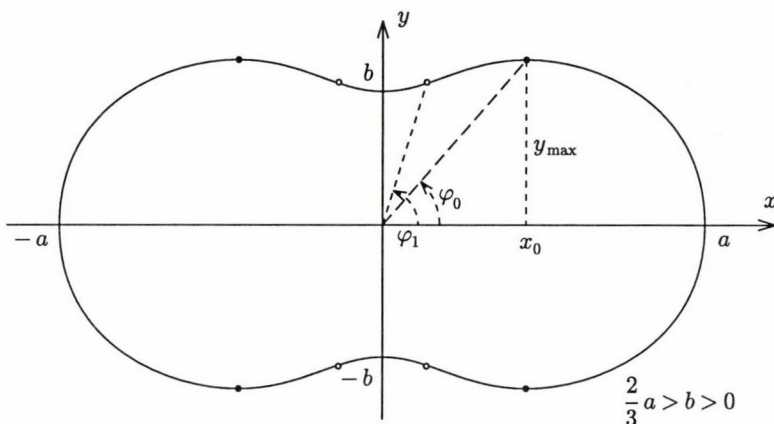
$$\operatorname{tg} \alpha = \pm \sqrt{-\frac{a}{b}}$$

képletet kapjuk az érintők szögének megállapítására. Az origóban nincs inflexió, pozitív értelemben növelve a φ szöget a görbe sehol sem megy át az érintő másik oldalára.

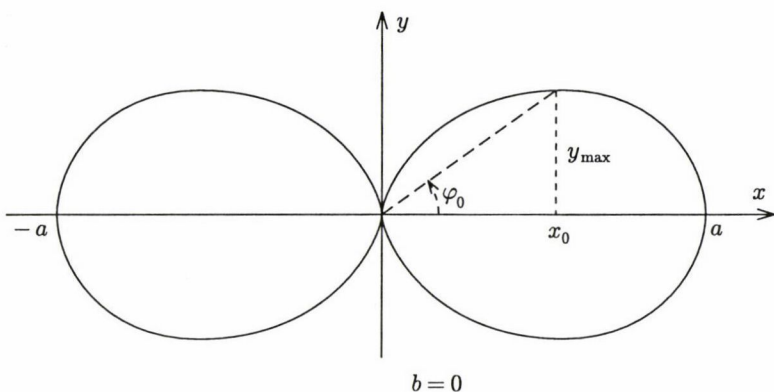
7. ábra: $b = -a$. A görbe négyszirmú rózsza formájú. Az origó négyszeres pont, itt az érintők az $y = \pm x$ egyenesek. Az origóban nincs a görbének inflexiója.

4. Példa az alkalmazásra

A vasbeton lemez egy pontjában adott az igénybevételi nyomatékok tenzora, amelynek hajlító nyomatéki komponense polár koordinátákban fölrakva az M betűvel jelölve látható a 8. ábrán. Ez azt jelenti, hogy minden irányban van valamekkora hajlító nyomaték. E tenzor főtengelei az 1 és 2 jelűek, főnyomatékai (sajátértékei) pedig m_1 és m_2 . A fölvevett ξ és η vasalási irányok esetén a méretező mérnöknek



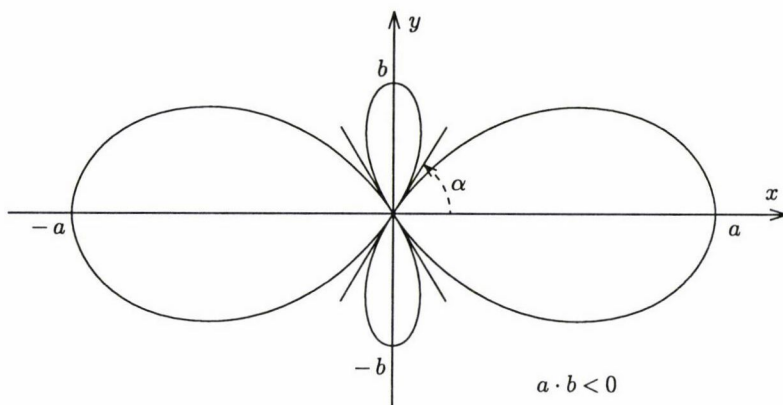
4. ábra



5. ábra

úgy kell megállapítani a szükséges vasmennyiségeket, hogy a törőnyomaték (a nyomaték bírás) minden irányban nagyobb, de legalább akkora legyen, mint az igénybevételi nyomaték. Egy úgy nevezett optimális méretezés esetén a törőnyomatékok tenzora, illetve annak hajlító nyomatéki komponensei az M^* görbét adják. Ennek főtengelei 1^* és 2^* , főnyomatékai m_1^* és m_2^* [5].

Látható, hogy a törőnyomaték görbéje semmilyen irányban sem kerül az igénybevételi görbén belül, nem metsz bele, minden irányban $m_i^* \geq m_i$. Hibás lenne a méretezés, ha lenne olyan irány, ahol az igénybevételi nyomaték nagyobb lenne a törőnyomatéknál: $m_i > m_i^*$. Ha pedig messze kívül fut a törőnyomatékok görbéje, akkor gazdaságtalan a méretezés, mert szükségtelenül nagy a nyomaték bírás. Értelmezhető a tartaléknyomatéki tenzor: $M^0 = M^* - M$, amelynek komponensei $m_i^0 = m_i^* - m_i$.



6. ábra

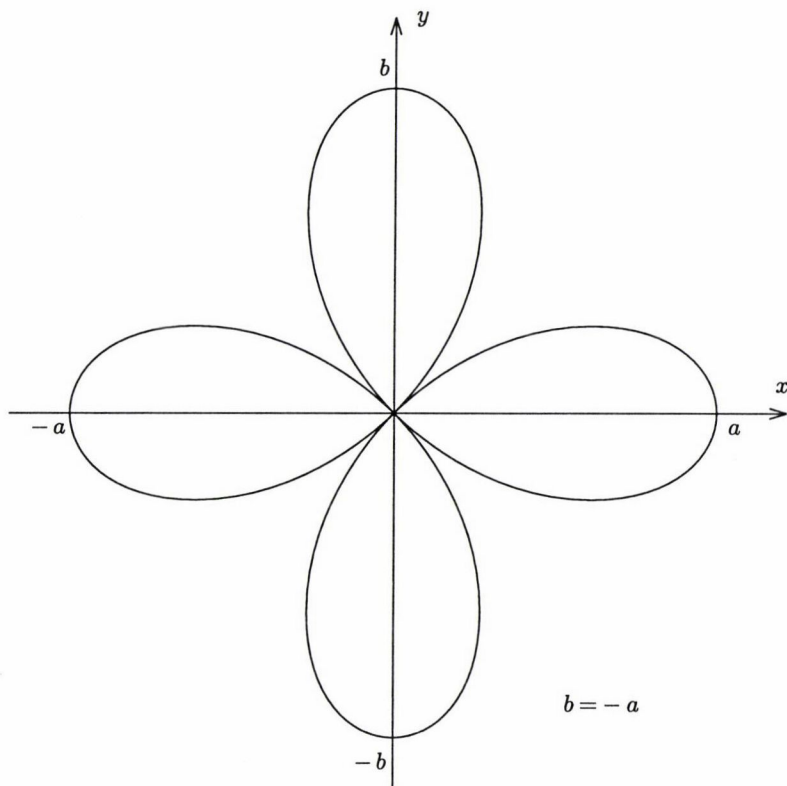
Ábránkon ennek főtengelei 1^0 és 2^0 , főnyomatékai m_1^0 és $m_2^0 = 0$. Mivel az utóbbi nulla, a 2^0 irányában törés következik be, ez még megfelelő és gazdaságos méretezést jelent. És mivel $m_1^0 = \min!$, a méretezés optimális.

A fent leírtak részletezése, bizonyítása meghaladja e cikk kereteit. E példa csak érzékeltetni kívánja a tárgyalt tenzor-görbék hasznosságát.

Még egy bonyolultabb példát is bemutatunk a 9. ábrán az [5] cikk alapján. Itt a vasbeton lemez vizsgált pontjában az igénybevételi főnyomaték az 1 tengely irányában pozitív, a 2-es főirányban pedig negatív. (A deformálódott lemez főgörbületei ellentétes előjelűek.) Így az igénybevételi nyomatéktenzor polárgörbéje kettős lemniszkáta szerű (az ábrán sraffozással kiemelve). Ilyen esetben a vasbeton lemezt az alsó és felső rétegében egyaránt el kell látni acélhálóval. Az alsó hálót a pozitív nyomatékokra kell méretezni, a felsőt a negatív nyomatékokra. Törőnyomatéki tenzor most kettő is adódik, az M_{ud} a pozitív törőnyomatékok polárgörbéje, az M'_{ud} a negatív nyomatékoké. E példában mindkét törőnyomatéki tenzor polárgörbéje kettős tojásgörbe. A göbéket számítógéppel rajzoltattuk föl, az érintési pontok automatikusan kiadódtak. A törőnyomatékok görbéje kívülről érinti az igénybevételek görbéit, ez azt jelenti, hogy mind a pozitív, mind a negatív nyomatékokra helyes a méretezés. Az érintési pontok iránya azért is fontos, mert így megkapjuk az alsó és a felső törésvonal irányát is, ami a további méretezés szempontjából hasznos információ.

Megemlítjük még, hogy nyomatéki polárgörbék használatát tudomásunk szerint először Lenkei Péter [7] javasolta, majd Cardenas és Sozen kutatási jelentésükben egyszerűbb esetekben alkalmazták is [8]. Azonban olyan alapos elemzés és sokoldalú felhasználás, mint ami e cikkben látható, még nem történt.

A polárgörbék használata szemléletessé teszi azt, ha a méretezés helyes, vagy hibás. Különösen hasznos ez a kutató számára, ha valamilyen méretezési eljárás kifejlesztésén dolgozik, vagy ha egy új méretezési eljárás helyességéről, vagy hibá-

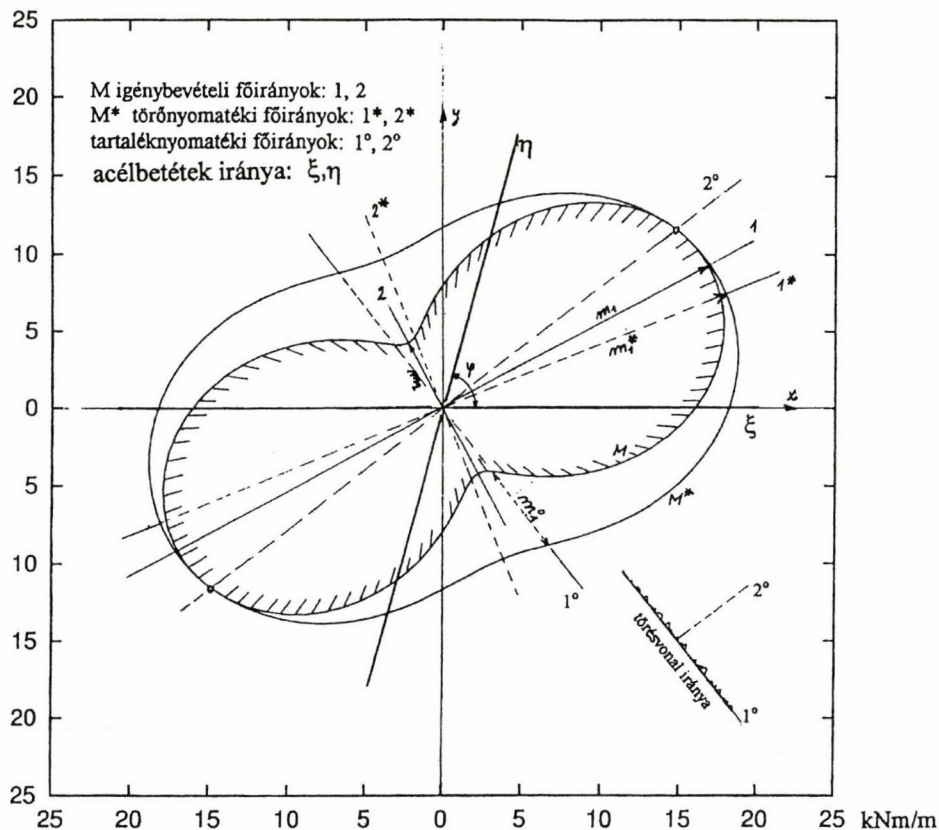


7. ábra

járól kell érvelni, mint ahogy a szerző tette ezt egy kandidátusi védésen, vagy az Eurocod bírálatában [5].

Irodalomjegyzék

- [1] Németh, F., Ferde vasalású vasbeton lemez méretezése adott pontban elliptikus hajlításra, *Építés és Közlekedéstudományi Közlemények* **XII./3-4** (1968) 373-394.
- [2] Németh, F., Optimum Design of Reinforced Concrete Slabs Subjected to Biaxial Moments of the Same Sign, *Acta Technica* **87/3-4** (1978) 319-346.
- [3] Németh, F., "Design of Steel Bars of Reinforced Concrete Slabs", in: *IASS Symposium, Darmstadt*, Vol. 1. (Werner Verlag Düsseldorf, 1978), pp. 177-188.
- [4] Németh, F., Some Methods of Tensor Representation and Construction, *Periodica Polytechnica C.E.* **25/3-4** (1981) 191-200.
- [5] Németh, F., Vasbeton lemezek vasalásának optimális méretezése és az Eurocode szerinti méretezés összehasonlítása, *Vasbetonépítés* **4** (2001) 107-114.

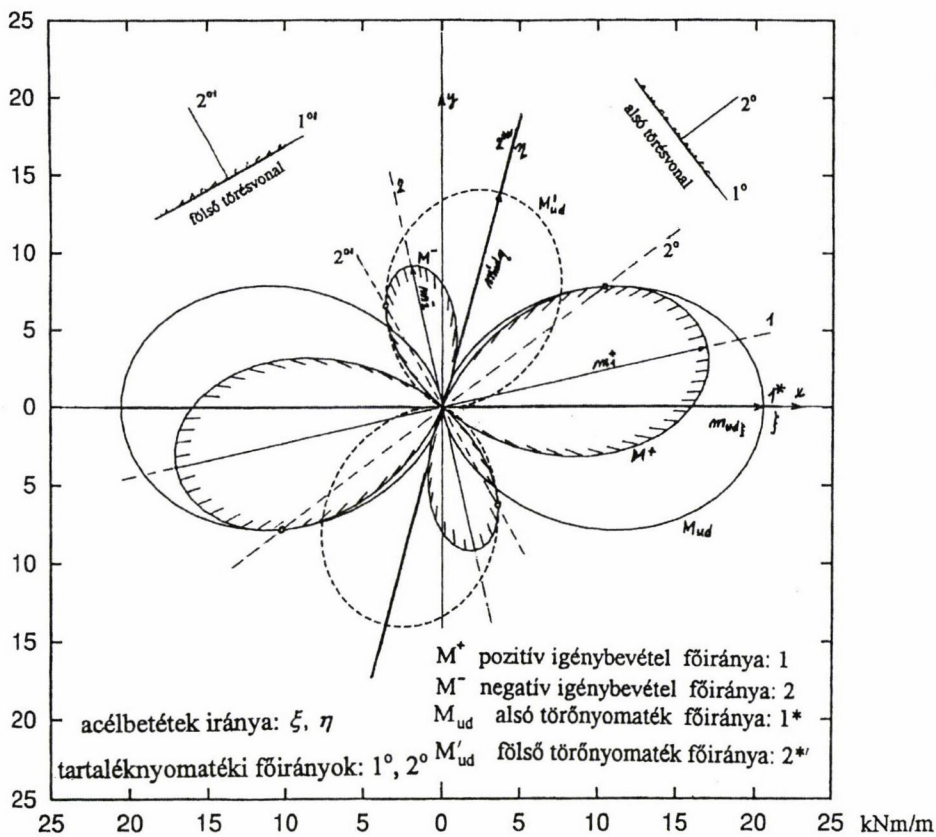


8. ábra

- [6] Bronstejn, Szemengyajev, Musiol, Mühlig, *Matematikai Kézikönyv* (TypoTeX Kiadó, Budapest, 2000).
- [7] Lenkei, P., Discussion on Articles Published by Prof. Save, Massonnet and Janas, *Magazine of Concrete Research*, Vol. 19, No. 61 (December 1967).
- [8] Cardenas, A. and Sozen. M. A., Strength and Behavior of Isotropically and Nonisotropically Reinforced Concrete Slabs Subjected to Combinations of Flexural and Torsional Moments, *University of Illinois, Civil Engineering Studies. Structural Research Series*, No. 336 (1968).

(Beérkezett: 2002. január 29.)

nemeth@ep-mech.bme.hu



9. ábra

PLANE CURVES OF MECHANICS TENSORS

DR. FERENC NÉMETH

A type of plane curves is analysed, which is very useful to demonstrate the optimum design of reinforced concrete bended slabs. The treated curves are represented by one of the transformation equation of mechanics tensors.

ALSÓ ÉS FELSŐ KORLÁTOK A CSOPORTOS ÉLETBIZTOSÍTÁSI AKTUÁRIUS JELENÉRTÉKRE EGYÜTTES VALÓSZÍNŰSÉGELOSZLÁSOK FIGYELEMBEVÉTELÉVEL

HORVÁTH ALICE ÉS PRÉKOPA ANDRÁS

Budapest

A csoportos életbiztosítási aktuárius jelenérték kiszámításához a csoportban szereplő egyének élettartamait a szakirodalomban általában független valószínűségi változóknak tekintik. A valóságban azonban az élettartamok igen gyakran sztochasztikusan összefüggőknek bizonyulnak és a tényleges együttes eloszlással számított aktuárius jelenérték jelentősen eltérhet attól az értéktől, amit a függetlenség feltételezésére támaszkodva nyerünk. Dolgozatunkban módszert adunk a jelenérték alsó és felső korlátainak számítására, miközben az élettartamok körében csak kis számú valószínűségi változó együttes eloszlásának ismeretét tételezzük fel. A korlátok a binomiális momentumproblémákra támaszkodva nyerhetők.

1. Bevezetés

Dolgozatunkban a Bowers et al. (1997) könyv fogalmait és jelöléseit használjuk. Egy adott egyén teljes élettartama valószínűségi változó, melyet a továbbiakban X , vagy (esetleg indexszel ellátott) más latin nagybetűvel jelölünk. Ha az egyén túlélte az x évet, akkor a hátralévő élettartamát a $T(x)$ szimbólum jelöli. A $T(x)$ valószínűségi változó eloszlása az $X \geq 0$ valószínűségi változó feltételes valószínűségeloszlásával adható meg. Ha X eloszlásfüggvényére bevezetjük az $F(x)$ jelölést, vagyis

$$(1.1) \quad F(x) = P(X \leq x), \quad x \geq 0,$$

továbbá bevezetjük még az

$$(1.2) \quad s(x) = 1 - F(x)$$

jelölést is, akkor $T(x)$ eloszlása az alábbi képlettel adható meg:

$$(1.3) \quad P(T(x) \leq t) = P(x < X \leq x+t \mid X > x) = \frac{P(x < X \leq x+t)}{P(X > x)} = \\ = \frac{F(x+t) - F(x)}{s(x)} = \frac{s(x) - s(x+t)}{s(x)}.$$

Az (1.3) valószínűsége szokás a ${}_tq_x$ jelölést, a $P(T(x) > t)$ valószínűsége pedig a ${}_tp_x$ jelölést alkalmazni. Az élettartamokat általában diszkrét, vagy folytonos eloszlású valószínűségi változóknak szokás feltételezni. A diszkrét esetben az élettartam lehet $0, 1, 2, \dots$ év, vagy valamilyen rövidebb időtartam. A ${}_tq_x$ valószínűségeket egész x, t esetére az élettartam táblázatok tartalmazzák. Az egy évre vonatkozó túlélési ill. halálozási valószínűségekre vonatkozólag szokás az alábbi, egyszerűbb jelöléseket alkalmazni:

$$p_x = {}_tp_x, \quad q_x = {}_tq_x, \quad \text{ha } t = 1.$$

A ${}_tp_x$ valószínűség számítható a $t = 1$ esetre vonatkozó valószínűségek segítségével, ugyanis fennáll az alábbi egyenlőség:

$$(1.4) \quad {}_tp_x = P(X > x+t \mid X > x) = \frac{P(X > x+t)}{P(X > x)} = \\ = \prod_{k=1}^t \frac{P(X > x+k)}{P(X > x+k-1)} = p_x p_{x+1} \dots p_{x+t-1}.$$

Tekintsünk most n egyént, akik az adott időpontban x_1, \dots, x_n évet már éltek, ahol x_1, \dots, x_n nem feltétlenül egész számok. Másként kifejezve, tekintsük az $(x_1), \dots, (x_n)$ élettartamokat. Az idő haladtával a még életben lévő egyének száma csökken. Azt mondjuk, hogy a legalább k túlélő állapot érvényes, ha k egyén az n közül még életben van. A legalább k túlélő állapot jele:

$$\left(\frac{k}{x_1 x_2 \dots x_n} \right).$$

Egy másik rokon fogalom a pontosan k túlélő állapot. Ez fennáll akkor, ha az n élet közül pontosan k még nem fejeződött be. Ennek az állapotnak a jele:

$$\left(\frac{[k]}{x_1 x_2 \dots x_n} \right).$$

A jelen időponthoz képest t idő múlva a legalább k túlélő állapot bekövetkezésének a valószínűségét a

$${}_tp_{\frac{k}{x_1 x_2 \dots x_n}},$$

a pontosan k túlélőállapot bekövetkezésének a valószínűségét a

$${}_tP_{\frac{[k]}{x_1 x_2 \dots x_n}}$$

szimbólum jelöli.

Ismeretes, hogy ha A_1, \dots, A_n tetszőleges események, $P_{[k]}$ annak a valószínűsége, hogy ezek közül pontosan k esemény bekövetkezik, ahol $0 \leq k \leq n$, akkor tetszőleges c_0, c_1, \dots, c_n számokkal fennáll a

$$(1.5) \quad \sum_{k=0}^n c_k P_{[k]} = c_0 + \sum_{k=1}^n S_k \Delta^k c_0,$$

egyenlőség. Az (1.5) képletben $S_0 = 1$,

$$S_k = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}), \quad k = 1, \dots, n,$$

$\Delta^k c_0$ pedig a c_0, c_1, \dots, c_n sorozat k -adik differenciája,

$$\Delta^0 c_0 = c_0, \quad \Delta^1 c_0 = c_1 - c_0, \quad \Delta^2 c_0 = c_2 - 2c_1 + c_0$$

és általában

$$(1.6) \quad \Delta^k c_0 = \sum_{i=0}^k (-1)^{i-1} \binom{k}{i} c_i, \quad k = 1, \dots, n.$$

Hasonló képlet adható arra az esetre, amikor a $P_{(k)}$ valószínűséget a legalább k esemény bekövetkezésének P_k valószínűségével helyettesítjük. Az erre az esetre vonatkozó képletben a d_0, d_1, \dots, d_n számokat alkalmazva, fennáll a

$$(1.7) \quad \sum_{k=0}^n d_k P_k = d_0 + \sum_{k=1}^n S_k \Delta^{k-1} d_1$$

egyenlőség.

Tekintsük most ismét a $T(x_1), \dots, T(x_n)$ valószínűségi változókat, melyek az x_1, \dots, x_n éves egyedek további élettartamait jelölik. Vezessük be a következő jelöléseket:

$${}_tS_k = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} P(T(x_{i_1}) > t, \dots, T(x_{i_k}) > t), \quad k = 1, \dots, n.$$

Ha ezeket az (1.5) és az (1.7) képletekben megfelelő S_k mennyiségek helyébe tesszük és egyidejűleg végrehajtjuk a

$$P_{[k]} = {}_tP_{\frac{[k]}{x_1 x_2 \dots x_n}}$$

$$P_k = {}_tP_{\frac{k}{x_1 x_2 \dots x_n}}$$

helyettesítéseket, akkor az alábbi formulákhoz jutunk:

$$(1.8) \quad \sum_{k=0}^n c_k {}_t p_{\frac{[k]}{x_1 x_2 \dots x_n}} = c_0 + \sum_{k=1}^n {}_t S_k \Delta^k c_0$$

$$(1.9) \quad \sum_{k=0}^n c_k {}_t p_{\frac{k}{x_1 x_2 \dots x_n}} = d_0 + \sum_{k=1}^n {}_t S_k \Delta^{k-1} d_1.$$

Az aktuárius elméletben és gyakorlatban a $T(x_1), \dots, T(x_n)$ valószínűségi változókat általában függetleneknek tételezik fel. E feltétel érvényessége esetén fennáll az, hogy

$$P(T(x_{i_1}) > t_1, \dots, T(x_{i_k}) > t) = P(T(x_{i_1}) > t) \dots P(T(x_{i_k}) > t)$$

és így a ${}_t S_k$ értékeket a $T(x_i)$ valószínűségi változók eloszlásai ismeretében meghatározhatjuk. Az (1.8), (1.9) egyenlőségek jobb oldalának ismeretében a bal oldalak is ismertté válnak. Az utóbbiaknak konkrét biztosításmatematikai tartalmuk van, amint ezt a következő szakaszban kifejtjük.

Ha azonban a $T(x_1), \dots, T(x_n)$ valószínűségi változók nem függetlenek, akkor már nem biztos, hogy a ${}_t S_1, \dots, {}_t S_n$ mennyiségek mind ismertek, lehet, hogy csak az első kettő, vagy az első három, vagy az első néhány mennyiség ismert, a többi nem. Ez két okból is bekövetkezhet. Egyfelől lehet, hogy néhány valószínűségi változó együttes eloszlására van adatunk, de sokra nincs, másfelől lehet, hogy vannak adatok, de valamennyi ${}_t S_1 \dots {}_t S_n$ kiszámításához szükséges számítási idő irreálisan sok volna. Így módon az (1.8), (1.9) formulák alkalmazási lehetősége korlátozott.

A 2. szakaszban az (1.8), (1.9) egyenletek bal oldalán álló mennyiségek biztosításmatematikai jelentésével foglalkozunk. Az ezt követő 3. szakaszban megadjuk az (1.8), (1.9) formulák bal oldalain álló összegekben szereplő valószínűségek általunk javasolt alsó és felső korlátait, melyek révén eljutunk az összegek alsó és felső korlátaihoz. Végül a 4. szakaszban egy speciális esettel foglalkozunk.

2. Az élettartamok együttes valószínűségeloszlásának jelentősége az életbiztosítási feladatokban

A nagy számú alkalmazási lehetőség közül kettőt ragadunk ki. Az egyik a több személy együttes életbiztosítása esetén a nettó prémium, a másik a több személyes évjáradék (annuitás) meghatározása. Az együttes életbiztosítás vonatkozásában felmerülő problémák közül vegyük az alábbi példát.

1. Példa. Tegyük fel, hogy n személy számára kötünk életbiztosítást, mely a j -edik elhalálozáskor d_j összeget fizet, ahol $j = 0, 1, \dots, n$. Az életbiztosítás megkötésének idejét zérónak véve, a biztosított egyének ekkor bizonyos életkort már elérték, jelöljük ezeket x_1, \dots, x_n . A jövőben bekövetkező elhalálozások időpontjait az

1. szakaszban leírtaknak megfelelően a $T(x_1), \dots, T(x_n)$ valószínűségi változók értékei adják meg. Együttes eloszlásuk a teljes X_1, \dots, X_n élettartamok $F(z_1, \dots, z_n)$ együttes eloszlásfüggvénye segítségével határozható meg.

Például, a $T(x_1) > t_1, \dots, T(x_n) > t_n$ esemény valószínűsége a következő:

$$\begin{aligned}
 (2.1) \quad & P(T(x_1) > t_1, \dots, T(x_n) > t_n) = \\
 & = P(X_1 > x_1 + t_1, \dots, X_n > x_n + t_n \mid X_1 > x_1, \dots, X_n > x_n) = \\
 & = \frac{P(X_1 > x_1 + t_1, \dots, X_n > x_n + t_n, X_1 > x_1, \dots, X_n > x_n)}{P(X_1 > x_1, \dots, X_n > x_n)} = \\
 & = \frac{P(X_1 > x_1 + t_1, \dots, X_n > x_n + t_n)}{P(X_1 > x_1, \dots, X_n > x_n)}.
 \end{aligned}$$

A (2.1) képlet utolsó sorában mind a számláló, mind a nevező jól ismert módon származtatható az X_1, \dots, X_n valószínűségi változó együttes eloszlásfüggvénye segítségével. Egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy X_1, \dots, X_n együttes eloszlása folytonos. Rendezzük sorba nagyság szerint a $T(x_1), \dots, T(x_n)$ valószínűségi változókat, jelöljük ezeket T_1^*, \dots, T_n^* ahol T_1^* a legkisebb, T_n^* a legnagyobb érték. Jelölje $f_j(t)$ a T_j^* valószínűségi változó sűrűségfüggvényét, $j = 1, \dots, n$. E sűrűségfüggvények is származtathatók az $F(z_1, \dots, z_n)$ eloszlásfüggvényből. Ezek után felírjuk a nettó prémium értékét:

$$(2.2) \quad \int_0^{\infty} e^{-rt} \sum_{j=1}^n d_j f_j(t) dt,$$

ahol r a kamatláb és e^{-rt} a jelenérték meghatározásához szolgáló diszkontáló faktor (időben folytonos kamatozást feltételezve). Ha az X_1, \dots, X_n valószínűségi változók függetlenek, folytonos és azonos eloszlásúak, közös sűrűségfüggvényük $f(t)$, továbbá $x_1 = \dots = x_n = 0$, akkor

$$f_j(t) = \frac{n!}{(j-1)!(n-j)!} (F(t))^{j-1} (1-F(t))^{n-j} f(t), \quad j = 1, \dots, n.$$

Ezekkel a függvényekkel (2.2) értéke meghatározható.

2. *Példa.* Évjáradék (annuitás). Tegyük fel, hogy n személy számára folyósítandó évjáradék összege időegységenként c_j forint a j -edik és a $j+1$ -edik személy halála között, $j = 0, 1, \dots, n$. Meghatározható az évjáradék jelenértéke időben folytonos kamatozás esetén, ahol a kamatláb r . Az egyes személyek élettartama induláskor az X_1, \dots, X_n értékekkel egyenlő. A feladat megoldására az (1.8) formulát alkalmazhatjuk. Ekkor azonban ismernünk kell minden $t \geq 0$ esetén a ${}_tS_k$, $k = 1, \dots, n$ értéket. Tegyük fel, hogy ezek rendelkezésre állnak. Ekkor a kívánt eredményhez

az (1.8) egyenlőség mindkét oldalának 0-tól ∞ -ig terjedő integrálása révén jutunk. Ugyanis annak a valószínűsége, hogy a t időpontban a rendszer a pontosan k túlélő állapotban legyen, a

$${}_tP_{x_1 x_2 \dots x_n}^{[k]}$$

értékkel egyenlő. Ebből következik, hogy a $(t, t + dt)$ időintervallumban kifizetett évjáradék várható értéke

$$(2.3) \quad e^{-rt} \sum_{k=0}^n c_k {}_tP_{x_1 x_2 \dots x_n}^{[k]} dt$$

és így a teljes $(0, \infty)$ időintervallumban kifizetett évjáradék várható értéke, vagyis az un. aktuárius jelenérték az alábbi:

$$(2.4) \quad \sum_{k=0}^n c_k \int_0^{\infty} e^{-rt} {}_tP_{x_1 x_2 \dots x_n}^{[k]} dt = c_0 \int_0^{\infty} e^{-rt} dt + \sum_{k=1}^n \Delta^k c_0 \int_0^{\infty} {}_tS_k dt.$$

Ha az egyes élettartamok független valószínűségi változók, akkor ehhez ${}_tS_k$, $k = 1, \dots, n$ meghatározhatók az egyedek élettartama valószínűségeloszlása és a c_0, \dots, c_n sorozat ismeretében.

3. Alsó és felső korlátok az aktuárius jelenértékre vonatkozólag

A (2.4) egyenletben szereplő ${}_tS_k$ értékek ismerete minden $t \geq 0$ és $k = 1, \dots, n$ esetén feltételezi az n személy élettartama együttes valószínűségeloszlásának az ismeretét. Ez azonban a gyakorlatban általában nem áll rendelkezésre. Sok esetben mégis kevesebb, mint n élettartam együttes eloszlása rendelkezésre áll. A legegyszerűbb eset az, amikor minden élettartam pár együttes valószínűségeloszlását ismerjük. Ebben a szakaszban erre a viszonylag egyszerű esetre koncentrálnunk és módszert adunk az évjáradék aktuárius jelenérték alsó és felső korlátjainak a meghatározására, kizárólag a páros élettartam eloszlások ismeretének feltételezése mellett. A módszer sok hasonlóságot mutat a Horváth és Prékopa (2002) dolgozatban közölt módszerhez, mely azt a célt szolgálja, hogy rendszerek átlagos működési idejére határozzunk meg korlátokat. Mielőtt azonban tovább mennénk, figyelmünket egy speciális c_0, c_1, \dots, c_n sorozatra irányítjuk, mely gyakran előfordul az évjáradék számításban. Ez a sorozat a következő:

$$(3.1) \quad c_0 = 0, \quad c_1 = c^{n-1}, \quad c_2 = c^{n-2}, \dots, c_n = 1,$$

ahol $0 < c < 1$. Mivel c_k az évjáradék időegységre eső részét jelenti a pontosan k túlélő állapot érvényessége esetén, a fenti sorozat azt jelenti, hogy egy egység

jár, ha mindegyik kedvezményezett életben van és minden halál esetén az évjáradék c szorzóval csökken. A (3.1) sorozattal kapcsolatban bebizonyítottunk két tételt. Ehhez szükségünk van a magasabb rendű osztott differencia fogalmára, mely megtalálható pl. Jordan (1947), vagy Prékopa (1995), könyvében.

3.1. TÉTEL. *A (3.1) képlettel adott c_0, c_1, \dots, c_n sorozat valamennyi $m+1$ -rendű osztott differenciája pozitív, ha $m+1$ páratlan.*

Bizonyítás. A Fekete és Pólya (1912) levelezésében szereplő Fekete által bizonyított egyik tétel és az osztott differenciák determináns alakja segítségével bebizonyítható, hogy ha a konszekutív pontokhoz tartozó $m+1$ -edrendű differenciák pozitívak, akkor valamennyi $m+1$ -rendű osztott differencia pozitív. Ennek indoklása megtalálható Prékopa (1995) könyve 156. oldalán, így a részleteket mellőzzük.

Tekintsük a $c_i, c_{i+1}, \dots, c_{i+m+1}$ számokat. Mivel ezek az $i, i+1, \dots, i+m+1$ számokhoz tartoznak, az osztott differencia pozitívitásához az elegendő a közösleges $\Delta^{m+1}c_i$ differencia pozitívitását belátni. Ismeretes, hogy

$$\Delta^{m+1}c_i = \sum_{k=0}^{m+1} (-1)^{k-1} \binom{m+1}{k} c_{i+k}.$$

Mivel $c_0 = 0$, $c_k = c^{n-k}$, $k = 1, \dots, n$, az $i > 0$ esetben azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} (3.2) \quad \Delta^{m+1}c_i &= \sum_{k=0}^{m+1} (-1)^{k-1} \binom{m+1}{k} c^{n-i-k} = \\ &= -c^{n-i} \sum_{k=0}^{m+1} \binom{m+1}{k} \left(\frac{-1}{c}\right)^k = \\ &= -c^{n-i} \left(1 - \frac{1}{c}\right)^{m+1} = (-1)^m c^{n-i} \left(\frac{1}{c} - 1\right)^{m+1} > 0. \end{aligned}$$

Ha viszont $i = 0$, akkor

$$\begin{aligned} (3.3) \quad \Delta^{m+1}c_i &= \sum_{k=0}^{m+1} (-1)^{k-1} \binom{m+1}{k} c_k = \\ &= \sum_{k=1}^{m+1} (-1)^{k-1} \binom{m+1}{k} c^{n-k} = \\ &= \sum_{k=0}^{m+1} (-1)^{k-1} \binom{m+1}{k} c^{n-k} + c^n = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= -c^n \sum_{k=0}^{m+1} \binom{m+1}{k} \left(\frac{-1}{c}\right)^k + c^n = \\
 &= c^n \left[1 - \left(1 - \frac{1}{c}\right)^{m+1} \right] = c^n \left[1 + (-1)^m \left(\frac{1-c}{c}\right)^{m+1} \right] > 0.
 \end{aligned}$$

Ezzel a tételt bebizonyítottuk.

3.2. TÉTEL. Ha $c < \frac{1}{2}$, és $m+1$ páros, akkor a c_0, c_1, \dots, c_n sorozat valamennyi $m+1$ -rendű osztott differenciája negatív.

Bizonyítás. Ha $i > 0$, akkor a (3.2) reláció utolsó sorából leolvasható, hogy $\Delta^{m+1}c_i < 0$. Ha viszont $i = 0$, akkor a (3.3) és az $(1-c)/c > 1$ relációból következik, hogy

$$(3.4) \quad \Delta^{m+1}c_i = c^n \left[1 - \left(\frac{1-c}{c}\right)^{m+1} \right] < 0.$$

Megjegyzés. Ha $c > \frac{1}{2}$, akkor az $i > 0$ esetben $\Delta^{m+1}c_i$ pozitív, illetve negatív, aszerint, hogy $m+1$ páratlan, vagy páros. Az $i = 0$ esetében azonban $\Delta^{m+1}c_i > 0$, függetlenül attól, hogy $m+1$ páratlan, vagy páros.

A továbbiakban ismertetjük módszerünket, melyre támaszkodva alsó és felső korlátot adunk a (2.4) képlet bal oldalán álló mennyiségre. Ehhez előbb korlátokat adunk a

$$(3.5) \quad \sum_{k=0}^n c_k {}_tP_{\frac{[k]}{x_1 x_2 \dots x_n}}$$

összegre, rögzített t esetén. A kívánt korlátokat az e^{-rt} -vel való szorzás, majd integrálás után kapjuk. Tegyük fel, hogy $m+1$ páratlan és ismeretesek az 1. szakaszban értelmezett ${}_tS_k$, $k = 1, \dots, m$ mennyiségek. Tudjuk azt, hogy ha A_{tj} jelenti a $T(x_j) > t$ eseményt, $j = 1, \dots, n$, továbbá γ_t rögzített t esetén azoknak az A_{tj} eseményeknek a száma, amelyek bekövetkeznek, akkor

$$(3.6) \quad E \left[\binom{\gamma_t}{k} \right] = {}_tS_k, \quad k = 0, \dots, n.$$

A (3.6) formula érvényességét illetően l. Prékopa (1995) könyvében a 6.2. szakaszt. A (3.6) egyenlőségből következik, hogy

$$(3.7) \quad \sum_{i=0}^n \binom{i}{k} {}_tP_{\frac{[i]}{x_1 x_2 \dots x_n}} = {}_tS_k, \quad k = 0, 1, \dots, n,$$

ahol ${}_tS_0 = 1$ definíció szerint.

A (3.7) egyenlőségek száma $n + 1$, ugyanennyi a bal oldalon álló összegben szereplő valószínűségek száma is. A ${}_tS_k$, $k = 0, 1, \dots, n$ és a ${}_tp_{\frac{[i]}{x_1 x_2 \dots x_n}}$, $i = 0, 1, \dots, n$ mennyiségek egyértelműen meghatározzák egymást. Ha azonban a (3.7) egyenlőségeket csak a $k = 0, 1, \dots, m$ esetekre írjuk fel, ahol $m < n$, akkor a ${}_tS_k$, $k = 0, 1, \dots, m$ mennyiségek, melyeket feltevésünk szerint ismerünk, már nem határozzák meg egyértelműen a ${}_tp_{\frac{[i]}{x_1 x_2 \dots x_n}}$, $i = 0, 1, \dots, n$ valószínűségeket. Ezért az utóbbiakat változóknak tekintjük és az adott egyenlőségek és a változókra tett nemnegativitási feltételek mellett minimalizáljuk, ill. maximalizáljuk azt a célfüggvényt, amelyet (3.5) határoz meg, ha ott is változóknak tekintjük a valószínűségeket. A jelölés egyszerűsítése érdekében a változóknak tekintett ${}_tp_{\frac{[i]}{x_1 x_2 \dots x_n}}$ valószínűségek helyett a továbbiakban a v_{ti} szimbólumokat alkalmazzuk. Így módon a (3.5) értékre vonatkozó alsó és felső becsléseket az alábbi lineáris programozási feladat optimum értékei szolgáltatják:

$$(3.8) \quad \min(\max) \sum_{i=0}^n c_i v_{ti}$$

feltéve, hogy

$$\sum_{i=0}^n \binom{i}{k} v_{ti} = {}_tS_k, \quad k = 0, 1, \dots, m$$

$$v_{ti} \geq 0, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

A (3.8) feladat helyett egy valamivel kényelmesebb alakú feladatot írhatunk fel, ha a ${}_tS_k$, $k = 0, 1, \dots, m$ ún. binomiális momentumok helyett áttérünk a ${}_t\mu_k$, $k = 0, 1, \dots, m$ hatványmomentumokra. A (3.8) feladat egyenlőséges feltételeinek ekvivalens alakja a következő

$$(3.9) \quad \sum_{i=0}^n i^k v_{ti} = {}_t\mu_k, \quad k = 0, 1, \dots, m,$$

ahol $0^0 = 1$, definíció szerint, és

$$(3.10) \quad {}_t\mu_k = \sum_{j=0}^k S(k, j) j! {}_tS_j \quad k = 0, 1, \dots, m.$$

Az $S(k, j)$ számok az ún. Stirling számok. Ezek értelmezését illetően l. Prékopa (1995, 154. o.) A (3.10) egyenlőségek kis k értékekre könnyen megadhatók a (3.6) formula alapján, ugyanis minden k esetén fennáll az

$$E(\nu_t^k) = {}_t\mu_k$$

egyenlőség. Így pl.

$$\begin{aligned} {}_t\mu_1 &= {}_tS_1 \\ {}_t\mu_2 &= 2{}_tS_2 + {}_tS_1 \\ {}_t\mu_3 &= 6{}_tS_3 + 6{}_tS_2 + {}_tS_1. \end{aligned}$$

A fentiek alapján felírhatjuk a (3.8) feladatokhoz ekvivalens alábbi feladatokat:

$$\begin{aligned} (3.11) \quad & \min(\max) \sum_{i=0}^n c_i v_{ti} \\ & \text{feltéve, hogy} \\ & \sum_{i=0}^n i^k v_{ti} = {}_t\mu_k, \quad k = 0, 1, \dots, m. \end{aligned}$$

A (3.11) feladat tömörebb alakja a következő:

$$\begin{aligned} (3.12) \quad & \min(\max) \sum_{i=0}^n c_i v_{ti} \\ & \text{feltéve, hogy} \\ & \sum_{i=0}^n a_i v_{ti} = {}_t\mu, \\ & v_{ti} \geq 0, \quad i = 0, 1, \dots, n, \end{aligned}$$

ahol

$$a_i = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ i^2 \\ \vdots \\ i^m \end{pmatrix}, \quad i = 0, 1, \dots, n$$

$${}_t\mu = \begin{pmatrix} 1 \\ {}_t\mu_1 \\ {}_t\mu_2 \\ \vdots \\ {}_t\mu_m \end{pmatrix}.$$

A (3.12) feladatra érvényes a következő tétel.

3.3. TÉTEL. Ha a (3.1) által adott c_0, c_1, \dots , sorozatban $0 < c < 1$ és $m+1$ páratlan, akkor a (3.12) feladat duál megengedett bázisai, a bázisindexekkel kifejezve, az alábbi sémát követik:

$$\begin{aligned} \min \text{ feladat} & \quad 0, i, i+1, \dots, h, h+1 \\ \max \text{ feladat} & \quad j, j+1, \dots, h, h+1, n. \end{aligned}$$

Bizonyítás. A tétel a 3.1, 3.2 tételek és Prékopa (1990, 1995, 159. old.) diszkrét momentum problémára vonatkozó duál megengedett bázis struktúra tételéből következik. Itt felhasználást nyer a c_0, c_1, \dots, c_n sorozat osztott differenciáinak pozitivitása.

3.4. TÉTEL. Ha $c < \frac{1}{2}$ és $m+1$ páros, akkor a (3.12) feladat duál megengedett bázisai a bázisindexekkel kifejezve, az alábbi sémát követik:

$$\begin{aligned} \min \text{ feladat} & \quad 0, i, i+1, \dots, h, h+1, n \\ \max \text{ feladat} & \quad j, j+1, \dots, h, h+1. \end{aligned}$$

Bizonyítás. A tétel érvényessége a 3.2 tételhez hasonlóan igazolható. Az $m=2$ esetre vonatkozólag a 3.11 feladat alakja a következő:

$$\begin{aligned} (3.13) \quad & \min(\max) \sum_{i=0}^n c_i v_{ti} \\ & \text{feltéve, hogy} \\ & v_{t0} + v_{t1} + v_{t2} + \dots + v_{tn} = 1 \\ & v_{t1} + 2v_{t2} + \dots + nv_{tn} = {}_t\mu_1 \\ & v_{t1} + 4v_{t2} + \dots + n^2v_{tn} = {}_t\mu_2 \\ & v_{ti} \geq 0, \quad i = 0, 1, \dots, n, \end{aligned}$$

ahol ${}_t\mu_1$ és ${}_t\mu_2$ a korábban megadott képletek szerint határozhatók meg ${}_tS_1$ és ${}_tS_2$ ismeretében.

A 3.3 tétel szerint a (3.13) feladat duál megengedett bázisai az alábbi típusúak:

$$\begin{aligned} \min \text{ feladat} & \quad 0, i, i+1 \\ \max \text{ feladat} & \quad j, j+1, n. \end{aligned}$$

Az $m=3$ esetben a (3.11) feladat alakja a következő:

$$\begin{aligned} (3.14) \quad & \min(\max) \sum_{i=0}^n c_i v_{ti} \\ & \text{feltéve, hogy} \end{aligned}$$

$$v_{i0} + v_{i1} + v_{i2} + \dots + v_{in} = 1$$

$$v_{i1} + 2v_{i2} + \dots + nv_{in} = {}_i\mu_1$$

$$v_{i1} + 4v_{i2} + \dots + n^2v_{in} = {}_i\mu_2$$

$$v_{i1} + 8v_{i2} + \dots + n^3v_{in} = {}_i\mu_3$$

$$v_{ti} \geq 0, \quad i = 0, 1, \dots, n,$$

ahol a ${}_i\mu_1$, ${}_i\mu_2$, ${}_i\mu_3$ hatványmomentumok, a ${}_iS_1$, ${}_iS_2$, ${}_iS_3$ binomiális momentumok ismeretében meghatározhatók.

A 3.4 tétel szerint a (3.14) feladat duál megengedett bázisai az alábbi típusúak:

$$\text{min feladat} \quad 0, j, j+1, n$$

$$\text{max feladat} \quad i, i+1, j, j+1.$$

Ha a (3.12) feladat minimum és maximum értékeit L_t és U_t jelentik, akkor fennáll az alábbi reláció:

$$L_t \leq \sum_{i=0}^n c_i {}_i p_{\frac{[i]}{x_1 x_2 \dots x_n}} \leq U_t,$$

a (2.4) egyenlőség felső sorában álló un. aktuárius jelenértékre pedig az alábbi alsó és felső korlátokat kapjuk:

$$(3.15) \quad \int_0^{\infty} e^{-rt} L_t dt \leq \sum_{i=0}^n c_i \int_0^{\infty} e^{-rt} {}_i p_{\frac{[i]}{x_1 x_2 \dots x_n}} dt \leq \int_0^{\infty} e^{-rt} U_t dt.$$

A korlátok numerikus meghatározása oly módon történik, hogy minden t esetén meghatározzuk azt a bázist, mely primal megengedett is, felírjuk az L_t , ill. az U_t optimum értéket és elvégezzük az integrálást arra az intervallumra, amelyben az adott bázisra a primál megengedettség fennáll.

4. Az $m+1=3$ esetre vonatkozó formulák

A (3.13) probléma az un. diszkrét momentumprobléma, rögzített t esetén. E feladatban a valószínűségeloszlás tartója a $0, 1, \dots, n$ halmaz, a célfüggvényben pedig a $c_0 = 0$, $c_i = c^{n-i}$, $i = 1, \dots, n$ együtthatók szerepelnek.

Ha az eloszlás tartója a $\{z_0, z_1, \dots, z_n\}$ halmaz, a célfüggvény együtthatók pedig az $f(z_0), f(z_1), \dots, f(z_n)$ számok, akkor a feladat optimum értékei, vagyis a

célfüggvény alsó és felső korlátjai az alábbi egyenlőtlenségek formájában oldhatók meg: (I. Prékopa 1995, 171. old.)

$$\begin{aligned}
 (4.1) \quad & \frac{z_i z_{i+1} - (z_i + z_{i+1})\mu_1 + \mu_2}{(z_i - z_0)(z_{i+1} - z_0)} f(z_0) - \\
 & - \frac{z_0 z_{i+1} - (z_0 z_{i+1} - (z_0 + z_{i+1})\mu_1 + \mu_2)}{(z_{i+1} - z_i)(z_i - z_0)} f(z_i) + \frac{z_0 z_i - (z_0 + z_i)\mu_1 + \mu_2}{(z_{i+1} - z_i)(z_{i+1} - z_0)} f(z_{i+1}) \leq \\
 & \leq E[f(\xi)] \leq \frac{z_{j+1} z_n - (z_{j+1} + z_n)\mu_1 + \mu_2}{(z_{j+1} - z_j)(z_n - z_j)} f(z_j) - \\
 & - \frac{z_j z_n - (z_j + z_n)\mu_1 + \mu_2}{(z_{j+1} - z_j)(z_n - z_{j+1})} f(z_{j+1}) + \frac{z_j z_{j+1} - (z_j + z_{j+1})\mu_1 + \mu_2}{(z_n - z_{j+1})(z_n - z_j)} f(z_n),
 \end{aligned}$$

ahol i és j az alábbi egyenlőtlenségek révén határozhatók meg:

$$(4.2) \quad cz_i \leq \frac{\mu_2 - z_0 \mu_1}{\mu_1 - z_0} \leq z_{i+1}$$

$$(4.3) \quad z_j \leq \frac{z_n \mu_1 - \mu_2}{z_n - \mu_1} \leq z_{j+1}.$$

Ha ezt a mi esetünkre specializáljuk, akkor a következő adódik

$$\begin{aligned}
 (4.4) \quad & \frac{(i+1) {}_t\mu_1 - {}_t\mu_2}{i} c^{n-i} - \frac{i {}_t\mu_1 - {}_t\mu_2}{i+1} c^{n-i-1} \leq \sum_{l=1}^n c^{n-l} {}_t p_{x_1 x_2 \dots x_n}^{[l]} \leq \\
 & \leq \frac{(j+1)n - (n+j+1) {}_t\mu_1 + {}_t\mu_2}{n-j} c^{n-j} - \frac{jn - (n+j) {}_t\mu_1 + {}_t\mu_2}{(n-j-1)} c^{n-j-1} + \\
 & + \frac{j(j+1) - (2j+1) {}_t\mu_1 - {}_t\mu_2}{(n-j-1)(n-j)},
 \end{aligned}$$

ahol az i számot az

$$(4.5) \quad i {}_t\mu_1 \leq {}_t\mu_2 \leq (i+1) {}_t\mu_1,$$

a j számot pedig a

$$(4.6) \quad j(n - {}_t\mu_1) \leq n {}_t\mu_1 - {}_t\mu_2 \leq (j+1)(n - {}_t\mu_1)$$

egyenlőtlenségből határozzuk meg.

Tegyük fel, hogy a ${}_t\mu_1$ és a ${}_t\mu_2$ momentumok semmilyen $t > 0$ esetén nem egyenlők. Ha két momentum egyenlő, akkor az eloszlás a $\{0, 1\}$ értékre koncentrálódik. Ezt az esetet tehát kizárjuk. Ekkor azonban a (4.5) által meghatározott

$i \neq 0$, ugyanis $i = 0$ esetén azt kapnánk, hogy ${}_t\mu_2 \leq {}_t\mu_1$, viszont tudjuk azt, hogy ${}_t\mu_2 \geq {}_t\mu_1$, tehát ${}_t\mu_2 = {}_t\mu_1$ következne.

A (4.6) egyenlőtlenségből azonban következhet, hogy $j = 0$. Ha ez fennáll akkor a (4.4) egyenlőtlenségben c^{n-j} helyett 0 írandó.

Jelölje I_i a t értékeknek azt az intervallumát, amelyet a (4.5) egyenlőtlenségek rögzített i esetén meghatároznak. Hasonlóan értelmezzük (4.6) alapján a J_j intervallumot. Ha a (4.2) egyenlőtlenségben mindenütt szorzunk az e^{-rt} faktorial, majd a bal oldalon integrálunk az I_i , a jobb oldalon pedig a J_j intervallumon, végül elvégezzük az $i - re$ ($i = 1, \dots, n$) és a $j - re$ ($j = 0, 1, \dots, n$) vonatkozó összegezést, akkor a kapott összegek alsó, illetve felső korlátai lesznek az évjáradék aktuárius jelenértékének, vagyis a

$$\sum_{l=1}^n c^{n-l} \int_0^{\infty} e^{-rt} {}_tp_{\frac{[t]}{x_1 x_2 \dots x_n}} dt$$

értéknek. A formulák felírásától, azok bonyolultsága miatt, eltekintünk. A módszer numerikus bemutatására egy későbbi dolgozatban térünk vissza.

Hivatkozások

- [1] Bowers, N. L., Jr., Gerber, H. U., Hickman, J. C., Jones, D. A. and Nesbitt, C. J., *Actuarial Mathematics* (The Society of Actuaries, 1997).
- [2] Fekete, M. és Pólya, G., Über ein Problem von Laguerre, *Rediconti del Circolo Matematico di Palermo* **23** (1912), 89–120.
- [3] Horváth A. és Prékopa A., Alsó és felső korlátok rendszerek működési idejének várható értékére, *Alkalmazott Matematikai Lapok* **21** (2004), 131–149.
- [4] Jordan, C., *Calculus of Finite Differences* (Chelsea, New York, 1947).
- [5] Prékopa, A., *Stochastic Programming* (Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1995).
- [6] Prékopa, A., The Discrete Moment Problem and Linear Programming, *Discrete Applied Mathematics* **27** (1990), 235–254.

(Beérkezett: 2002. június 24.)

DR. HORVÁTH ALICE
ELTE TOFK MATEMATIKA TANSZÉK
1126-BUDAPEST
KISS JÁNOS ALTÁBORNAGY U. 40.
APOR VILMOS KATOLIKUS FŐISKOLA
2072-ZSÁMBÉK
ZICHY TÉR 3.
halice@avkf.hu

DR. PRÉKOPA ANDRÁS
ELTE OPERÁCIÓKUTATÁSI TANSZÉK
1118-BUDAPEST
PÁZMÁNY PÉTER SÉTÁNY 1/C
prekopa@cs.elte.hu
RUTCOR, RUTGERS CENTER FOR OPERATIONS RESEARCH
640 BARTHOLOMEW RD.
PISCATAWAY, NJ 08854-8003
prekopa@rutcor.rutgers.edu

LOWER AND UPPER BOUNDS FOR THE ACTUARIAL PRESENT VALUE OF A GROUP
LIFE INSURANCE POLICY, USING JOINT LIFE TIME DISTRIBUTIONS

A. HORVÁTH AND A. PRÉKOPA

When calculating the actuarial present value of a life insurance policy it is generally assumed that the lives are independent of each other. This condition is, however, not always satisfied in practice but the numerical calculation is frequently too complicated if we take into account the joint distribution of the lives. In this paper we give lower and upper bounds, in a relatively simple way, for the actuarial present value, by the use of the method of discrete moment problems.

KLASSZIFIKÁCIÓ AZ ESET ALAPÚ KÖVETKEZTETŐRENDSZEREKBEN

BOGNÁR KATALIN

Debrecen

Ebben a cikkben egy formalizmust adunk az eset alapú következtetési eljárás visszakeresési és illesztési műveleteire az objektum orientált ismeretábrázolási rendszerekben, figyelembe véve a leíró logikák fogalmait. Ha az eseteket hierarchiába szervezzük, akkor az eset alapú következtetőrendszer és az osztályozás könnyen kapcsolatba hozható egymással.

1. Bevezetés

A Mesterséges Intelligencia (MI) kutatások olyan eljárásokat és technikákat tanulmányoznak, amelyek segítségével az emberi gondolkodás következtetési módszerei egyre jobban érthetőek és alkalmazhatóak az információs rendszerekben. Ebből adódóan a következtetési módszerek és azok hatása az ismeretek ábrázolására fontos szerepet játszanak az MI kutatásokban. A különböző feladatok megoldása során számos, egymástól eltérő alapokon nyugvó következtetőrendszert használhatunk. A kitűzött célt változatos módokon érhetjük el, ez kitűnik szóhasználatunkból is: bizonyítás, meggyőzés, elhatározás, igazolás, magyarázat, stb. A következtetési eljárásokat különböző szempontok szerint csoportosíthatjuk, a következtetéshez (hipotézisen alapuló, analóg, stb.), az ismeretekhez (közelítő, kvalitatív, temporális, stb.) való viszonyuk vagy a tudásábrázolás módja (strukturált objektum alapú öröklődési hierarchiát követő vagy szabály alapú formális, stb.) szerint. A következtetési módok mindegyike egy-egy emberi gondolkozási mechanizmuson alapul és változatosságuk ezen túl a megvalósításuknak is köszönhető. E módszerek alapvetően három fő kategóriába sorolhatóak:

- Levezetés jellegű (deduktív), formális következtetés
Egy adatszerkezet szimbolikus leírásának szintaktikáján alapul, a műveletek adott szemantikai jelentését a háttérben figyelembe vevő, de mindig szintakti-

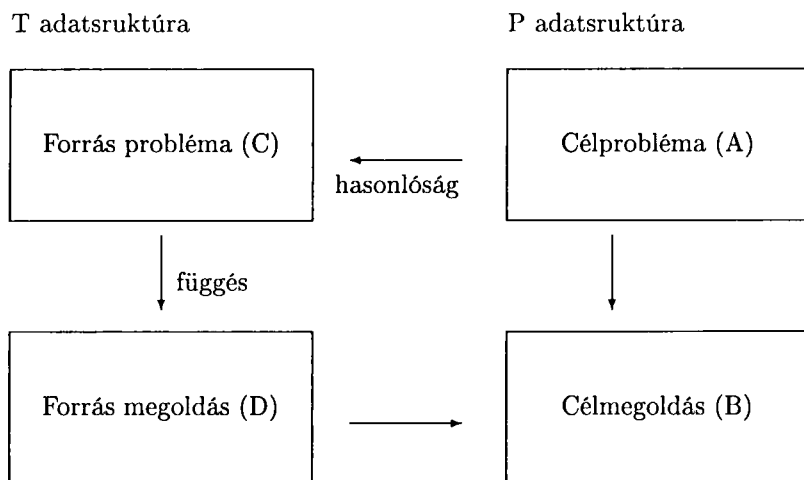
kai levezetési szabályok segítségével előállított levezetés formájában (pl. elsőrendű predikátum kalkulus, automatikus tételbizonyítás [7]).

- A hasonlóságot figyelembe vevő (analóg)
Egy struktúrált tudásbázis alstruktúráinak hasonlóságán alapul. Megvalósításhoz egyeztetés, a hasonlóság és a függőségi kapcsolatok kiértékelése szükséges.
- Az egyediből az általános felé haladó (induktív), általánosításon és absztrakción alapuló következtetés
Az öröklődési mechanizmust megvalósító eljárás. Közvetlenül kapcsolódik az osztályozáson alapuló következtetéshez.

Ebben a cikkben a hasonlóságon alapuló következtetések közül az eset alapúval fogunk foglalkozni. A bevezető ismertetések után az eset alapú következtetés egy lehetséges megközelítését mutatjuk meg az objektum orientált ismeretábrázolási rendszerek környezetében, ahol az eseteket hierarchikusan szervezzük. A módszer lényegét egyszerű példákon illusztráljuk.

2. Hasonlóságon alapuló következtetés

A hasonlóságon alapuló következtetés egyfajta megközelítésében a következtetésben részt vevő elemi egységeket adatsztruktúráként figyelembe véve (lásd [3]) tekintsük a következő formalizmust: legyenek P és T adatstruktúrák, A és B alstruktúra P -ben valamint C és D alstruktúra T -ben. Az analógián alapuló következtetés megfelelteti egymásnak az A és C alstruktúrákat. Amennyiben C -ből D -re előzőleg levontunk valamilyen következtetést, akkor ennek mintájára A -ból követ-



1. ábra. Hasonlóságon alapuló következtetés

keztetünk B-re. Ez az eljárás két kapcsolatot feltételez. Egyrészt, az A és B valamint a C és D struktúrák közötti függést, másrészt az A és C valamint a B és D struktúrák közötti hasonlóságot. Ugyanakkor kérdéses, hogy milyen következtetési módot használunk, amikor C-ből D viselkedését írjuk le. Minél nagyobb A és C közötti hasonlóság (határesetben A azonos C-vel) és minél erősebb a függés C és D között (határesetben a következtetési mód a deduktív levezetés), A-ból B-re vonatkozó hasonlóságon alapuló következtetés annál inkább közelít a deduktív levezetéshez.

3. Eset alapú következtetés

A hasonlóságon alapuló következtetés egyik formája az eset alapú következtetés (case based reasoning, CBR a továbbiakban). Ennél az eljárásnál arról van szó, hogy az előzőleg már megismert eseteket használjuk fel az új problémák megoldása során. Valójában az emberi gondolkodás nagyon hatékonyan alkalmazza ezt a módszert a hétköznapi élet számos területén (lásd [4]). Bizonyos szakmákban a tanulás a különböző esetek sokaságának memorizálását jelenti. Az eset alapú következtetés olyan modell felállítását teszi lehetővé, amely magában foglalja a probléma megértését, már megoldott más problémákhoz való viszonyát, megoldását és a tanulást egyaránt. Az eset alapú következtetés alkalmas hiányosan vagy pontatlanul definiált szituációk kezelésére, vagy olyan kiértékelések elvégzésére, amelyekre nem létezik jól definiált algoritmus.

Az eset alapú következtetéshez a problémát megfelelően reprezentáló alapesetekre és jó adaptáló mechanizmusra van szükségünk. Az eset-bázis tartalmazza a sikeres és sikertelen próbálkozásokat egy cél eléréséhez. A sikeres esetek segítséget nyújtanak a probléma megoldására, míg a sikerteleneket felhasználhatjuk a lehetséges hibák elkerülésére.

Az új szituáció megértésének képessége a régi tapasztalatok függvényében két fő részből áll: egyrészt emlékezni kell a régi tapasztalatra, felidézni azt valamilyen jellemzői (indexek) alapján, másrészt interpretálni az új szituációt a visszakeresett függvényében. Ezek után egy adaptációs eljárással módosítjuk a régi megoldást az új szituáció által támasztott követelmények figyelembe vételével. Az eset alapú következtető rendszerek egyik jellegzetessége, hogy képesek tanulni a tapasztalatokból. Ehhez szükség van egy bizonyos visszacsatolásra, hogy a rendszer értelmezni tudja, mi működött jól és rosszul az általa szolgáltatott megoldásban.

Formálisan azt mondhatjuk, hogy az eset alapú következtetés célja, hogy hozzárendeljen a P célproblémához egy Megoldás (P) megoldást, felhasználva az eset-bázisban talált P' forrásproblémának a Megoldás (P') megoldását.

Esetnek egy $(P, \text{megoldás-menete}(o_1, \dots, o_l), \text{megoldás}(P))$ hármast nevezünk a továbbiakban, ahol P-vel jelöljük a probléma valamilyen reprezentációját, a megoldás-menete (o_1, \dots, o_l) az o_1, \dots, o_l operátorok azon sorozatát jelöli, ame-

lyek a P problémára, mint kezdeti állapotra alkalmazva előállítják a megoldás (P) megoldást, azaz a végállapotot.

Az eset-bázis az esetek egy véges halmaza, azaz

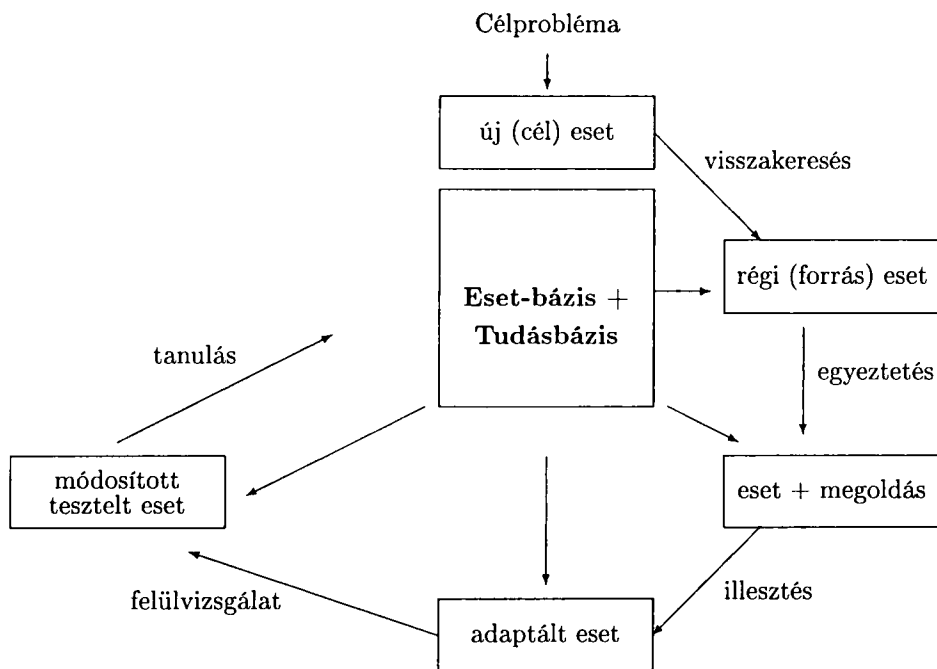
$$\text{Eset-bázis} = \{\text{eset}_k \mid k = 1 \dots n\}, \quad \text{ahol}$$

$$\text{eset}_k = (P_k, \text{megoldás-menete}(o_{1_k}^k, \dots, o_{l_k}^k), \text{megoldás}(P_k)).$$

Szokás a hasonlóságon alapuló következtetés szóhasználatát követve forrásproblémának nevezni azt a problémát, amelyet az eset-bázisban találtunk, s amelyből a célprobléma (vagy új eset) megoldása kialakítható.

Az eset alapú következtetőrendszer segítségével különféle típusú problémák – diagnózis, konfiguráció, tervezés – megoldását állíthajuk elő.

3.1. A CBR életciklusa



2. ábra. Az eset alapú következtetés életciklusa

1. Az eset visszakeresése

Ez a lépés egy keresési és egy illesztési eljárás kombinációja. Az eset visszakeresése során két alapvető problémával kell megbirkóznunk. Az esetek indexelése és a hasonlósági kérdések. Az indexelés, azaz az esetek jellemzésére szolgáló

attribútumok kialakításának problémája során az indexeknek eléggé általánosnak kell lenniük, hogy lehetővé tegyék az esetek alkalmazását a különböző szituációkban, ugyanakkor megfelelő módon specifikusnak, hogy a visszakeresés során találjunk illeszthető eseteket az eset-bázisban. Az illesztéshez szükséges a hasonlóság megállapítása. Ehhez viszont be kell vezetni valamilyen távolság definíciót, melynek alapján választunk a jelöltek közül.

2. Egyeztetés, a közelítő megoldás javaslata
Az előbbiek szerint megtalált eset(ek)ből kiindulva egy előzetes, közelítő megoldást konstruálunk. Általában kiválasztjuk a legjobb visszakeresett eset megoldását, mint első közelítést. Itt az a kérdés merül fel, hogy a régi megoldás mely részeit használjuk fel.
3. Illesztés, adaptáció
Mivel az új szituáció ritkán azonos valamely régivel, ezért annak megoldását módosítanunk kell az aktuális szituáció sajátos feltételeivel. Például valamilyen helyettesítő eljárással meg kell oldanunk az aktuális paraméterek illesztését. Szokásosan két megközelítési módot különböztetünk meg. Generáló adaptáció esetén minden szükséges ismeret a rendelkezésünkre áll a tudásbázisban a feladat megoldásához. Az átalakító adaptáció esetén hiányosak az ismereteink, a tudásbázisból nem vagyunk képesek a megoldás generálására (lásd [6]).
4. Felülvizsgálat, igazolás
Az illesztés során kialakult közelítő megoldás értelmezése során ellenőrizzük az esetleges alternatív megoldásokat és a sikertelen megoldásokra magyarázatot szolgáltatunk.
5. Tanulás, memorizálás
Az eset-bázist kiegészítjük a kialakult új eset (probléma, megoldás, megoldásmenete) hármassal. Megtörténik az új ismeretek szintézisének beépítése. Megjegyezzük, hogy a tanulási folyamat nem feltétlenül kapcsolódik közvetlenül a CBR következtetési eljárásához.

4. CBR az OOKBR-ben

Ebben a fejezetben először az objektum alapú ismeretábrázolás (object oriented knowledge based representation, OOKBR a továbbiakban) és az osztályozás alapfogalmait definiáljuk, majd az eset alapú következtetőrendszert elhelyezzük ebben a környezetben, és bemutatjuk hogyan lehet az OOKBR hierarchia keretében megfogalmazni a CBR életciklus egyes elemeit.

4.1. Objektum alapú ismeretábrázolás

A valós világ egy fogalmát reprezentáló osztály egy elemhalmazt csoportosító és saját leíróval rendelkező generikus egység. Egy ilyen C osztály jellemezhető a reprezentált fogalom állapotát és viselkedését leíró tulajdonsághalmazzal. Jelöljön a_k egy attribútumot és s_k a hozzátartozó specifikációt (az értékek típusát, értelme-

zési tartományát, számosságát, stb), ahol a_k -k páronként különbözőek. Ekkor a C osztály kifejezhető az (a_i, s_i) párok konjunkciójaként:

$$C = (a_1, s_1) \sqcap (a_2, s_2) \dots, \sqcap (a_n, s_n).$$

Az osztályok klasszifikációja során az osztályhoz tartozó egyedek közös tulajdonságait használjuk fel. Ezen alapul egy általános reláció, az alárendelés, amely az osztályok hierarchiába szervezését biztosítja. A pontos formális definíciót a leíró logikák kidolgozása során definiálták (lásd [1]).

Legyen χ osztályok véges halmaza és legyen \sqsubseteq alárendelési reláció χ -n, ami egyébként részben rendezési reláció. Ekkor a $\mathcal{H} = (\chi, \top, \sqsubseteq)$ hálót fogalmi hierarchiának nevezzük. \top a χ egységeleme, a hierarchia gyökere a \sqsubseteq relációra nézve. Az osztályozási eljárás lehetővé teszi, hogy felismerjünk egy objektumot a tulajdonságait azonosítva (lásd [2]).

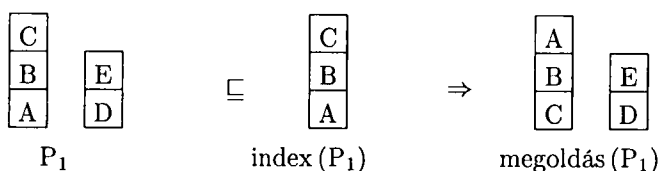
4.2. Az esetek hierarchikus szervezése

Tekintsük az esetekben megfogalmazott problémákat és azok indexeit objektumoknak. Az eset-bázisban tárolt esetek kezeléséhez szükséges, hogy az eseteket valamilyen módon indexeljünk, illetve ezen indexeken definiáljunk egy rendezési relációt, melynek segítségével összehasonlíthatjuk őket. Egy eset indexe a hozzárendelt problémának és alkalmanként a megoldás menetének főbb tulajdonságait írja le. Intuitíve, az eset indexe (jelölése: $\text{index}(\text{probléma})$) a probléma azon részét jeleníti meg, amely közvetlenül szerepet játszik a probléma megoldásának (jelölése: $\text{megoldás}(\text{probléma})$) előállításában. Az az eljárás, amely a $(\text{probléma}, \text{megoldás}(\text{probléma}))$ páros ismeretében az $\text{index}(\text{probléma})$ -t meghatározza, le választja a problémáról azokat az elemeket, amelyek nem játszanak szerepet a megoldás (probléma) előállításában. Amennyiben el tudjuk dönteni egy elemről, hogy részt vesz-e vagy sem ebben a folyamatban, akkor az indexelés automatikus lehet. Ám gyakran ez nem lehetséges, így az indexelés intuitív, azaz erősen függ a szakterület ismereteitől és a szakértőtől.

Esetünkben az $\text{index}(\text{probléma})$ -t és magát a problémát ugyanazon formalizmus szerint, az objektum alapú ismeretábrázolás eszközrendszerével reprezentáljuk, és ily módon az előzőekben bemutatott alárendelés fogalmát alkalmazva beszélhetünk fogalmi hierarchiáról a problémák között éppúgy, mint az indexek között.

4.3. Példa

4.3.1. Kockák az asztalon. Tekintsük a következő példát (lásd [5]), amelyben az univerzumot egy asztal és címkézett kockák alkotják. Egy kockát elhelyezhetünk az asztalra vagy egy másik kockára. Az A kockát szabadnak nevezzük, ha nincs rajta egyetlen másik kocka sem. Legyen adva a 3. ábrán látható helyzet. A P_1 problémában az A kocka az asztalon, rajta a B és a B -n a C kocka. Mellettük az asztalon a D , rajta az E kocka található. A megoldás (P_1) kialakításában az $\text{index}(P_1)$ a meghatározó.



3. ábra. Forrás eset

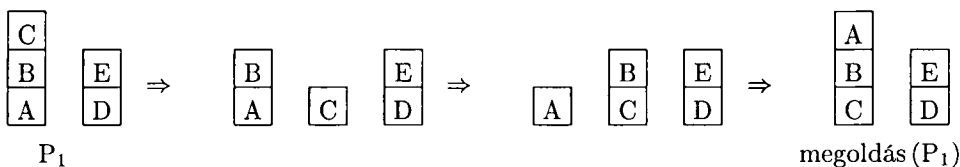
A kockák mozgatásához a következő operátorokat vezetjük be:

$O_1(A, B)$ A-t leveszi B-ről és leteszi az asztalra,

$O_2(A, B, C)$ A-t leveszi B-ről és leteszi C-re,

$O_3(A, B)$ A-t felveszi az asztalról és leteszi B-re.

A megoldás menetét, $O_1(C, B)$, $O_2(B, A, C)$, $O_3(A, B)$, a 4. ábra mutatja.



4. ábra. Megoldás-menete

4.3.2. Mérési folyamat felügyelete. Legyen a következő példánkban a feladat egy mérési folyamat felügyelete, ahol a megfigyelés során különböző tulajdonságok értékének változását ellenőrizzük. A probléma megoldását az jelenti, ha meghatározzuk a beavatkozás, azaz a tulajdonságok megváltoztatásának mértékét. Az első probléma leírására az alábbi három tulajdonság-érték páros szolgál:

$$\text{Surv } P_1 : (T_1, E_1) \sqcap (T_2, E_2) \sqcap (T_3, E_3).$$

A probléma megoldása során a T_1 tulajdonság E_1 értékét V_1 -el, a T_2 tulajdonság E_2 értékét V_2 -el kell módosítani.

$$\text{Megoldás}(\text{Surv } P_1) : (T_1, E_1 \circ V_1) \sqcap (T_2, E_2 \circ V_2) \sqcap (T_3, E_3).$$

Ekkor az index és a megoldáshoz szükséges operátorok a következőképpen alakulnak:

$$\begin{aligned} \text{index}(\text{Surv } P_1) &: (T_1, E_1) \sqcap (T_2, E_2) \\ \text{megoldás-menete} & (M_1(T_1, V_1), M_2(T_2, V_2)). \end{aligned}$$

5. Eset visszakeresés, adaptáció

5.1. Eset visszakeresés

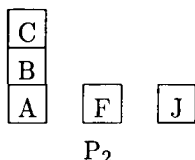
Az eset visszakeresése során a célproblémának megfelelő esethez hasonló eseteket térképezzük fel az eset-bázisban, hogy megkapjuk a forrás esetet. A visszakeresést nem a megoldással rendelkező esetek, hanem a hozzájuk rendelt indexek körében végezzük. Számos megközelítéstől eltérően, ahol hasonlósági mértéket alkalmaznak a forrás-eset visszakeresésére, mi a visszakeresést úgy tekintjük, mint a cél-eset osztályozását az indexhierarchiában. A visszakeresés művelete két lépésben történik:

- A célprobléma indexelése. Itt egy triviális indexelést adunk meg, azaz $\text{index}(\text{cél}) = \text{cél}$. Hiszen, amíg nem oldottuk meg a célproblémát, nem tudhatjuk, melyek azok az elemek, amelyek nem játszanak szerepet a megoldás előállításában.
- Osztályozás. A célt az index hierarchiában osztályozzuk, azaz megkeressük a $\text{cél}(\text{index})$ legspecifikusabb alárendelőit. Azok az esetek, amelyek alárendeltjei az így megtalált indexnek, kiindulópontjai lehetnek egy adaptációs eljárásnak, és ezzel kezdeti megoldást szolgáltatnak.

Megjegyezzük, hogy a célprobléma megoldását követően, a memorizálás fázisban finomítunk az indexelésen, hogy az eset-bázisban a későbbi feladatok megoldása során használható indexet tároljunk.

5.2. Példa eset visszakeresésre

5.2.1. Tekintsük a P_2 célproblémát az 5. ábrán.



5. ábra. Célprobléma

Az $\text{index}(P_2) = P_2$ triviális indexelést követően végezzük el az $\text{index}(P_2)$ osztályozását az indexhierarchiában. Itt megtaláljuk a 4.3.1 példában leírt $\text{index}(P_1)$ bejegyzést, amely alárendeli az $\text{index}(P_2)$ -t. Így a P_1 problémához tartozó eset kiindulópontul szolgálhat az adaptációs eljárásban.

5.2.2. Tekintsük a $\text{Surv } P_2$ célproblémát:

$$\text{Surv } P_2 : (T_1, EP_1) \sqcap (T_2, EP_2) \sqcap (T_3, EP_3).$$

Az $\text{index}(\text{Surv } P_2) = \text{Surv } P_2$ triviális indexelést követően végezzük el az $\text{index}(\text{Surv } P_2)$ osztályozását az indexhierarchiában. Itt megtaláljuk a 4.3.2 példában leírt $\text{index}(\text{Surv } P_1)$ bejegyzést, amely alárendeli az $\text{index}(\text{Surv } P_2)$ -t. Így a

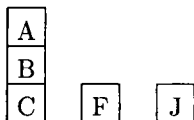
Surv P_1 problémához tartozó eset kiindulópontul szolgálhat az adaptációs eljárásban.

5.3. Adaptáció

A forrás \sqsubseteq index (forrás) \supseteq cél alárendeléseket figyelembe véve az adaptációs eljárás a forráshoz tartozó esetben leírt megoldás-menete (o_1, \dots, o_l) operátorokat alkalmazza a célproblémára.

5.4. Példa adaptációra

5.4.1. Folytassuk az 5.2.1 és 4.3.1 pontokban megkezdett példánkat. A P_1 probléma megoldását az $O_1(C, B)$, $O_2(B, A, C)$, $O_3(A, B)$ operátorsorozat adta. Ennek megfelelően a P_2 -re is alkalmazzuk ezeket az operátorokat, hogy megkapjuk a megoldás (P_2)-t (6. ábra).



6. ábra. megoldás (P_2)

5.4.2. Folytassuk az 5.2.2 és 4.3.2 pontokban megkezdett példánkat. A Surv P_1 probléma megoldását az $M_1(T_1, V_1)$, $M_2(T_2, V_2)$ operátorsorozat adta. Ennek megfelelően a Surv P_2 -re is alkalmazzuk ezeket az operátorokat, hogy megkapjuk a megoldás (Surv P_2)-t:

$$\text{Megoldás (Surv } P_2) : (T_1, EP_1 \circ V_1) \sqcap (T_2, EP_2 \circ V_2) \sqcap (T_3, EP_3).$$

5.5. Gyenge osztályozás

Az előbb leírt eljárás pontos illeszkedésen alapuló osztályozás, amit erős osztályozásnak is nevezünk. Gyakran előfordul azonban, hogy a célprobléma tulajdonságaihoz nem találunk pontosan illeszthető indexet a forrásproblémák körében. Ekkor az úgynevezett gyenge osztályozást alkalmazzuk, melynek alapötlete, hogy a forrás-eset indexét és a célt módosítjuk úgy, hogy az alábbi alárendelési relációk fennálljanak:

$$(1) \quad \text{forrás} \sqsubseteq \text{index (forrás)} \simeq \phi(\text{index (forrás)}) \supseteq \psi(\text{cél}) \simeq \text{cél}.$$

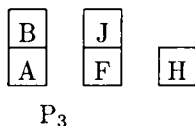
A módosításhoz az általánosítás, specializálás és típusváltoztatás műveleteket alkalmazzuk, melyek az adott problémától és területtől függenek. Az (1) alárendelési kapcsolatokban a ϕ és ψ függvények úgy biztosítják a módosításokat, hogy közben az alábbi tulajdonságokkal rendelkezzenek:

- ha ismert a megoldás ($\text{index}(\text{forrás})$), akkor létrehozható a megoldás($\phi(\text{index}(\text{forrás}))$),
- ha ismert a megoldás($\psi(\text{cél})$), akkor a megoldás (cél) megkonstruálható.

Ez a két tulajdonság adja az (1) alárendelési kapcsolatokban a \simeq értelmét. Az index (forrás)-ról a $\phi(\text{index}(\text{forrás}))$ -ra való átmenet lehetséges úgy, hogy megőrizzük az adott probléma megoldását, s hasonló a helyzet a $\psi(\text{cél})$ és cél átmenetre is. Vagyis a gyenge osztályozás során az adaptációs lépés az erős osztályozás általánosítás-spezializálás műveleteihez képest kiegészül a ϕ és ψ függvényeket figyelembe vevő módosítási művelettel.

5.6. Példa gyenge osztályozásra

5.6.1. Legyen adva célproblémaként a 7. ábrán látható helyzet.

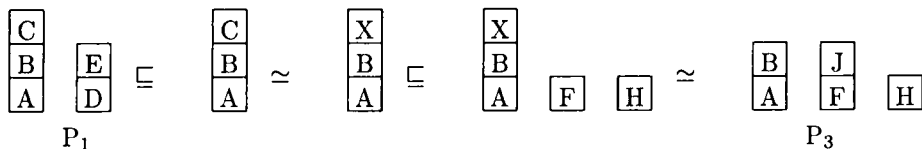


7. ábra. Célprobléma

A 4.3.1 példában adott P_1 problémát találjuk az eset visszakeresése során a legközelebb a P_3 célproblémához, azzal a módosítással, hogy

$$\phi(\text{index}(P_1)) = \begin{array}{|c|} \hline X \\ \hline B \\ \hline A \\ \hline \end{array} \quad \text{és} \quad \psi(P_3) = \begin{array}{|c|} \hline X \\ \hline B \\ \hline A \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline F \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline H \\ \hline \end{array} ,$$

azaz az (1) alárendelési viszonynak a 8. ábrán látható helyzet felel meg.



8. ábra. Gyenge osztályozás

Ekkor a megoldás-menete operátorok a következőképpen változnak:

$$O_1(\phi(C), B), O_2(B, A, \phi(C)), O_3(A, B).$$

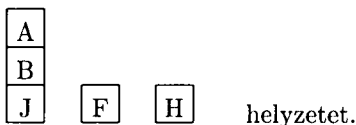
A $\phi(\text{index}(P_1))$ és $\psi(P_3)$ közötti kapcsolatot figyelembe véve kapjuk az

$$O_1(\psi(J), B), O_2(B, A, \psi(J)), O_3(A, B)$$

operátorsorozatot, azaz P_3 -ra megoldásként az

$$O_1(J, B), O_2(B, A, J), O_3(A, B)$$

operátorsorozatot, tehát a



5.6.2. Legyen adva célproblémaként:

$$\text{Surv } P_3 : (T_1, EC_1) \sqcap (T_2, EC_2) \sqcap (T_4, EC_4).$$

A 4.3.2-ben adott $\text{Surv } P_1$ problémát találjuk az eset visszakeresés során a legközelebb a $\text{Surv } P_3$ problémához, azzal a módosítással, hogy:

$$\phi(\text{index}(\text{Surv } P_1)) : (T_1, E_1) \sqcap (T_2, E_2) \sqcap \phi(T_3), E_3)$$

$$\psi(\text{Surv } P_3) : (T_1, EC_1) \sqcap (T_2, EC_2) \sqcap \psi(T_4), EC_4).$$

Ekkor a megoldás menetét szolgáltató operátorok a következőképpen módosulnak:

$$\text{megoldás-menete } (M_1(T_1, V_1), M_2(T_2, V_2), M_3(\phi(T_3), V_3))$$

azaz a megoldás:

$$\text{Megoldás } (\text{Surv } P_3) : (T_1, EC_1 \circ V_1) \sqcap (T_2, EC_2 \circ V_2) \sqcap (T_4, \psi(EC_4) \circ \phi(E_3)).$$

6. Összegzés

Ebben a cikkben bemutattuk az eset alapú következtetés egy lehetséges megközelítését, amely a klasszifikáción (osztályozáson) alapul egy objektum alapú ismeretrepresentációs rendszerben. Az eset alapú következtetés keresési és illesztési műveleteinek formalizálásához figyelembe vettük a leíró logikák fogalmait is. Láthattuk a CBR és az osztályozás közötti kapcsolatot, ha az eseteket és az indexeket hierarchiába szervezzük. A módszer előnye, hogy mind az esetek, mind az indexek kezelésére ugyanazon ábrázolási technikát alkalmazzuk.

Hivatkozások

- [1] Bognár, K., Leíró logikák az ismeretábrázolásban, *Alkalmazott Matematikai Lapok, Budapest* 20 (2000/2), 183–193.
- [2] Bognár, K., Aspects théoriques de la classification à base de treillis, *Teaching Mathematics and Computer Science, Debrecen* 1 (2003/1), 125–135.
- [3] Bognár, K., 3. Structure Representation in Object Oriented Knowledge Based Representation Systems, *Acta Mathematica Academiae Paedagogicae Nyíregyháziensis* 18 (2) (2002), 77–84.
- [4] Kolodner, J., *Case Based Reasoning* (Morgan Kaufmann Publishers, 1993).
- [5] Lieber, J. at Napoli, A., Raisonement à partir de cas et résolution de problèmes dans une représentation par objets, *Revue d'intelligence artificielle* (13/1999) 9–35.
- [6] Mille, A., Fuchs, B. at Chiron, B., Raisonement fondé sur l'expérience en supervision industrielle, *Revue d'intelligence artificielle* (13/1999), 97–128.
- [7] Pásztor Varga, K. and Várterész, M., Comparison and usability of two rewriting systems for theorem proving, *Pure Mathematics and Applications, Budapest* (13/2002), 293–302.

(Beérkezett: 2003. május 21.)

DEBRECENI EGYETEM
INFORMATIKAI INTÉZET
DEBRECEN H-4010, PF. 12
bognar@inf.unideb.hu

A CLASSIFICATION BASED APPROACH TO CASED BASED REASONING

KATALIN BOGNÁR

In this work, we try to formalize the relations existing between the retrieval and adaptation operations, and the classification process, in the context of object oriented representation systems, including description logics. When cases and indexes are organized in hierarchies, the links between CBR and classification are very close. A case should be a structured knowledge unit associated with operating instructions and explanations.

A KROMATIKUS SKÁLA TIZENKÉT HANGJÁBÓL KÉPEZHETŐ HANGKÉSZLETEK ÁTTEKINTÉSE

ÁDÁM ANDRÁS

Budapest

Kollégám és szeretett barátom, Pollák György emlékének

Egy 12 elemet tartalmazó halmazból ($2^{12} =$) 4096-féle módon lehet részhalmazokat kiválasztani. Akkor azonban, ha alaphalmaznak a 12 (temperált) skálahang összességét vesszük, kézenfekvő, hogy ne tekintsünk lényegesen különbözőnek két hangkészletet (részhalmazt), amennyiben azok transzponálás révén előállíthatóak egymásból. Ezt a szemléletet elfogadva osztályokba sorolhatjuk a hangkészleteket, az osztályok – azaz a lényegesen különböző hangkészletek – száma 352-nek adódik (az üres hangkészletet is számítva). A jelen munkában úgy sorolunk fel 352 hangkészletet, hogy az osztályok mindegyikét egy-egy hangkészlet képviseli. Foglalkozunk emellett a hangkészletek szimmetria-viszonyaival és a belőlük nyerhető skálákkal vagy moduszokkal (amelyek úgy állnak elő, hogy a hangkészletben egy hangot alaphangként kitüntetünk és hozzá viszonyítjuk a többi hangot).

1. Bevezetés

1.1. E munkában az egyenletesen temperált zenei skála 12 hangjának összességéből kiválasztható hangkészleteket vizsgáljuk az egymásból transzpozíció révén való elérhetőség és a szimmetria-tulajdonságok szempontjából. Ha a K_1 és K_2 hangkészletek transzponálással átvihetők egymásba, akkor lényegileg megegyezőeknek tekintjük, ugyanazon osztályba tartozóaknak vesszük őket; meggondolásainknak fő célja az így adódó *osztályok* kombinatorikus áttekintése. K_1 -et és K_2 -t egybevágoaknak fogjuk mondani, ha közös osztályba tartoznak; szemléletmódunkat olykor azzal a fordulattal juttatjuk kifejezésre, hogy „egybevágoóságtól eltekintve” (vagy hogy „egybevágoóság erejéig”) törekszünk a hangkészletek áttekintésére.

A jelen munkát az Országos Tudományos Kutatási Alap (OTKA) T 37846. sz. témája támogatja.

Fejtegetéseink tisztán leíró jellegűek; alig utalunk rá, hogy a muzsika *időben* játszódik le, és attól is eltekintünk, hogy az élő zenében megszólaló hangok nem tisztán szinuszos rezgések, hanem felhangokkal vannak színezve. Ezen idealizáló feltevések mellett a 2. részben további egyszerűsítésekkel is találkozni fog az olvasó.

A tárgyunkat tehát meglehetősen leszűkítettnek választottuk meg; ez a korlátozás azonban azzal a nyereséggel jár, hogy a felvállalt témának kerek, lezárt rendszerezését tudjuk adni.¹

1.2. Egy K hangkészlet hangjai (általában) nem egyenrangúak a zene gyakorlatában, hanem a hangok egyike kitüntetett szerepet játszik, és K többi hangját ehhez – az alaphanghoz – viszonyítjuk.² A hangkészletet és a benne kiválasztott alaphangot – Bárdos Lajos szóhasználatával [1] – együtt modulusznak nevezzük. A moduluszokkal kapcsolatosan is természetes szemléletmód, hogy a transzponálással egymásba átvihető moduluszok között nem teszünk különbséget; most azonban azt a szigorúbb követelményt is kirójuk, hogy a transzpozíció alaphangot alaphangba köteles átvinni.

Az ilyen értelemben lényegileg nem különböző moduluszokat egymással izomorfaknak nevezzük. A hangkészletek egybevágósági osztályainak rendszerezéséhez csatlakozva a moduluszok izomorfia-osztályainak áttekintésével is foglalkozni fogunk a következőkben.³

1.3. E közlemény 2. része az alapvető fogalmakat és megállapodásokat rögzíti le. A 3. részben foglalt vizsgálódások elméleti oldalról készítik elő a hangkészletek áttekintését; itt a hangkészlet aszimmetrikus vagy szimmetrikus voltát jellemző két szám: az index és az azzal összefüggő rend játszik központi szerepet.

A 4. résznek – a munka gerincének – fő tárgya az egybevágósági osztályokat reprezentáló 352 hangkészlet áttekintése. Az 1., 2., 3., 5. és 6. táblázatokban ténylegesen felsoroljuk (egybevágóság erejéig) a 2, 3, 4, 5, illetve 6 hangot tartalmazó hangkészleteket, megszakítva ezt (a 4.4. szakaszban) újabb elméleti vizsgálódásokkal. Az egyre terjedelmesebbé váló felsorolások bizonyára próbára teszik az olvasó türelmét, a további (a 7, 8, ..., 12 és 0 méretű) hangkészletekről ezért itt csak általánosságban szólunk, a (most már menthetetlenül unalomba fúló) részletező táblázatokat a C. függelékbe száműzzük.

Az 5. részben statisztikai összesítéssel zárjuk le a hangkészletek és a moduluszok áttekintését.

¹ A kombinatorika bármely szakembere számára, aki a zenéről több-kevesebb ismerettel bír, a megfontolásaink fő vonalai bizonyára nem teljesen újszerűek.

² Ez a hagyományos zenei stílusok esetén van így. A (20. századi) atonális zene a hangkészlet hangjainak teljes egyenrangúságára törekszik.

³ Esetleges dolog, hogy egybevágóságról beszélünk hangkészletek között és izomorfíát mondunk, ha moduluszokról esik szó; a felcserélt terminológiával is éppen úgy élhetnénk. Fontos azonban egymástól élesen elütő két szót használni; ha nem így járnánk el, az igen zavaró a fejtegetések megértését.

A három függelék közül az elsőben rövid vázlatot adunk a temperált és a racionális elv szerint kijelölt frekvencia-arányok egybevetéséről (az érdeklődők Tarnóczy Tamás [5] könyvének 7. és 9. fejezeteiben gazdag további anyagot találhatnak). A B. és C. függelékben az adósságok törlesztését kapja meg az olvasó: itt pótoljuk a 3. és 4. rész tömörsége kedvéért mellőzött bizonyításokat, illetve táblázatokat.

1.4. Az, hogy az egybevágósági osztályokból mely hangkészleteket szemelünk ki azok reprezentálására, és hogy a kiválasztottakat miképpen vesszük sorra, voltaképpen eléggé önkényes. A *c* hang minden kiválasztott (nem üres) hangkészletben benne van, és a 3, 4, ..., 9 méretek esetében olyan a kiválasztás, hogy a legnagyobb hangköz a *c* hang fölé esik. Emellett a 3, 4, 5, 6 méretű hangkészletek sorában egymás mellé kerülnek azok, amelyek az oktávot egyformán osztják fel hangközökre.⁴

Amikor a továbbiakban két hangköz egyenlő [kisebb vagy nagyobb] voltáról beszélünk, ezen a frekvencia-arányok egyenlő [stb.] voltát értjük. Talán nem teljesen szakszerű ez a szóhasználat (vö. [5], 160. old.), a hangmagasságok szubjektív összemérését azonban éppen fedi.

Az A. függelékben előforduló cent-értékek utolsó számjegyeinek gépi ellenőrzését Ádám Bence végezte el.

1.5. Amikor a régóta készen álló táblázatok közleménnyé való kibővítéséhez hozzáfogtam, azt reméltem, hogy a cikk végső kialakításában Pollák György lényeglátása és éles bíráló szelleme nagy segítségemre lesz. Sajnos, munkámat már csak emlékének ajánlhatom.

A jelen közlemény kidolgozása után jutott tudomásomra, hogy Éliás Ádám [2] cikksorozata számottevő átfedésben van a munkámmal, különösképpen az 1.–3., 5.–6., 10.–13. táblázatokat illetően.

Hálás köszönettel tartozom Kovács Brigittának, aki a muzsikusszakember szemszögéből tett hasznos észrevételeket meg gondolásaimra és Éliás cikkeire felhívta a figyelmemet.

2. Mivel is fogunk foglalkozni (és mivel nem)?

2.1. E munka lényeges részében (kivételt csak az A. függelék képez) a zenei hangok összességének a kromatikus skála 12 hangját tekintjük. E szemléletnek megfelelően elfogadjuk a következő két leegyszerűsítő feltevést:

(A) Az egyenletes temperálással adódó hangmagasságokat vesszük alapul, azaz feltesszük, hogy bármely két hang frekvencia-aránya $2^{j/12}$ alakban írható, ahol *j* egész szám.

(B) Az egymástól oktáv-távolságra levő hangok között nem teszünk különbséget. E megállapodás következtében az (A) pontban említett $2^{j/12}$ frekvencia-

⁴Például: a 4.3. szakaszban azt tapasztalhatjuk, hogy a $H_{20}^{(5)}, H_{21}^{(5)}, \dots, H_{31}^{(5)}$ jelölésű hangkészletek egymást követik az 5. táblázatban. Éppen ezek a hangkészletek – és a velük egybevágóak – tagolják egy tiszta kvartra, egy kis tercre, egy nagy szekundra és két kis szekundra az oktávot.

arányokkal elég a $|j| < 12$ esetben foglalkoznunk. Feltevésünk lehetőséget nyújt arra a további megállapodásra, hogy áttekintésünket (a meghatározottság kedvéért) az egyvonalas oktáv hangjaira korlátozzuk.

A fenti két feltevésünket kiegészítjük azzal a konvencióval, hogy a zongora fekete billentyűinek hangjait szívesebben nevezzük meg (és szívesebben jelöljük) *fisz*, *cisz*, *gisz*, illetve *b*, *esz* alakban, mint *e* hangok enharmonikus párjaiként.

Az elmondottak értelmében a vizsgáldásaink tárgyát az egyvonalas oktáv 12 hangjából álló

$$\{c, cisz, d, esz, e, f, fisz, g, gisz, a, b, h\}$$

halmaz képezi. Jelöljük *e* halmazt *M*-mel. Az *M* halmaz részhalmazainak jelölésére használjuk most a *K* betűt, és nevezzük *e* részhalmazokat hangkészleteknek. Az összes hangkészletek száma nyilván $4096 (= 2^{12})$, ebbe az üres hangkészlet és a teljes *M* halmaz is beleszámít.

2.2. Induljunk ki egy *K* hangkészletből, jelöljük $t(K)$ -val azt a hangkészletet, amely úgy adódik, hogy *K* minden eleme helyett a nála kis szekunddal magasabb hangot vesszük, vagyis hogy a *K*-beli hangokat kis szekunddal felfebb transzponáljuk. Mondhatjuk azt is, hogy *t* a

$$\begin{pmatrix} c & cisz & d & esz & e & f & fisz & g & gisz & a & b & h \\ cisz & d & esz & e & f & fisz & g & gisz & a & b & h & c \end{pmatrix}$$

permutációja az *M* halmaznak. E művelet ismételt alkalmazásával további transzponáltakat kaphatunk *K*-ból: $t^2(K)$ -t, $t^3(K)$ -t, ...; ez azt jelenti, hogy nagy szekunddal, kis terccel, ... transzponálunk felfelé. Néha célszerű $t(K)$ helyett $t^1(K)$ -t írni; megállapodunk továbbá abban, hogy $t^0(K)$ az eredeti *K* hangkészletet jelenti. Könnyen belátható, hogy a t^r és t^s transzpozíciókat egymás után alkalmazva éppen a t^{r+s} transzpozíciót hajtjuk végre.

A (B) feltevéshez csatlakozó megállapodás szerint a t, t^2, t^3, \dots transzpozíciókat úgy értjük, hogy amennyiben kilépnénk (felfelé) az egyvonalas oktáv hangjainak világából, úgy az új hang helyett annak az alsó oktávját vesszük. Ebből az következik, hogy bármely *K*-ra $t^{12}(K)$ megegyezik az eredeti *K* hangkészlettel (továbbá hogy $t^{13}(K) = t(K)$, $t^{14}(K) = t^2(K)$ stb. is igaz), új hangkészleteket tehát csak a $t, t^2, \dots, t^{10}, t^{11}$ transzpozíciók szolgáltathatnak. (Látni fogjuk, hogy ezek sem mindig.)

Két K_1, K_2 hangkészletet *egybevágónak* mondunk, ha K_2 megkapható K_1 -ből transzponálással, azaz ha van (legalább egy) olyan t^w transzpozíció, amelyre $t^w(K_1) = K_2$. Ez csak akkor lehetséges, ha K_1 ugyanannyi hangból áll, mint K_2 . A kromatikus skála 12 hangjából képezhető hangkészleteket ilyen módon osztályokba soroltuk. *A jelen munka fő célja az egybevágósági osztályok rendszeres áttekintése.*

2.3. Jelöljük ki egy nem üres K hangkészlet elemei közül egy x hangot és nevezzük azt alaphangnak. Az így nyert (K, x) párat *modusznak* nevezzük.⁵

Legyen (K_1, x) és (K_2, y) két modulus. Pontosan egy olyan t^w transzpozíciója van a teljes M hangkészletnek ($t^0, t^1, t^2, \dots, t^{11}$ között), amelyre $t^w(x) = y$ igaz. Ha erre a transzpozícióra a $t^w(K_1) = K_2$ egyenlőség is teljesül, akkor azt mondjuk, hogy a (K_1, x) modulus *izomorf* a (K_2, y) modusszal. Az egybevágóság tekintetében különböző hangkészletek áttekintéséhez csatlakozva foglalkozni fogunk a modulusok izomorfiaosztályainak rendszerezésével is. A modulusok esetében világos, hogy mindegyik izomorfiaosztály 12 modulusból áll.

Két modulus izomorf volta erősebb megkötés annál, hogy azok mint hangkészletek egybevágóak. Például: $\{C, \text{fisz}, \text{gisz}\}$, $\{c, \text{Fisz}, \text{gisz}\}$, $\{c, \text{fisz}, \text{Gisz}\}$, egybevágóak – sőt: megegyezők – egymással mint hangkészletek; mint modulusok azonban (a nagybetűvel kezdett hangot véve alaphangnak) páronként különbözőek és nem is izomorfak.

2.4.



1. ábra

Vizsgáljuk tovább a $c, \text{fisz}, \text{gisz}$ hangokból álló K hangkészletet. K transzponáltjait az 1. ábrában soroljuk fel. (Az ábrában a módosító jel mindig csak a közvetlenül rákövetkező hangra vonatkozik. A g és a közötti hangot egy ízben a jobb áttekintés érdekében *asz*-ként jelöltük.) Ebben a példában a kiindulásul szolgáló hangkészlet transzponálásával csupa különböző hangkészletet kapunk.

Nézzük újabb példaként az egész hangú skálát mint hangkészletet:

$$K = \{c, d, e, \text{fisz}, \text{gisz}, b\}.$$

A t transzpozíciót K -ra alkalmazva a másik egész hangú skála adódik:

$$\{cisz, \text{esz}, f, g, a, h\},$$

$t^2(K)$ gyanánt pedig újra K -t kapjuk vissza.

⁵E definíció mögött a következő szemlélet áll: igaz ugyan, hogy az x alaphang nem több, mint a K hangkészlet hangjainak egyike, azonban mégis ő a „tájékozódási pont” abban az értelemben, hogy K -nak a többi hangjai x -hez viszonyítva töltenek be szerepet K -ban.

Az első példánkban az egymással egybevágó hangkészletek egy osztálya 12 hangkészletből állt, a második példánk esetén csak kettőből.

2.5. Ha olyan olvasó futotta át az eddig mondottakat, aki hivatásánál fogva jártas a zenében, sűrű fejcsóválásra indíthatták az egyszerűsítések és elhanyagolások, amelyekkel szembekerült.

Mély homályban maradt, hogy egy hangkészlet hangjait időben egyszerre (akkordként) vagy egymás után (mint skálát) képzelje-e el. Bele kellett törődnie, hogy pl. a tiszta kvintet $2^{7/12}$ frekvencia-aránynak tekintse, holott az élő zenében az többnyire $3/2$ aránynak hangzik (és ha nem, fülünk akkor is $3/2$ -nek fogja fel).⁶ Berzenkedéssel észlelhette, hogy – az enharmonikusan egyező hangok azonosítása folytán – a tárgyalás ügyet sem vet a vezetőhang-jellegű hangok felfelé vagy lefelé törekvésére, ami pedig a muzsika valóságos folyamatának savát-borsát adja. Botrányosnak találhatta sutba vágni azt a tényt, hogy egy sok hangot tartalmazó akkord merőben másképp hangzik össze úgy, ha több oktávon át szélesen szétterítve szól, mint ha egyetlen oktávon belüli hangfürtté kényszerülnek a hangok összezsúfolódni.

Alapjában véve ez az idegenkedés nagyon is jogos. Mégis, talán nem hiábavaló a reménység halvány szikrája abban, hogy a 2.1.–2.4. szakaszokra építendő áttekintés egyik-másik töredéke tanulságos lehet a művészi zenét elméleti beállítottsággal tanulmányozó szakemberek számára is.

(Itt jegyezzük meg, hogy a – lefelé történő $t^{-1}, t^{-2}, t^{-3}, \dots$ transzpozíciók bevezetésére nincs szükség, mivel ezek rendre megegyeznének a $t^{11}, t^{10}, t^9, \dots$ transzpozíciókkal.)

3. Elméleti vizsgálódások

3.1. Tekintsünk egy K hangkészletet. Nevezzük a K -ban foglalt hangok számát K méretének, jelöljük a méretet n -nel. Legyen i a legkisebb olyan pozitív szám, amelyre $t^i(K) = K$; ezt az i -t a K hangkészlet *indexének* fogjuk hívni. A $12/i$ hányadost K rendjének mondjuk és r -rel jelöljük.

Az index mindig létezik, minthogy $t^{12}(K) = K$ bármely hangkészletre igaz. Rövidesen látni fogjuk, hogy a rend szükségszerűen egész szám. A $t^i(K) = K$ egyenlőséget úgy értettük, hogy t^i a K hangkészletet *egészében* viszi át K -ba (hiszen azt a szigorúbb követelményt, hogy K minden egyes hangja önmagába menjen át, csak t^{12} és az ennek ismétlésével adódó transzpozíciók teljesítik).

A most kimondandó 3.1.–3.5. (továbbá a későbbi 3.6, 4.1, 4.2) megállapítások bizonyításával itt nem foglalkozunk, igazolásukra a B. függelékben fogunk visszatérni.

⁶Az A. függelékben még visszatérünk az ilyen jellegű kérdésekre.

3.1. MEGÁLLAPÍTÁS. Tekintsünk egy K hangkészletet, legyen K indexe i . Ekkor a K -t tartalmazó egybevágósági osztály pontosan a

$$(3.1) \quad K, t(K), t^2(K), \dots, t^{i-1}(K)$$

hangkészletekből áll, és ezek páronként különbözőek. A folytatásként képezhető

$$t^i(K), t^{i+1}(K), t^{i+2}(K), \dots$$

(végtelen) sorozatban periodikusan ismétlődik a (3.1) felsorolásban szereplő i számú hangkészlet.

Tudjuk, hogy az egybevágó hangkészleteknek ugyanaz a mérete. Az analóg állítás az indexekre is igaz:

3.2. MEGÁLLAPÍTÁS. Ha a K_2 hangkészlet transzponálással kapható a K_1 hangkészletből, akkor K_1 és K_2 indexe egyenlő egymással.

Azt, hogy a rend egész szám, a következő eredmény biztosítja:

3.3. MEGÁLLAPÍTÁS. Bármely hangkészlet indexe osztója 12-nek.

3.4. MEGÁLLAPÍTÁS. Legyen K egy n méretű és r rendű hangkészlet. Ekkor r osztója 12-nek is és n -nek is.

3.5. MEGÁLLAPÍTÁS. Legyen K egy n méretű és r rendű hangkészlet. Tekintsük a K -ből képezhető n moduszt. Ezek a moduszok n/r izomorfia-osztályba sorolódnak, és a szóban forgó izomorfia-osztályok mindegyike r -et tartalmaz a K -ből képezhető moduszok közül.

3.2. Bárdos Lajos [1] könyvében (a 4. fejezet elején) ez olvasható: „Minden hangrendszernek (meghatározott hangkészletnek) annyi modulusza van, ahány különböző hangfoka”.

Bárdos állítása valóban helytálló azokra a hangkészletekre, amelyeknek az indexe 12 (tehát a rendje 1), és a hangkészletek túlnyomó többsége ilyen.

Amennyiben azonban az index kisebb 12-nél (vagyis 1, 2, 3, 4, 6 egyike), az idézett mondat csak úgy marad érvényes, ha a más-más alaphangú (de persze azonos hangkészletű) moduszok között még akkor is különbséget teszünk, amikor azok izomorfak egymással. Természetesebb azonban – legalábbis matematikai szempontból – a moduszok megszámlálása úgy, hogy az egymással izomorfakat megegyezőeknek tekintjük.

3.3. Terjesszük most ki vizsgálódásainkat hangkészleteknek egy teljes egybevágósági osztályára. A 3.1.–3.5. megállapítások ismeretében könnyen belátható az alábbi összefoglaló eredmény:

3.6. MEGÁLLAPÍTÁS. Tekintsük hangkészleteknek egy

$$\{K_1, K_2, \dots, K_i\}$$

egybevágosági osztályát – ahol i egyenlő a tekintett hangkészletek indexével –, és jelöljük e hangkészletek (közös) méretét n -nel. Rendezzük el a hangkészletekből képezhető $i \cdot n$ számú moduszt egy mátrixban úgy, hogy a közös hangkészletű moduszok egy sorba, az egymással izomorf moduszok egy oszlopba kerülnek. Ekkor

- (a) A mátrix mindegyik helyére r modusz kerül.
- (b) A mátrix sorainak száma i , ennél fogva a mátrix mindegyik oszlopában $12 (= i \cdot r)$ modusz áll.
- (c) A mátrix oszlopainak száma n/r , tehát a mátrix mindegyik sorában n modusz áll.

Megjegyzések.

1. Mátrixon téglalap alakú táblázatot értünk.
2. Az (a) állítást (valamivel szabatosabban) így is fogalmazhatjuk: „A mátrix mindegyik helyén egy r moduszt tartalmazó halmaz áll”.
3. A mátrix helyeinek (a táblázat rekeszeinek) száma $12n/r^2 (= in/r = i^2 n/12)$.
4. Amint már említettük, a hangkészletek zömének 12 az indexe. Az ilyen hangkészletek esetében $r = 1$, és így a $12n$ modusznak nem kell r -esével „társbérletben szorongania” a 12 sorból, n oszlopból álló mátrix helyein.

A 3.6. megállapításban mondottakat példák tanulmányozása révén érthetjük meg igazán. Az egyik ilyen példával a 4.2. szakasz végén fogunk megismerkedni, a másikat szavakban vázoljuk a 4.6. szakaszban a $H_{66}^{(7)}$ hangkészletet tanulmányozva.

4. A hangkészletek egybevágosági osztályainak áttekintése

4.1. Az 1, 2 és 3 méretű hangkészletek.⁷ Ha $n = 1$, azaz a hangkészlet egyetlen hangból áll, akkor a lehetséges hangkészletek egyetlen egybevágosági osztályt képeznek. Válasszuk ki az osztályból a c hangot (mint egyetlen elemét) tartalmazó hangkészletet, jelöljük ezt $H_1^{(1)}$ -gyel. A hangkészletünk indexe 12 és rendje 1, tehát (egyezésben a 3.5. megállapítással) $H_1^{(1)}$ -ből egyetlen modusz nyerhető.

Térjünk most rá arra a lehetőségre, amikor a méret 2. E méret esetében 6 egybevágosági osztály létezik. Az osztályokat az 1. táblázatban felsorolt hat ($H_1^{(2)}$ -gyel, $H_2^{(2)}$ -vel, ..., $H_6^{(2)}$ -tal jelölt) hangkészlettel reprezentáljuk.

A $H_1^{(2)}, H_2^{(2)}, \dots, H_5^{(2)}$ hangkészletek bármelyikének indexe 12 és a rendje így 1. Ezek mindegyikéből tehát (az 5. megállapítás értelmében) 2 modusz képezhető, együttvéve 10 modusz áll elő.

⁷ A tárgyalás rendszeressége azt kívánna, hogy az áttekintést az üres – vagyis a 0 méretű – hangkészlettel kezdjük. Erről azonban sokat nem lehet mondani, és elegendő lesz akkor szót ejtenünk róla, amikor majd a 12 méretű hangkészlettel foglalkozunk.

Jelölés	Hangkészlet	Index	Jelölés	Hangkészlet	Index
$H_1^{(2)}$	$\{c, cisz\}$	12	$H_4^{(2)}$	$\{c, e\}$	12
$H_2^{(2)}$	$\{c, d\}$	12	$H_5^{(2)}$	$\{c, f\}$	12
$H_3^{(2)}$	$\{c, esz\}$	12	$H_6^{(2)}$	$\{c, fisz\}$	6

1. táblázat. A két hangot tartalmazó hangkészletek felsorolása egybevágóságtól eltekintve

Külön vizsgálatot érdemel a $H_6^{(2)}$ hangkészlet, azaz a tritonusz hangköz (amely éppen felezi az oktavot). Ennek az indexe 6, és így $r = 2$; a $H_6^{(2)}$ hangkészlet tehát egyetlen moduszt ad.⁸

Összefoglalva: az $n = 2$ esetben 11 ($= 10 + 1$) moduszt kapunk a tekintett hat hangkészletből. Ez a tizenegy modusz megfeleltethető a (tisztá) prímnél bővebb, de az oktávnál szűkebb hangközöknek.

Jelölés	Hangkészlet	Index	Jelölés	Hangkészlet	Index
$H_1^{(3)}$	$\{c, b, h\}$	12	$H_{11}^{(3)}$	$\{c, fisz, g\}$	12
$H_2^{(3)}$	$\{c, a, b\}$	12	$H_{12}^{(3)}$	$\{c, fisz, h\}$	12
$H_3^{(3)}$	$\{c, a, h\}$	12	$H_{13}^{(3)}$	$\{c, fisz, gisz\}$	12
$H_4^{(3)}$	$\{c, gisz, a\}$	12	$H_{14}^{(3)}$	$\{c, fisz, b\}$	12
$H_5^{(3)}$	$\{c, gisz, h\}$	12	$H_{15}^{(3)}$	$\{c, fisz, a\}$	12
$H_6^{(3)}$	$\{c, gisz, b\}$	12	$H_{16}^{(3)}$	$\{c, f, b\}$	12
$H_7^{(3)}$	$\{c, g, gisz\}$	12	$H_{17}^{(3)}$	$\{c, f, gisz\}$	12
$H_8^{(3)}$	$\{c, g, h\}$	12	$H_{18}^{(3)}$	$\{c, f, a\}$	12
$H_9^{(3)}$	$\{c, g, a\}$	12	$H_{19}^{(3)}$	$\{c, e, gisz\}$	4
$H_{10}^{(3)}$	$\{c, g, b\}$	12			

2. táblázat. A három hangot tartalmazó hangkészletek felsorolása egybevágóságtól eltekintve

Következzenek most a 3 méretű hangkészletek. Ezeknek a 19 egybevágósági osztályát a 2. táblázatban szereplő $H_1^{(3)}, H_2^{(3)}, \dots, H_{19}^{(3)}$ hangkészletek reprezentálják.⁹ (A jól ismert dúr, moll, szűkített és bővített hármashangzatot $H_{18}^{(3)}, H_{17}^{(3)}, H_{15}^{(3)}$, illetve $H_{19}^{(3)}$ jelöléssel találjuk meg közöttük.)

A $H_1^{(3)}, H_2^{(3)}, \dots, H_{18}^{(3)}$ hangkészletekből egyenként 3, összesen tehát 54 moduszt képezhető;¹⁰ hozzájárul még ehhez a $H_{19}^{(3)}$ -ből képezhető egyetlen modusz (3.5. meg-

⁸Valóban: a C , illetve $Fisz$ kitüntetésével kapott két modusz izomorf egymással.

⁹Azokat a hangkészleteket vesszük előbbre a táblázatban, amelyek egyenlőtlenül osztják fel az oktavot, és fokozatosan haladunk az egyenletesebb felosztások felé.

¹⁰Észrevehetjük, hogy pl. a $H_{18}^{(3)}$ hangkészlet három modusza megfelel a dúrakkord három megfordításának.

állapítás). Az $n = 3$ esetben tehát 55 azoknak a moduszoknak a száma, amelyek a tekintett 19 hangkészletből képezhetők.

4.2. A 4 méretű hangkészletek. A négy hangból álló hangkészletek egybevágósági osztályainak áttekintését nyújtó 3. táblázatra rápillantva egy várható és egy talán meglepő tényt vehetünk észre. Arra számíthatunk, hogy a méret növelésekor egyre több hangkészlet fog rendszerezésre várni; ez valóban mindaddig így is történik, amíg a méret a lehetséges maximum felét – azaz a hatot – meg nem haladja.

A 2 és 3 méretű hangkészletek vizsgálata során azt észlelhettük, hogy az index csupán az oktávot pontosan egyenlő részekre széttagoló hangkészletek ($H_6^{(2)}$ és $H_{19}^{(3)}$) esetében volt kisebb 12-nél. A 4 méretűek között viszont három hangkészletnek is 12 alatti szám az indexe; ezek: $H_{22}^{(4)}$, $H_{39}^{(4)}$ és $H_{43}^{(4)}$. (Közülük $H_{43}^{(4)}$ – a szűkített szeptimakkord – az, amely négy egyenlő részre osztja az oktávot.)

Az a 40 hangkészlet, amely különbözik a most említett háromtól, egyenként 4, összesen 160 moduszt ad. Hozzávéve ezekhez a $H_{22}^{(4)}$ -ből és $H_{39}^{(4)}$ -ből előállítható két-két, valamint a $H_{43}^{(4)}$ -ból nyerhető egyetlen moduszt, összesen 165-nek adódik az $n = 4$ esetre vonatkozóan felsorolt hangkészletekből (izomorfiától eltekintve) képezhető moduszok száma.

A zenében talán leggyakrabban előforduló négyeshangzatok a 3. táblázat utolsó helyein állnak.

Példa. A 4. táblázat a $H_{39}^{(4)}$ hangkészletet tartalmazó egybevágósági osztály elemeiből képezhető összes moduszt tünteti fel a 3.6. megállapítás szerinti mátrix-elrendezésben. Esetünkben $n = 4$, $i = 6$ és $r = 2$. A mátrix összesen $in = 24$ moduszt tartalmaz. A mátrixnak $i = 6$ sora és $n/r = 2$ oszlopa van. A mátrix mindegyik helyére $r = 2$ modusz kerül; az együvé helyezett moduszok mint hangkészletek is megegyeznek, emellett izomorfak is egymással.

4.3. Az 5 méretű hangkészletek. Az öt hangból álló hangkészletek áttekintése során (5. táblázat) az indexet nem szükséges feltüntetnünk, minthogy 5-nek és 12-nek nincs 1-nél nagyobb közös osztója, így ezen hangkészletek mindegyikére $r = 1$ és $i = 12$ érvényes (3.4. megállapítás). Ennek következtében a táblázatban szereplő 66 hangkészletből 330 modusz nyerhető.

A $H_{66}^{(5)}$ hangkészletben a pentaton hangsort ismerhetjük fel.

4.4. Kiegészítő (komplementer) hangkészletek. Mielőtt a 6 méretű hangkészletek népes családját vizsgálnánk, újabb elméleti megfontolásokat célszerű előrebocsátani.

Tekintsünk egy n méretű K_1 hangkészletet. Jelöljük K_2 -vel azt a hangkészletet, amely éppen a teljes M halmaznak (l. 2.1. szakasz) a K_1 -ben elő nem forduló hangjaiból áll. K_2 mérete nyilván $12 - n$. Ekkor azt mondjuk, hogy K_1 és K_2 *kiegészítő*

Jelölés	Hangkészlet	Index	Jelölés	Hangkészlet	Index
$H_1^{(4)}$	$\{c, a, b, h\}$	12	$H_{23}^{(4)}$	$\{c, f, a, h\}$	12
$H_2^{(4)}$	$\{c, gisz, b, h\}$	12	$H_{24}^{(4)}$	$\{c, f, a, b\}$	12
$H_3^{(4)}$	$\{c, gisz, a, h\}$	12	$H_{25}^{(4)}$	$\{c, f, g, h\}$	12
$H_4^{(4)}$	$\{c, gisz, a, b\}$	12	$H_{26}^{(4)}$	$\{c, f, g, gisz\}$	12
$H_5^{(4)}$	$\{c, g, b, h\}$	12	$H_{27}^{(4)}$	$\{c, f, fisz, gisz\}$	12
$H_6^{(4)}$	$\{c, g, gisz, h\}$	12	$H_{28}^{(4)}$	$\{c, f, fisz, b\}$	12
$H_7^{(4)}$	$\{c, g, gisz, a\}$	12	$H_{29}^{(4)}$	$\{c, f, gisz, h\}$	12
$H_8^{(4)}$	$\{c, g, a, h\}$	12	$H_{30}^{(4)}$	$\{c, f, gisz, a\}$	12
$H_9^{(4)}$	$\{c, g, a, b\}$	12	$H_{31}^{(4)}$	$\{c, f, fisz, a\}$	12
$H_{10}^{(4)}$	$\{c, g, gisz, b\}$	12	$H_{32}^{(4)}$	$\{c, f, gisz, b\}$	12
$H_{11}^{(4)}$	$\{c, fisz, b, h\}$	12	$H_{33}^{(4)}$	$\{c, f, g, b\}$	12
$H_{12}^{(4)}$	$\{c, fisz, g, h\}$	12	$H_{34}^{(4)}$	$\{c, f, g, a\}$	12
$H_{13}^{(4)}$	$\{c, fisz, g, gisz\}$	12	$H_{35}^{(4)}$	$\{c, e, gisz, h\}$	12
$H_{14}^{(4)}$	$\{c, fisz, a, h\}$	12	$H_{36}^{(4)}$	$\{c, e, g, h\}$	12
$H_{15}^{(4)}$	$\{c, fisz, a, b\}$	12	$H_{37}^{(4)}$	$\{c, e, gisz, a\}$	12
$H_{16}^{(4)}$	$\{c, fisz, gisz, h\}$	12	$H_{38}^{(4)}$	$\{c, e, gisz, b\}$	12
$H_{17}^{(4)}$	$\{c, fisz, gisz, a\}$	12	$H_{39}^{(4)}$	$\{c, e, fisz, b\}$	6
$H_{18}^{(4)}$	$\{c, fisz, g, b\}$	12	$H_{40}^{(4)}$	$\{c, e, g, b\}$	12
$H_{19}^{(4)}$	$\{c, fisz, g, a\}$	12	$H_{41}^{(4)}$	$\{c, e, fisz, a\}$	12
$H_{20}^{(4)}$	$\{c, fisz, gisz, b\}$	12	$H_{42}^{(4)}$	$\{c, e, g, a\}$	12
$H_{21}^{(4)}$	$\{c, f, b, h\}$	12	$H_{43}^{(4)}$	$\{c, esz, fisz, a\}$	3
$H_{22}^{(4)}$	$\{c, f, fisz, h\}$	6			

3. táblázat. A négy hangot tartalmazó hangkészletek felsorolása egybevágóságtól eltekintve

$$\left(\begin{array}{ll}
 \langle \{C, e, fisz, b\}, \{c, e, Fisz, b\} \rangle & \langle \{c, E, fisz, b\}, \{c, e, fisz, B\} \rangle \\
 \langle \{Cisz, f, g, h\}, \{cisz, f, G, h\} \rangle & \langle \{cisz, F, g, h\}, \{cisz, f, g, H\} \rangle \\
 \langle \{c, D, fisz, gisz\}, \{c, d, fisz, Gisz\} \rangle & \langle \{C, d, fisz, gisz\}, \{c, d, Fisz, gisz\} \rangle \\
 \langle \{cisz, Esz, g, a\}, \{cisz, esz, g, A\} \rangle & \langle \{Cisz, esz, g, a\}, \{cisz, esz, G, a\} \rangle \\
 \langle \{d, E, gisz, b\}, \{d, e, gisz, B\} \rangle & \langle \{D, e, gisz, b\}, \{d, e, Gisz, b\} \rangle \\
 \langle \{esz, F, a, h\}, \{esz, f, a, H\} \rangle & \langle \{Esz, f, a, h\}, \{esz, f, A, h\} \rangle
 \end{array} \right)$$

4. táblázat. A $H_{39}^{(4)}$ -ből és a vele egybevágó hangkészletekből képezhető moduszok rendszeres áttekintése (a moduszok alaphangját nagy kezdőbetű jelzi)

hangkészletei vagy komplementer hangkészletei (rövidebben komplementumai) egymásnak.

4.1. MEGÁLLAPÍTÁS. Tekintsünk két K_1, K_2 hangkészletet. Jelöljük K_1 kiegészítő hangkészletét K_3 -mal és K_2 kiegészítő hangkészletét K_4 -gyel. K_1 és K_2 pontosan akkor egybevágóak, ha K_3 és K_4 is egybevágóak.

4.2. MEGÁLLAPÍTÁS. Ha a K_1 és K_2 hangkészletek egymás komplementumai, akkor K_1 indexe egyenlő K_2 indexével.

Ha $n \neq 12 - n$, akkor az n indexű K_1 hangkészlet eleve nem lehet egybevágó a komplementumával. Amennyiben viszont $n = 12 - n$ (vagyis ha $n = 6$), úgy nem zárható ki, hogy az egymással komplementer hangkészletek ugyanabba az egybevágósági osztályba tartozzanak. A 6 méretű hangkészletek most következő áttekintése során a kiegészítő párat alkotó hangkészletek egybevágóságát is figyelemmel fogjuk kísérni.

4.5. A 6 méretű hangkészletek. A 6. táblázatban felsorolt 80 hangkészlet közül zeneileg $H_{80}^{(6)}$ -nak – az egészhangú skálának – van jelentősége. $H_{80}^{(6)}$ -ból egyetlen modusz képezhető (izomorfiától eltekintve), $H_{58}^{(6)}$ -ból kettő, a $H_{24}^{(6)}, H_{71}^{(6)}, H_{74}^{(6)}$ hangkészletek mindegyikéből három-három, a táblázatban foglalt további 75 hangkészletből egyenként hat modusz. A 80 hangkészletből tehát összesen 462 (lényegesen különböző) modusz nyerhető.

Tudjuk, hogy egy 6 méretű hangkészlet kiegészítő hangkészletének mérete szintén 6. A 80 hangkészletet végigvizsgálva azt kapjuk, hogy közöttük nyolc olyan található, hogy ezek komplementuma egybevágó az eredeti hangkészlettel, éspe-dig $H_1^{(6)}, H_{15}^{(6)}, H_{24}^{(6)}, H_{27}^{(6)}, H_{38}^{(6)}, H_{58}^{(6)}, H_{77}^{(6)}, H_{80}^{(6)}$ ilyenek. Ebből következik, hogy például a $H_{15}^{(6)}$ -öt tartalmazó, 12 elemű egybevágósági osztályon belül kettesével vannak komplementer hangkészletek¹¹ (4.1. megállapítás).

A fennmaradó 72 hangkészlet az alábbi módon állítható párokba a komplementum-képzés vonatkozásában:¹² $H_2^{(6)}$ és $H_6^{(6)}$; $H_3^{(6)}$ és $H_{11}^{(6)}$; $H_4^{(6)}$ és $H_{22}^{(6)}$; $H_5^{(6)}$ és $H_7^{(6)}$; $H_8^{(6)}$ és $H_{10}^{(6)}$; $H_9^{(6)}$ és $H_{23}^{(6)}$; $H_{12}^{(6)}$ és $H_{21}^{(6)}$; $H_{13}^{(6)}$ és $H_{44}^{(6)}$; $H_{14}^{(6)}$ és $H_{28}^{(6)}$; $H_{16}^{(6)}$ és $H_{43}^{(6)}$; $H_{17}^{(6)}$ és $H_{55}^{(6)}$; $H_{18}^{(6)}$ és $H_{32}^{(6)}$; $H_{19}^{(6)}$ és $H_{29}^{(6)}$; $H_{20}^{(6)}$ és $H_{25}^{(6)}$; $H_{26}^{(6)}$ és $H_{42}^{(6)}$; $H_{30}^{(6)}$ és $H_{41}^{(6)}$; $H_{31}^{(6)}$ és $H_{35}^{(6)}$; $H_{33}^{(6)}$ és $H_{40}^{(6)}$; $H_{34}^{(6)}$ és $H_{57}^{(6)}$; $H_{36}^{(6)}$ és $H_{39}^{(6)}$; $H_{37}^{(6)}$ és $H_{56}^{(6)}$; $H_{45}^{(6)}$ és $H_{54}^{(6)}$; $H_{46}^{(6)}$ és $H_{64}^{(6)}$; $H_{47}^{(6)}$ és $H_{67}^{(6)}$; $H_{48}^{(6)}$ és $H_{72}^{(6)}$; $H_{49}^{(6)}$ és $H_{52}^{(6)}$; $H_{50}^{(6)}$ és $H_{61}^{(6)}$;

¹¹ Így $H_{15}^{(6)}$ komplementuma $\{cisz, d, esz, e, fisz, h\}$, ez $H_{15}^{(6)}$ -ból előáll a t^6 transzpozíció révén, tehát valóban ugyanabban az egybevágósági osztályban van, mint $H_{15}^{(6)}$.

¹² E párbaállítás úgy értendő, hogy például $H_2^{(6)}$ komplementuma, azaz a $\{cisz, d, esz, e, f, g\}$ hangkészlet egybevágó a $H_6^{(6)}$ hangkészlettel (a t^7 transzpozícióval kapható meg $H_6^{(6)}$ -ból), és – ezen túlmenően – egyfelől a $H_2^{(6)}$, másfelől a $H_6^{(6)}$ hangkészletek egybevágósági osztályaiban levő tizenkét-tizenkét hangkészlet is párba állítható úgy, hogy egymást kiegészítő hangkészletek tartoznak össze.

Jelölés	Hangkészlet	Jelölés	Hangkészlet
$H_1^{(5)}$	$\{c, gisz, a, b, h\}$	$H_{34}^{(5)}$	$\{c, f, g, gisz, b\}$
$H_2^{(5)}$	$\{c, g, a, b, h\}$	$H_{35}^{(5)}$	$\{c, f, fisz, gisz, b\}$
$H_3^{(5)}$	$\{c, g, gisz, b, h\}$	$H_{36}^{(5)}$	$\{c, e, gisz, b, h\}$
$H_4^{(5)}$	$\{c, g, gisz, a, h\}$	$H_{37}^{(5)}$	$\{c, e, gisz, a, h\}$
$H_5^{(5)}$	$\{c, g, gisz, a, b\}$	$H_{38}^{(5)}$	$\{c, e, gisz, a, b\}$
$H_6^{(5)}$	$\{c, fisz, a, b, h\}$	$H_{39}^{(5)}$	$\{c, e, fisz, b, h\}$
$H_7^{(5)}$	$\{c, fisz, g, b, h\}$	$H_{40}^{(5)}$	$\{c, e, f, a, h\}$
$H_8^{(5)}$	$\{c, fisz, g, gisz, h\}$	$H_{41}^{(5)}$	$\{c, e, f, a, b\}$
$H_9^{(5)}$	$\{c, fisz, g, gisz, a\}$	$H_{42}^{(5)}$	$\{c, e, g, b, h\}$
$H_{10}^{(5)}$	$\{c, fisz, gisz, b, h\}$	$H_{43}^{(5)}$	$\{c, e, g, gisz, h\}$
$H_{11}^{(5)}$	$\{c, fisz, gisz, a, h\}$	$H_{44}^{(5)}$	$\{c, e, g, gisz, a\}$
$H_{12}^{(5)}$	$\{c, fisz, gisz, a, b\}$	$H_{45}^{(5)}$	$\{c, e, f, gisz, h\}$
$H_{13}^{(5)}$	$\{c, fisz, g, a, h\}$	$H_{46}^{(5)}$	$\{c, e, f, gisz, a\}$
$H_{14}^{(5)}$	$\{c, fisz, g, a, b\}$	$H_{47}^{(5)}$	$\{c, e, f, fisz, a\}$
$H_{15}^{(5)}$	$\{c, fisz, g, gisz, b\}$	$H_{48}^{(5)}$	$\{c, e, g, a, h\}$
$H_{16}^{(5)}$	$\{c, f, a, b, h\}$	$H_{49}^{(5)}$	$\{c, e, g, gisz, b\}$
$H_{17}^{(5)}$	$\{c, f, fisz, b, h\}$	$H_{50}^{(5)}$	$\{c, e, g, a, b\}$
$H_{18}^{(5)}$	$\{c, f, fisz, g, h\}$	$H_{51}^{(5)}$	$\{c, e, fisz, a, b\}$
$H_{19}^{(5)}$	$\{c, f, fisz, g, gisz\}$	$H_{52}^{(5)}$	$\{c, e, fisz, a, h\}$
$H_{20}^{(5)}$	$\{c, f, gisz, b, h\}$	$H_{53}^{(5)}$	$\{c, e, fisz, gisz, h\}$
$H_{21}^{(5)}$	$\{c, f, gisz, a, h\}$	$H_{54}^{(5)}$	$\{c, e, fisz, g, b\}$
$H_{22}^{(5)}$	$\{c, f, gisz, a, b\}$	$H_{55}^{(5)}$	$\{c, e, fisz, gisz, a\}$
$H_{23}^{(5)}$	$\{c, f, g, b, h\}$	$H_{56}^{(5)}$	$\{c, e, fisz, g, a\}$
$H_{24}^{(5)}$	$\{c, f, g, gisz, h\}$	$H_{57}^{(5)}$	$\{c, e, f, gisz, b\}$
$H_{25}^{(5)}$	$\{c, f, g, gisz, a\}$	$H_{58}^{(5)}$	$\{c, e, f, g, b\}$
$H_{26}^{(5)}$	$\{c, f, fisz, a, h\}$	$H_{59}^{(5)}$	$\{c, e, f, g, a\}$
$H_{27}^{(5)}$	$\{c, f, fisz, gisz, h\}$	$H_{60}^{(5)}$	$\{c, e, fisz, gisz, b\}$
$H_{28}^{(5)}$	$\{c, f, fisz, a, b\}$	$H_{61}^{(5)}$	$\{c, esz, fisz, a, h\}$
$H_{29}^{(5)}$	$\{c, f, fisz, gisz, a\}$	$H_{62}^{(5)}$	$\{c, esz, fisz, gisz, h\}$
$H_{30}^{(5)}$	$\{c, f, fisz, g, b\}$	$H_{63}^{(5)}$	$\{c, esz, fisz, a, b\}$
$H_{31}^{(5)}$	$\{c, f, fisz, g, a\}$	$H_{64}^{(5)}$	$\{c, esz, fisz, g, b\}$
$H_{32}^{(5)}$	$\{c, f, g, a, h\}$	$H_{65}^{(5)}$	$\{c, esz, fisz, gisz, b\}$
$H_{33}^{(5)}$	$\{c, f, g, a, b\}$	$H_{66}^{(5)}$	$\{c, esz, f, gisz, b\}$

5. táblázat. Az öt hangot tartalmazó hangkészletek felsorolása egybeváágóságtól eltekintve

Jelölés	Hangkészlet	Index	Jelölés	Hangkészlet	Index
$H_1^{(6)}$	{c, g, gisz, a, b, h}	12	$H_{41}^{(6)}$	{c, e, f, fisz, gisz, h}	12
$H_2^{(6)}$	{c, fisz, gisz, a, b, h}	12	$H_{42}^{(6)}$	{c, e, f, fisz, gisz, a}	12
$H_3^{(6)}$	{c, fisz, g, a, b, h}	12	$H_{43}^{(6)}$	{c, e, f, fisz, g, b}	12
$H_4^{(6)}$	{c, fisz, g, gisz, b, h}	12	$H_{44}^{(6)}$	{c, e, f, fisz, g, a}	12
$H_5^{(6)}$	{c, fisz, g, gisz, a, h}	12	$H_{45}^{(6)}$	{c, e, fisz, gisz, b, h}	12
$H_6^{(6)}$	{c, fisz, g, gisz, a, b}	12	$H_{46}^{(6)}$	{c, e, fisz, gisz, a, h}	12
$H_7^{(6)}$	{c, f, gisz, a, b, h}	12	$H_{47}^{(6)}$	{c, e, fisz, g, a, h}	12
$H_8^{(6)}$	{c, f, fisz, a, b, h}	12	$H_{48}^{(6)}$	{c, e, f, g, a, h}	12
$H_9^{(6)}$	{c, f, fisz, g, b, h}	12	$H_{49}^{(6)}$	{c, e, fisz, gisz, a, b}	12
$H_{10}^{(6)}$	{c, f, fisz, g, gisz, h}	12	$H_{50}^{(6)}$	{c, e, fisz, g, a, b}	12
$H_{11}^{(6)}$	{c, f, fisz, g, gisz, a}	12	$H_{51}^{(6)}$	{c, e, f, g, a, b}	12
$H_{12}^{(6)}$	{c, f, g, a, b, h}	12	$H_{52}^{(6)}$	{c, e, fisz, g, gisz, b}	12
$H_{13}^{(6)}$	{c, f, g, gisz, b, h}	12	$H_{53}^{(6)}$	{c, e, f, g, gisz, b}	12
$H_{14}^{(6)}$	{c, f, g, gisz, a, h}	12	$H_{54}^{(6)}$	{c, e, f, fisz, gisz, b}	12
$H_{15}^{(6)}$	{c, f, g, gisz, a, b}	12	$H_{55}^{(6)}$	{c, esz, fisz, a, b, h}	12
$H_{16}^{(6)}$	{c, f, fisz, gisz, b, h}	12	$H_{56}^{(6)}$	{c, esz, fisz, g, b, h}	12
$H_{17}^{(6)}$	{c, f, fisz, gisz, a, h}	12	$H_{57}^{(6)}$	{c, esz, fisz, g, gisz, h}	12
$H_{18}^{(6)}$	{c, f, fisz, gisz, a, b}	12	$H_{58}^{(6)}$	{c, esz, e, g, gisz, h}	4
$H_{19}^{(6)}$	{c, f, fisz, g, a, h}	12	$H_{59}^{(6)}$	{c, esz, fisz, gisz, b, h}	12
$H_{20}^{(6)}$	{c, f, fisz, g, a, b}	12	$H_{60}^{(6)}$	{c, esz, fisz, gisz, a, h}	12
$H_{21}^{(6)}$	{c, f, fisz, g, gisz, b}	12	$H_{61}^{(6)}$	{c, esz, fisz, gisz, a, b}	12
$H_{22}^{(6)}$	{c, e, gisz, a, b, h}	12	$H_{62}^{(6)}$	{c, esz, fisz, g, a, h}	12
$H_{23}^{(6)}$	{c, e, f, a, b, h}	12	$H_{63}^{(6)}$	{c, esz, fisz, g, a, b}	12
$H_{24}^{(6)}$	{c, e, f, fisz, b, h}	6	$H_{64}^{(6)}$	{c, esz, fisz, g, gisz, b}	12
$H_{25}^{(6)}$	{c, e, g, a, b, h}	12	$H_{65}^{(6)}$	{c, esz, f, gisz, b, h}	12
$H_{26}^{(6)}$	{c, e, g, gisz, b, h}	12	$H_{66}^{(6)}$	{c, esz, f, gisz, a, h}	12
$H_{27}^{(6)}$	{c, e, g, gisz, a, h}	12	$H_{67}^{(6)}$	{c, esz, f, gisz, a, b}	12
$H_{28}^{(6)}$	{c, e, g, gisz, a, b}	12	$H_{68}^{(6)}$	{c, esz, e, g, a, h}	12
$H_{29}^{(6)}$	{c, e, fisz, a, b, h}	12	$H_{69}^{(6)}$	{c, esz, e, g, a, b}	12
$H_{30}^{(6)}$	{c, e, fisz, g, b, h}	12	$H_{70}^{(6)}$	{c, esz, e, g, gisz, b}	12
$H_{31}^{(6)}$	{c, e, fisz, g, gisz, h}	12	$H_{71}^{(6)}$	{c, esz, f, fisz, a, h}	6
$H_{32}^{(6)}$	{c, e, fisz, g, gisz, a}	12	$H_{72}^{(6)}$	{c, esz, f, g, b, h}	12
$H_{33}^{(6)}$	{c, e, f, gisz, b, h}	12	$H_{73}^{(6)}$	{c, esz, f, fisz, a, b}	12
$H_{34}^{(6)}$	{c, e, f, gisz, a, h}	12	$H_{74}^{(6)}$	{c, esz, e, fisz, a, b}	6
$H_{35}^{(6)}$	{c, e, f, gisz, a, b}	12	$H_{75}^{(6)}$	{c, esz, f, g, a, h}	12
$H_{36}^{(6)}$	{c, e, f, g, b, h}	12	$H_{76}^{(6)}$	{c, esz, f, g, a, b}	12
$H_{37}^{(6)}$	{c, e, f, g, gisz, h}	12	$H_{77}^{(6)}$	{c, esz, f, g, gisz, b}	12
$H_{38}^{(6)}$	{c, e, f, g, gisz, a}	12	$H_{78}^{(6)}$	{c, esz, f, fisz, gisz, b}	12
$H_{39}^{(6)}$	{c, e, f, fisz, a, h}	12	$H_{79}^{(6)}$	{c, esz, e, fisz, gisz, b}	12
$H_{40}^{(6)}$	{c, e, f, fisz, a, b}	12	$H_{80}^{(6)}$	{c, d, e, fisz, gisz, b}	2

6. táblázat. A hat hangot tartalmazó hangkészletek felsorolása egybevágóságtól eltekintve

$H_{51}^{(6)}$ és $H_{65}^{(6)}$; $H_{53}^{(6)}$ és $H_{59}^{(6)}$; $H_{60}^{(6)}$ és $H_{63}^{(6)}$; $H_{62}^{(6)}$ és $H_{66}^{(6)}$; $H_{68}^{(6)}$ és $H_{70}^{(6)}$; $H_{69}^{(6)}$ és $H_{78}^{(6)}$; $H_{71}^{(6)}$ és $H_{74}^{(6)}$; $H_{73}^{(6)}$ és $H_{76}^{(6)}$; $H_{75}^{(6)}$ és $H_{79}^{(6)}$.

4.6. A 7, 8, 9, 10 méretű hangkészletek. A hangkészletek eddigi áttekintését nehézkessé tették az egyre terjedelmesebb táblázatok. Az itt következőkben eltekintek a részletes felsorolástól, az olvasó az egyre nagyobb méretű hangkészletek (egybevágóságtól eltekintve értett) teljes listáját a C. függelék táblázataiban találhatja meg. Ezt a nagyvonalúságot az teszi lehetővé, hogy a 7, 8, 9, 10 méretű hangkészletek gépiesen megkaphatóak mint az 5, 4, 3, illetve 2 méretűek komplementumai (4.1. megállapítás).

A 7 méretű hangkészletek között ott van a zeneileg kiemelkedő jelentőségű $H_{66}^{(7)}$ diatonikus hangsor, ezt $H_{66}^{(5)}$ komplementumából, a $\{cisz, d, e, fisz, g, a, h\}$ hangkészletből a t^{10} transzpozíció szolgáltatja. Készítsük el (gondolatban) a 3.6. megállapításban szereplő mátrixot $H_{66}^{(7)}$ -ra vonatkozóan. Ekkor (mivel $i = 12$, $r = 1$, $n = n/r = 7$), a 84 modulusz úgy tölti ki a mátrix 12 sorát és 7 oszlopát, hogy az egyik oszlop a (jól ismert) 12 dúr hangsor, egy másik oszlop a 12 dór hangsor tartalmazza, – a továbbiak ugyanígy a fríg, líd, mixolíd, eol, lokriszi hangsorokat –, a mátrix sorait pedig az jelöli ki, hogy közös sorba a hangkészlet gyanánt megegyező moduluszok kerülnek.¹³

A $H_{62}^{(7)}$ hangkészlet a harmonikus moll, a $H_{65}^{(7)}$ hangkészlet az emelkedő irányú melodikus moll hangsor adja, ha az e , illetve a hang kitüntetésével képezünk moduluszt belőlük (7. táblázat).

$H_{62}^{(7)}$	$\{c, esz, e, fisz, g, a, h\}$
$H_{65}^{(7)}$	$\{c, d, e, fisz, gisz, a, h\}$
$H_{66}^{(7)}$	$\{c, d, e, f, g, a, h\}$

7. táblázat

Abból a 66 hangkészletből, amelyek a 10. táblázatban vannak felsorolva, 462 modulusz nyerhető.

Lépünk most tovább a 8 méretű hangkészletekre. Ezeknek az egybevágósági osztályait a 11. táblázatban szereplő 43 hangkészlet képviseli. $H_{43}^{(8)}$ -ból két, $H_{22}^{(8)}$ -ból és $H_{39}^{(8)}$ -ból négy-négy modulusz képezhető (izomorfától eltekintve), a többi 40 hangkészlet együttevén 320 moduluszt ad; összesen tehát 330 moduluszt kapunk.

A 12. táblázatban felsorolt 19 hangkészlet a 9 méretűek egybevágósági osztályait reprezentálja. Az itt szereplő hangkészletekből – mint mindig, izomorfia erejéig értve – 165 moduluszt nyerhetünk ($H_{19}^{(9)}$ -ból hármat, a többiek mindegyikéből kilencet).

¹³Például: az E -dúr hangsor tartalmazó sorba jutnak még a $fisz$ -dór, $gisz$ -fríg, A -líd, H -mixolíd, $cisz$ -eol, esz -lokriszi hangsorok.

A 10 méretű hangkészletekből 6 van (13. táblázat), a moduszok száma 55 ($= 5 \cdot 10 + 5$).

4.7. A 11, 12, 0 méretű hangkészletek. 11 méretű hangkészletet úgy kapunk, hogy a teljes M hangkészletből (a kromatikus skálából) egy hangot kihagyunk. Az így előálló hangkészletek mind egybevágóak egymással, a meghatározottság kedvéért a

$$H_1^{(11)} = \{c, cisz, d, esz, e, f, fisz, g, gisz, a, b\}$$

hangkészletet választhatjuk ki közülük. $H_1^{(11)}$ indexe 12, rendje 1, belőle 11 modusz állítható elő.

12 méretű hangkészlet egy van: M , azaz a tizenkét kromatikus hang együttese. Indexe 1, rendje 12; egymagában alkot egybevágósági osztályt és egyetlen modusz képezhető belőle.

Az M teljes hangkészlet komplementuma az üres hangkészlet. Akárcsak M esetében, erre is $i = 1$ és $r = 12$. Mivel egy hangot sem tartalmaz, nincs olyan modusz, amely belőle nyerhető lenne. (Formálisan: $n = 0$ folytán $n/r = 0/12 = 0$.)

5. A hangkészletek és moduszok statisztikája

(I)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Együtt
(II)	1	1	6	19	43	66	80	66	43	19	6	1	1	352
(III)	1	12	66	220	495	792	924	792	495	220	66	12	1	4096
(IV)	0	1	11	55	165	330	462	462	330	165	55	11	1	2048
(V)	0	12	132	660	1980	3960	5544	5544	3960	1980	660	132	12	24576

8. táblázat. A hangkészletek és moduszok száma méret szerint és összesítve

A 8. táblázat belső oszlopai a hangkészletek és moduszok számát tüntetik fel a méret függvényében. Az (I) sorban a méreteket adjuk meg; a (II) sorban az található, hogy a 4. részben folytatott vizsgálódásaink során hány hangkészletet találtunk, vagyis hogy mennyi a hangkészletek egybevágósági osztályainak száma; a (III) sorban pedig az egybevágóak között is különbséget téve számláltuk meg a hangkészleteket. (Például: a 4 méretre vonatkozóan a (III) sorban a 495 szám áll; ez úgy adódott, hogy összeadtuk a 3. táblázatban szereplő indexeket.)

A (IV) sor a moduszok izomorfia-osztályainak számát adja (szintén a 4. részre támaszkodva). Végül az (V) sorban úgy számláltuk meg a moduszokat, hogy az egymással izomorfak között is különbséget tettünk. Így az (V) sorban levő számok mindegyike 12-szerese a felette álló (IV) sorbeli számnak (a 2.3. szakaszban mondottak értelmében).

A kombinatorikában jártas olvasó rögtön észreveheti, hogy a (III) sorban – amint természetes is – a $\binom{12}{0}, \binom{12}{1}, \binom{12}{2}, \binom{12}{3}, \dots, \binom{12}{12}$ binomiális együtthatók, a (IV) sorban pedig – az 1 mérettől kezdve – a $\binom{11}{0}, \binom{11}{1}, \binom{11}{2}, \binom{11}{3}, \dots, \binom{11}{11}$ binomiális együtthatók állnak. Azzal is egyezésben van a táblázat záró oszlopa, hogy a hangkészletek együttes száma $2^{12} (= 4096)$ és a moduszok izomorfia-osztályaié¹⁴ $2^{11} (= 2048)$.

A 8. táblázat (II)–(V) soraiban mutatkozó szimmetriát közvetlenül is igen könnyen beláthatjuk. Egyrészt az összes n méretű hangkészletből kiindulva és a kiegészítő hangkészletekre áttérve pontosan megkaphatjuk a $12 - n$ méretű hangkészleteket. Másfelől pedig gondoljuk meg, hogy az n méretű moduszok izomorfia-osztályait reprezentálhatjuk úgy, hogy kiszemeljük az összes olyan moduszt, amelynek alaphangja egy rögzített hang (például mindegyiké a c); majd lépünk úgy tovább, hogy megtartjuk az alaphangot és a többi $n - 1$ hang helyébe a hiányzó $12 - n$ hangot vesszük; – ezzel az eljárással éppen a $13 - n (= 1 + (12 - n))$ méretű moduszokat kapjuk a korábban rögzített alaphanggal.

Mint érdekességet említem meg, hogy a fenti 8. táblázat (II) sorának számai előfordulnak Lábos Elemér és Nógrádi Erika [3] közleményének 179. oldalán; anélkül, hogy a szerzők utalnának e mennyiségek zenei vonatkozására.

(*Utólagos kiegészítés*) A jelen munka anonim lektora tájékoztatott arról, hogy D. L. Reiner a [4] közleményben a kombinatorika és a csoportelmélet ismert eredményeire erősen támaszkodó tömör tárgyalását adja a hangkészletek megszámlálásának¹⁵, továbbá hogy a legutóbbi időben G. Mazzola foglalkozik a tárgykörrel.¹⁶

FÜGGELÉKEK

A. Temperált hangolás, illetve racionális frekvencia-arányok

A.1. Az oktáv egyenlő hangközökre osztása

Az eddigi megfontolásaink mindig azon a szemléleten nyugodtak, hogy az oktavot egyenlő hangközökre osztottuk; alapvetően tizenkettőre, de – a $H_6^{(2)}$, $H_{19}^{(3)}$, $H_{43}^{(4)}$, $H_{80}^{(6)}$ hangkészletekkel találkozáskor – érintettük a 2, 3, 4, 6 egyenlő hangközre való felosztást is.

¹⁴A 2^{11} érték – amely talán nem annyira kézenfekvő, mint az előzőek – onnan adódik, hogy a modusz alaphangját mindig ugyanannak (pl. c -nek) véve a további 11 hangból szabadon választ-hatjuk ki a modusz többi hangjait.

¹⁵Reiner szemléletmódja több vonatkozásban más, mint a jelen cikké, éspedig: (1) az oktáv akárhány (nem feltétlenül 12) egyenlő részre osztását figyelembe veszi; (2) az egymásból tükröfordítással előálló hangkészleteket (pl. a dúrakkordot és a mollakkordot) többnyire egy osztályba sorolja; (3) vizsgálja a dodekafónia értelmében vett sorok megszámlálásának témáját is (úgy, hogy – a transzpozíció mellett – a tükröfordítás és a rákfordítás lehetőségeit is tekintetbe veszi); (4) moduszokkal nem foglalkozik.

¹⁶A *Mathematical Reviews* 2003g:00015. számú referátuma Mazzola két cikkét ismerteti, utal továbbá az ezeket követően megjelent könyvére.

Két hangközöt akkor érzünk egyenlőnek, ha a frekvenciák *hányadosa* ugyanaz. Ennélfogva például az F és $2F$ frekvenciájú hangok oktávjának harmadolása azon F_1, F_2 frekvenciák meghatározását jelenti, amelyekre

$$(A.1) \quad \frac{F_1}{F} = \frac{F_2}{F_1} = \frac{2F}{F_2}$$

érvényes; az (A.1) egyenletek megoldásával az

$$F_1 = F \cdot \sqrt[3]{2}, \quad F_2 = F \cdot \sqrt[3]{4}$$

frekvenciákat kapjuk.

A.2. Racionális rezgésszám-arányok az oktávon belül

Amint a legutóbbi példa is mutatja, az egyenlő hangközökre való tagolás irracionális frekvencia-arányokhoz vezet. Elfogadhatjuk ehelyett azt az elvet, hogy az oktávnak közbeeső hangokkal való kitöltése során racionális frekvencia-arányokat részesítsünk előnyben, azaz – kissé konkrétabban kifejezve – hogy olyan r/s arányokat keressünk, amelyekre $1 < r/s < 2$ igaz, és r, s lehetőleg kis egész számok.

A most megfogalmazott alapelv kétféle módon érvényesíthető. Az egyik mód az, hogy az oktávot a frekvenciák egyenlő *különbségét* megkövetelve tagoljuk kis számú részre; ekkor pl. az oktáv harmadolása ((A.1) helyett) a

$$(A.2) \quad G_1 - F = G_2 - G_1 = 2F - G_2$$

egyenletek megoldását jelenti. Ezzel a

$$G_1 = \frac{4}{3}F, \quad G_2 = \frac{5}{3}F$$

frekvenciákhoz jutunk. (A felosztás hangközei ekkor a mélyebb hangok között nagyobbak, a magasabbak felé haladva egyre kisebbek lesznek.)

A másik mód racionális arányok keresésére az, hogy az F frekvenciájú hanggal az élő zenében (halkabban) együtt hangzó

$$2F, 3F, 4F, 5F, 6F, 7F, \dots$$

felhangsort tekintjük, és az első néhány felhangot oktávval (vagy annak alkalmas többszörösével) leszállítva beiktatjuk az F és $2F$ közötti intervallumba. Elég a páratlan szorzójú felhangokkal foglalkoznunk.

Konszonánsnak azokat a hangközöket érezzük, amelyeket $3/2, 4/3, 5/3, 5/4, 6/5, 8/5$ frekvencia-aránynak fogunk fel, hozzávehetjük ezekhez a nem túl éles diszszonanciának számító $9/8$ és $9/5$ arányokat (nagy szekund, kis szeptim). A most felsorolt arányok közül a 3 és 5 nevezőjűek a különbség-elvű egyenlő felosztás útján származtathatóak, a többi így is és a felhangsorra támaszkodva is egyaránt nyerhető. A felhangok sora azt sugallja, hogy a $7/4$ és $11/8$ arányokra is legyünk tekintettel a továbbiakban.

A.3. Egy közbevetett megjegyzés

Nehezen megválaszolható kérdésekhez jutunk, ha a hangok rendszerét szigorú következetességgel a racionális arányokra kívánjuk alapozni. Például: miképpen volna egyenlő az emelkedő 12 tiszta kvintlépés a megfelelő számú oktavlépéssel, amikor a $3/2$, $(3/2)^2$, $(3/2)^3$, ... sorozat számlálóiban mindig páratlan számok állnak (tehát soha nem nyílik lehetőség a tört egyszerűsítésére)? Vagy: miért $10/9$ az e és d hangok frekvencia-aránya C -dúrban ($mi-re$), és miért $9/8$, ha D -dúrban vagyunk ($re-dó$)?

A.4. A cent mint a hangközök mérésére szolgáló egység

Arra, hogy a racionális elvű hangközöket összemérjük az egyenlő frekvencia-arányok szerinti (azaz a temperált) hangközökkel, az akusztikusok azt a módszert használják, hogy centekben fejezik ki a hangközöket. A G és F frekvenciájú hangok centekben mért távolságát az

$$1200 \cdot (\log_2 G - \log_2 F)$$

formulával értelmezzük, ebben 2 alapú logaritmusok szerepelnek. A közhasználatú 10 alapú logaritmusokkal való számolás céljára ez a formula (öt jegynyi pontossággal közelítve) a

$$(A.3) \quad 3986,3 \cdot (\log_{10} G - \log_{10} F)$$

alakban írható. A centet az oktav 1200 (avagy a temperált kis szekund 100) egyenlő hangközre osztásának eredményeként vezettük be; a temperált nagy szekund, kis terc, nagy terc, ... hangközök így rendre 200, 300, 400, ... centtel egyenlőek.

A.5. Összehasonlítás

Alkalmazzuk most az (A.3) formulát arra, hogy centekben fejezzük ki a korábban említett racionális arányokat (és még néhány arányt). A számítások eredményét a 9. táblázat tartalmazza.

A nagy szeptimnek megfelelő $15/8$ arány abból kapható meg, hogy a tiszta kvint és a nagy terc együtt nagy szeptimet ad. A kis szekund a nagy szeptimet oktavvá kiegészítő hangközként származtatható. A tritonusz (szűkített kvint, bővített kvart) két arányát a tiszta kvart – illetve annak felső oktavja – és a nagy szeptim egybevetésével nyerhetjük.

A táblázat zárójelek között azokat az arányokat is tartalmazza, amelyek a nagy szext és a nagy terc számára a kvintet jellemző $3/2$ arány továbbépítésével adódnak, valamint a kis tercre az előbbiből származtatott arányt.

Szokás a 7. (a hét szorzójú) felhangot mint a kis szeptim jó közelítését tekinteni. A $7/4$ aránynak megfelelő cent-érték azt mutatja, hogy ez csak meglehetősen durva közelítés. A 11. felhang pedig (alsó harmadik oktavja 550 cent körül lévén) egyáltalán nem illik bele a hangrendszerünkbe.

A további esetekben elfogadható vagy – mint a tiszta kvint esetében – meglepően jó közelítéssel megkaptuk a temperált hangközöket.

16/15	111,73 cent	kis szekund	45/32	590,22 cent	} tritonusz
10/9	182,40 cent	} nagy szekund	64/45	609,78 cent	
9/8	203,91 cent		3/2	701,96 cent	tiszta kvint
(32/27)	294,13 cent	} kis terc	8/5	813,69 cent	kis szext
6/5	315,64 cent		5/3	884,36 cent	} nagy szext
5/4	386,31 cent	} nagy terc	(27/16)	905,87 cent	
(81/64)	407,82 cent		7/4	968,83 cent	
4/3	498,04 cent	tiszta kvart	16/9	996,09 cent	} kis szeptim
11/8	551,32 cent		9/5	1017,60 cent	
			15/8	1088,27 cent	nagy szeptim

9. táblázat. Néhány racionális arány és a megfelelő cent-értékek

Talán nem túlzás azt mondani, hogy a zenét a 12-es szám két kedvező tulajdonsága teszi lehetővé:

- a $2^{7/12}$ hatvány gyakorlatilag megegyezik a $3/2$ törttel (egyikük 700, másikuk kb. 701,96 cent hangközt határoz meg),
- 12 olyan szám, amelynek sok osztója van.

A.6. Egy újabb közbevetés

Nincs ugyan komoly jelentősége, hadd említsek meg néhány érdekességet. A tritonuszt jól megközelíti a $24/17$ és kiválóan az $577/408$ arány (cent-értékük 597,00 illetve 600,003), a kis szekundot pedig igen jól a $196/185$ arány (99,9941 cent).

A $7/5$ és $7/6$ törtek alacsony számok hányadosai, és értékük 1, 2 közé esik. Mint hangközöket azonban nincs ok tekintetbe venni őket. Az első (582,51 cent) a tritonusz gyenge közelítése lehetne, az utóbbi (266,87 cent) kívül áll a hangrendszerünkön.

A.7. Abszolút hangmagasságok

Az A. függelék eddigi részeiben mindig egymáshoz viszonyított hangmagasságokról beszéltünk. Befejezésül egy pillantást vetünk rá, abszolút értelemben milyen rezgésszámú hangok képezik a zene fizikai alanyagát.

Ebből a célból az egyvonalas a hang frekvenciáját szokás megállapodásszerűen megszabni. A 19. század harmadik negyedében – fokozatos emelés eredményeképpen – 435 hertzben rögzítették a „kamara a ” hang frekvenciáját, a későbbi konvenció szerint pedig ma – több mint ötven év óta – 440 hertz az a rezgésszám, amely viszonyítási alapként használandó.¹⁷ Feltehető, hogy ez jóval (hatvan-nyolcvan centtel?) magasabb a 19. század legelején használt hangolásnál.

Mint matematikus, rokonszenvvel fogadnám, ha a kamara a hang frekvenciájaként 430,5 hertz lenne előírva (ami 37,79 centtel alacsonyabb a mai szabványnál). Ekkor ugyanis

¹⁷ $440/435$ cent-értéke 19,79.

– mivel $512 = 2^9$ és az $512/430,5$ arány jól egyezik a 300 centtel (pontosabb cent-értéke 300,16) – a c hangok rezgésszámai 2 hatványai volnának.¹⁸

B. A megállapítások bizonyítása

A 3.1., 3.3. és 4.4. szakaszban nyolc megállapítást mondtunk ki anélkül, hogy ezek igazolására ott kitértünk volna. A jelen függelék 1.–8. pontjait sorra a 3.1.–3.6. és 4.1.–4.2. megállapítások indokolásának szenteljük.

1. Az első megállapítás helyessége közvetlenül belátható.

2. Tekintsük a különböző K_1 és K_2 hangkészleteket, amelyek egybevágóak. Legyen j a legkisebb olyan szám, amelyre $t^j(K_1) = K_2$. Ekkor j kisebb K_1 indexénél, i -nél. Könnyen látható, hogy a

$$K_2, t(K_2), t^2(K_2), \dots, t^{i-1}(K_2), t^i(K_2)$$

sorozat tagjai rendre egyenlőek a

$$t^j(K_1), t^{j+1}(K_1), \dots, t^{i-1}(K_1), K_1,$$

$$t(K_1), t^2(K_1), \dots, t^{j-1}(K_1), t^j(K_1)$$

sorozat tagjaival. Az utóbbi sorozatban az első és az utolsó tag megegyezik, emellett a sorozat $i + 1$ tagja közül az első i tag páronként különböző.

3. A 3.1. megállapításból következik, hogy (egy pozitív j számra) $K = t^j(K)$ pontosan akkor érvényes, ha j osztható az i indexszel. Mivel $K = t^{12}(K)$, igaz az $i \mid 12$ oszthatóság.

4. A 3.3. megállapítás és a rend definíciója folytán $r \mid 12$. Hátra van az $r \mid n$ oszthatóság igazolása.

Vezessünk be a K hangkészletben egy ekvivalencia-relációt úgy, hogy az x és y hangok akkor ekvivalensek, ha van olyan q szám, amelyre $y = t^{q^i}(x)$ teljesül (i -vel K indexét jelöltük). Ekkor az ekvivalenciaosztályok mindegyike

$$(B.1) \quad \{x, t^i(x), t^{2i}(x), \dots, t^{(r-1)i}(x)\}$$

alakban írható, ahol x az osztály bármely elemét jelentheti. A (B.1)-ben felsorolt elemek páronként különbözőek (mivel $i, 2i, \dots, (r-1)i$ mind 12 alatti számok), és belátható, hogy kimerítik az osztályt. A K hangkészlet tehát előáll mint r elemet tartalmazó egy vagy több ekvivalenciaosztály egyesítése. Ennélfogva r osztója az n ($= |K|$) számnak.

5. Legyen x és y két eleme a K hangkészletnek. Tekintsük azt a t^j transzpozíciót, amely x -et y -ba viszi át ($0 \leq j \leq 11$). Amennyiben j egyike a $0, i, 2i, \dots$,

¹⁸Úgy tudom, zenei körökben sem ismeretlen olyan vélemény, hogy a ma érvényben levő hangolási norma túl magas, pl. mert kedvezőtlen az énekesek számára.

$(r-1)i$ számoknak, úgy t^j izomorfíát létesít a K -ból x illetve y kitüntetésével képezett két modulus között. A (tekintetbe jövő) többi j számokra pedig a $t^j(K)$ hangkészlet különbözik K -tól.

6. Az összefoglaló jellegű 3.6. megállapítás a korábbi öt megállapításból következik.

7.–8. Az állítások közvetlenül beláthatóak, ha szem előtt tartjuk az egybevágóság, az index és a kiegészítő hangkészlet definícióit.

Példa. Azt a gondolatmenetet, amellyel a 3.4. megállapításban kimondott $r \mid n$ oszthatóságot és a 3.5. megállapítást bizonyítottuk, a

$$\{c, d, e, f, fisz, gisz, b, h\}$$

hangkészletet – és a belőle nyerhető modulusokat – vizsgálva illusztrálhatjuk. Ez a hangkészlet egybevágó a $H_{39}^{(4)}$ hangkészlet¹⁹ komplementumával, és a C. függelékben mint $H_{39}^{(8)}$ fog szerepelni.

$H_{39}^{(8)}$ -re vonatkozóan $n = 8$, $i = 6$, $r = 2$. Az $r \mid n$ igazolása során megjelenő ekvivalenciaosztályok száma 4 ($= n/r$), és mindegyik ekvivalenciaosztály 2 ($= r$) hangból áll. Az osztályok a következők:

$$\{c, fisz\}, \{d, gisz\}, \{e, b\}, \{f, h\}.$$

Az ugyanazon osztályba tartozó egyik vagy másik hang kitüntetésével izomorf modulusok állnak elő $H_{39}^{(8)}$ -ből, a lényegesen különböző modulusok száma tehát 4.

C. A 7, 8, 9, 10 méretű hangkészletek felsorolása

A 4.6. pontban részletezés nélkül szóltunk a legalább hét, legfeljebb tíz hangot tartalmazó hangkészletekről: eltekintettünk azok tényleges felsorolásától. A jelen függelék négy táblázatot tartalmaz, ezekben sorra megtalálhatóak (egybevágóság erejéig) a szóban forgó hangkészletek.

A 10. táblázatban foglalt 66 hangkészlet rendre egybevágó az 5. táblázatban felsorolt hangkészletek komplementumaival. Ugyanilyen összefüggés áll fenn a 11. és 3., a 12. és 2., valamint a 13. és 1. táblázatok között is.

¹⁹Ezt a hangkészletet elemeztük a 4.2. szakasz végén.

Jelölés	Hangkészlet	Jelölés	Hangkészlet
$H_1^{(7)}$	$\{c, \text{fisz}, g, \text{gisz}, a, b, h\}$	$H_{34}^{(7)}$	$\{c, \text{esz}, f, g, \text{gisz}, a, b\}$
$H_2^{(7)}$	$\{c, f, \text{fisz}, g, \text{gisz}, a, b\}$	$H_{35}^{(7)}$	$\{c, \text{esz}, f, g, a, b, h\}$
$H_3^{(7)}$	$\{c, e, f, \text{fisz}, g, \text{gisz}, a\}$	$H_{36}^{(7)}$	$\{c, e, f, \text{fisz}, \text{gisz}, a, b\}$
$H_4^{(7)}$	$\{c, e, g, \text{gisz}, a, b, h\}$	$H_{37}^{(7)}$	$\{c, \text{esz}, \text{fisz}, g, \text{gisz}, b, h\}$
$H_5^{(7)}$	$\{c, f, g, \text{gisz}, a, b, h\}$	$H_{38}^{(7)}$	$\{c, e, \text{fisz}, g, \text{gisz}, b, h\}$
$H_6^{(7)}$	$\{c, f, \text{fisz}, g, \text{gisz}, a, h\}$	$H_{39}^{(7)}$	$\{c, e, f, \text{fisz}, \text{gisz}, b, h\}$
$H_7^{(7)}$	$\{c, e, f, \text{fisz}, g, \text{gisz}, h\}$	$H_{40}^{(7)}$	$\{c, \text{esz}, e, f, g, b, h\}$
$H_8^{(7)}$	$\{c, e, f, \text{gisz}, a, b, h\}$	$H_{41}^{(7)}$	$\{c, \text{esz}, f, \text{fisz}, g, b, h\}$
$H_9^{(7)}$	$\{c, f, \text{fisz}, \text{gisz}, a, b, h\}$	$H_{42}^{(7)}$	$\{c, e, f, \text{fisz}, \text{gisz}, a, h\}$
$H_{10}^{(7)}$	$\{c, e, f, \text{fisz}, g, \text{gisz}, b\}$	$H_{43}^{(7)}$	$\{c, \text{esz}, e, f, g, \text{gisz}, h\}$
$H_{11}^{(7)}$	$\{c, \text{esz}, \text{fisz}, g, \text{gisz}, a, b\}$	$H_{44}^{(7)}$	$\{c, e, f, g, \text{gisz}, a, h\}$
$H_{12}^{(7)}$	$\{c, e, \text{fisz}, g, \text{gisz}, a, b\}$	$H_{45}^{(7)}$	$\{c, \text{esz}, e, \text{fisz}, g, b, h\}$
$H_{13}^{(7)}$	$\{c, \text{esz}, f, \text{gisz}, a, b, h\}$	$H_{46}^{(7)}$	$\{c, \text{esz}, e, g, \text{gisz}, b, h\}$
$H_{14}^{(7)}$	$\{c, \text{esz}, \text{fisz}, \text{gisz}, a, b, h\}$	$H_{47}^{(7)}$	$\{c, e, f, g, \text{gisz}, b, h\}$
$H_{15}^{(7)}$	$\{c, e, \text{fisz}, \text{gisz}, a, b, h\}$	$H_{48}^{(7)}$	$\{c, \text{esz}, e, f, g, \text{gisz}, b\}$
$H_{16}^{(7)}$	$\{c, f, \text{fisz}, g, \text{gisz}, b, h\}$	$H_{49}^{(7)}$	$\{c, \text{esz}, f, g, \text{gisz}, a, h\}$
$H_{17}^{(7)}$	$\{c, e, f, \text{fisz}, g, b, h\}$	$H_{50}^{(7)}$	$\{c, \text{esz}, f, \text{fisz}, g, a, b\}$
$H_{18}^{(7)}$	$\{c, e, f, \text{fisz}, a, b, h\}$	$H_{51}^{(7)}$	$\{c, \text{esz}, f, \text{fisz}, g, a, h\}$
$H_{19}^{(7)}$	$\{c, f, \text{fisz}, g, a, b, h\}$	$H_{52}^{(7)}$	$\{c, \text{esz}, e, f, g, a, b\}$
$H_{20}^{(7)}$	$\{c, e, f, \text{fisz}, g, a, b\}$	$H_{53}^{(7)}$	$\{c, \text{esz}, e, f, g, a, h\}$
$H_{21}^{(7)}$	$\{c, \text{esz}, \text{fisz}, g, \text{gisz}, a, h\}$	$H_{54}^{(7)}$	$\{c, \text{esz}, e, \text{fisz}, \text{gisz}, a, b\}$
$H_{22}^{(7)}$	$\{c, e, \text{fisz}, g, \text{gisz}, a, h\}$	$H_{55}^{(7)}$	$\{c, \text{esz}, e, \text{fisz}, g, \text{gisz}, b\}$
$H_{23}^{(7)}$	$\{c, e, f, \text{fisz}, g, a, h\}$	$H_{56}^{(7)}$	$\{c, \text{esz}, f, \text{fisz}, \text{gisz}, a, b\}$
$H_{24}^{(7)}$	$\{c, \text{esz}, e, g, \text{gisz}, a, b\}$	$H_{57}^{(7)}$	$\{c, \text{esz}, e, \text{fisz}, \text{gisz}, b, h\}$
$H_{25}^{(7)}$	$\{c, e, f, g, \text{gisz}, a, b\}$	$H_{58}^{(7)}$	$\{c, \text{esz}, f, \text{fisz}, \text{gisz}, b, h\}$
$H_{26}^{(7)}$	$\{c, \text{esz}, e, \text{fisz}, a, b, h\}$	$H_{59}^{(7)}$	$\{c, \text{esz}, f, g, \text{gisz}, b, h\}$
$H_{27}^{(7)}$	$\{c, \text{esz}, f, \text{fisz}, a, b, h\}$	$H_{60}^{(7)}$	$\{c, d, e, \text{fisz}, \text{gisz}, b, h\}$
$H_{28}^{(7)}$	$\{c, \text{esz}, e, g, a, b, h\}$	$H_{61}^{(7)}$	$\{c, \text{esz}, e, \text{fisz}, g, a, b\}$
$H_{29}^{(7)}$	$\{c, \text{esz}, \text{fisz}, g, a, b, h\}$	$H_{62}^{(7)}$	$\{c, \text{esz}, e, \text{fisz}, g, a, h\}$
$H_{30}^{(7)}$	$\{c, e, f, g, a, b, h\}$	$H_{63}^{(7)}$	$\{c, \text{esz}, f, \text{fisz}, \text{gisz}, a, h\}$
$H_{31}^{(7)}$	$\{c, e, \text{fisz}, g, a, b, h\}$	$H_{64}^{(7)}$	$\{c, \text{esz}, e, \text{fisz}, \text{gisz}, a, h\}$
$H_{32}^{(7)}$	$\{c, \text{esz}, e, f, \text{fisz}, \text{gisz}, b\}$	$H_{65}^{(7)}$	$\{c, d, e, \text{fisz}, \text{gisz}, a, h\}$
$H_{33}^{(7)}$	$\{c, \text{esz}, f, \text{fisz}, g, \text{gisz}, b\}$	$H_{66}^{(7)}$	$\{c, d, e, f, g, a, h\}$

10. táblázat. A hét hangot tartalmazó hangkészletek felsorolása egybevágóságtól eltekintve (az index mindig 12)

Jelölés	Hangkészlet	Index	Jelölés	Hangkészlet	Index
$H_1^{(8)}$	$\{c, f, fisz, g, gisz, a, b, h\}$	12	$H_{23}^{(8)}$	$\{c, esz, e, f, fisz, gisz, a, b\}$	12
$H_2^{(8)}$	$\{c, e, f, fisz, g, gisz, a, b\}$	12	$H_{24}^{(8)}$	$\{c, esz, f, fisz, g, gisz, b, h\}$	12
$H_3^{(8)}$	$\{c, esz, fisz, g, gisz, a, b, h\}$	12	$H_{25}^{(8)}$	$\{c, esz, e, f, fisz, gisz, b, h\}$	12
$H_4^{(8)}$	$\{c, e, fisz, g, gisz, a, b, h\}$	12	$H_{26}^{(8)}$	$\{c, esz, e, f, g, gisz, a, b\}$	12
$H_5^{(8)}$	$\{c, e, f, fisz, g, gisz, a, h\}$	12	$H_{27}^{(8)}$	$\{c, esz, f, fisz, g, a, b, h\}$	12
$H_6^{(8)}$	$\{c, esz, e, g, gisz, a, b, h\}$	12	$H_{28}^{(8)}$	$\{c, esz, e, f, g, a, b, h\}$	12
$H_7^{(8)}$	$\{c, e, f, g, gisz, a, b, h\}$	12	$H_{29}^{(8)}$	$\{c, esz, e, f, fisz, gisz, a, h\}$	12
$H_8^{(8)}$	$\{c, esz, e, f, fisz, g, gisz, b\}$	12	$H_{30}^{(8)}$	$\{c, esz, e, fisz, g, gisz, a, h\}$	12
$H_9^{(8)}$	$\{c, esz, f, fisz, g, gisz, a, b\}$	12	$H_{31}^{(8)}$	$\{c, esz, e, fisz, g, a, b, h\}$	12
$H_{10}^{(8)}$	$\{c, esz, f, g, gisz, a, b, h\}$	12	$H_{32}^{(8)}$	$\{c, d, e, fisz, g, gisz, a, h\}$	12
$H_{11}^{(8)}$	$\{c, e, f, fisz, g, gisz, b, h\}$	12	$H_{33}^{(8)}$	$\{c, d, e, f, g, a, b, h\}$	12
$H_{12}^{(8)}$	$\{c, esz, e, f, fisz, g, b, h\}$	12	$H_{34}^{(8)}$	$\{c, d, e, fisz, g, a, b, h\}$	12
$H_{13}^{(8)}$	$\{c, e, f, fisz, gisz, a, b, h\}$	12	$H_{35}^{(8)}$	$\{c, esz, e, f, g, gisz, a, h\}$	12
$H_{14}^{(8)}$	$\{c, esz, e, f, fisz, g, a, b\}$	12	$H_{36}^{(8)}$	$\{c, esz, e, f, g, gisz, b, h\}$	12
$H_{15}^{(8)}$	$\{c, esz, f, fisz, g, gisz, a, h\}$	12	$H_{37}^{(8)}$	$\{c, esz, e, fisz, g, gisz, b, h\}$	12
$H_{16}^{(8)}$	$\{c, esz, e, f, fisz, g, a, h\}$	12	$H_{38}^{(8)}$	$\{c, d, e, fisz, g, gisz, b, h\}$	12
$H_{17}^{(8)}$	$\{c, esz, e, fisz, g, gisz, a, b\}$	12	$H_{39}^{(8)}$	$\{c, d, e, f, fisz, gisz, b, h\}$	6
$H_{18}^{(8)}$	$\{c, esz, e, fisz, gisz, a, b, h\}$	12	$H_{40}^{(8)}$	$\{c, d, esz, f, fisz, gisz, b, h\}$	12
$H_{19}^{(8)}$	$\{c, esz, f, fisz, gisz, a, b, h\}$	12	$H_{41}^{(8)}$	$\{c, d, esz, f, fisz, g, a, h\}$	12
$H_{20}^{(8)}$	$\{c, d, e, fisz, gisz, a, b, h\}$	12	$H_{42}^{(8)}$	$\{c, d, e, f, g, gisz, a, h\}$	12
$H_{21}^{(8)}$	$\{c, e, f, fisz, g, a, b, h\}$	12	$H_{43}^{(8)}$	$\{c, d, esz, f, fisz, gisz, a, h\}$	3
$H_{22}^{(8)}$	$\{c, esz, e, f, fisz, a, b, h\}$	6			

11. táblázat. A nyolc hangot tartalmazó hangkészletek felsorolása egybeváágóságtól eltekintve

Jelölés	Hangkészlet	Index
$H_1^{(9)}$	$\{c, e, f, fisz, g, gisz, a, b, h\}$	12
$H_2^{(9)}$	$\{c, esz, f, fisz, g, gisz, a, b, h\}$	12
$H_3^{(9)}$	$\{c, esz, e, f, fisz, g, gisz, a, b\}$	12
$H_4^{(9)}$	$\{c, esz, e, fisz, g, gisz, a, b, h\}$	12
$H_5^{(9)}$	$\{c, esz, e, f, fisz, g, gisz, a, h\}$	12
$H_6^{(9)}$	$\{c, d, e, fisz, g, gisz, a, b, h\}$	12
$H_7^{(9)}$	$\{c, esz, e, f, g, gisz, a, b, h\}$	12
$H_8^{(9)}$	$\{c, esz, e, f, fisz, g, gisz, b, h\}$	12
$H_9^{(9)}$	$\{c, d, e, f, g, gisz, a, b, h\}$	12
$H_{10}^{(9)}$	$\{c, d, esz, e, f, fisz, g, a, b\}$	12
$H_{11}^{(9)}$	$\{c, esz, e, f, fisz, gisz, a, b, h\}$	12
$H_{12}^{(9)}$	$\{c, esz, e, f, fisz, g, a, b, h\}$	12
$H_{13}^{(9)}$	$\{c, d, e, f, fisz, gisz, a, b, h\}$	12
$H_{14}^{(9)}$	$\{c, d, e, f, fisz, g, gisz, b, h\}$	12
$H_{15}^{(9)}$	$\{c, d, esz, f, fisz, gisz, a, b, h\}$	12
$H_{16}^{(9)}$	$\{c, d, e, f, fisz, g, a, b, h\}$	12
$H_{17}^{(9)}$	$\{c, d, esz, f, fisz, g, a, b, h\}$	12
$H_{18}^{(9)}$	$\{c, d, esz, e, fisz, g, a, b, h\}$	12
$H_{19}^{(9)}$	$\{c, d, esz, e, fisz, g, gisz, b, h\}$	4

12. táblázat. A kilenc hangot tartalmazó hangkészletek felsorolása egybevágóságtól eltekintve

Jelölés	Hangkészlet	Index
$H_1^{(10)}$	$\{c, cisz, d, esz, e, f, fisz, g, gisz, a\}$	12
$H_2^{(10)}$	$\{c, cisz, d, esz, e, f, fisz, g, gisz, b\}$	12
$H_3^{(10)}$	$\{c, cisz, d, esz, e, f, fisz, g, a, b\}$	12
$H_4^{(10)}$	$\{c, cisz, d, esz, e, f, fisz, gisz, a, b\}$	12
$H_5^{(10)}$	$\{c, cisz, d, esz, e, f, g, gisz, a, b\}$	12
$H_6^{(10)}$	$\{c, cisz, d, esz, e, fisz, g, gisz, a, b\}$	6

13. táblázat. A tíz hangot tartalmazó hangkészletek felsorolása egybevágóságtól eltekintve

Irodalomjegyzék

- [1] Bárdos, L., *Modális harmóniák* (Zeneműkiadó, Budapest, 1961).
- [2] Éliás, Á., A tizenkétfokú hangrendszer harmóniavilága, I–III, *Magyar Zene* **26** (1985), 115–147, 285–295, 378–385.
- [3] Lábos, E. and Nógrádi, E., “Examples of computer-aided exploration and design of dynamical systems in neurosciences: design of optimal nets”, in: *Dynamical Systems and Environmental Models*, Ed. H. G. Bothe, W. Ebeling, A. B. Kurzhanski, M. Peschel (Proc. of an international workshop held on the Wartburg, Eisenach, March 1986, Akademie-Verlag, Berlin, 1987), 172–181.
- [4] Reiner, D. L., Enumeration in music theory, *Amer. Math. Monthly* **92** (1985), 51–54.
- [5] Tarnóczy, T., *Zenei akusztika* (Zeneműkiadó, Budapest, 1982).

(Beérkezett: 2003. július 14.)

MTA RÉNYI ALFRÉD MATEMATIKAI KUTATÓINTÉZET
 BUDAPEST, PF. 127
 H-1364
 tappancs@renyi.hu

OVERVIEW OF THE SUBSETS OF THE SET OF THE TWELVE CHROMATIC MUSICAL NOTES

ANDRÁS ÁDÁM

There are ($2^{12} =$) 4096 possibilities for choosing a subset from a set containing twelve elements. In the case where the collection M of the twelve (tempered) notes is regarded as the basic set, the expedient approach is that two gamuts (subsets of M) are viewed as essentially coinciding if they can be obtained from each other by transposition. Using this notion we can partition the gamuts into classes. The number of classes (i.e. of the essentially different gamuts) is 352, including the void gamut.

In the tables of this paper the 352 gamuts are listed in a way that each class is represented by exactly one gamut. In addition, the symmetry properties of the gamuts are dealt with and an enumeration of the keys is achieved. (By a key, a gamut K is meant together with a tone x , selected from among the elements of K ; x is then called the fundamental tone and the elements of K are considered in their relation to x .)

A φ FAKTORIZÁLÓ ALGORITMUS¹

HORVÁTH GÉZA

Debrecen

Az RSA a jelenleg használt legnépszerűbb nyilvános kulcsú kriptorendszer. Az RSA biztonsága a nagy egészek faktorizációjának bonyolultságán alapul. Egy jól ismert faktorizáló algoritmus a Fermat faktorizáció, mely abban az esetben hatékony, ha a két osztó közel van egymáshoz. Ebben a cikkben egy új faktorizáló algoritmust ismertetünk, mely szintén akkor hatékony, ha az osztók közel vannak egymáshoz, ugyanakkor gyorsabb, mint a Fermat faktorizáció.

1. Bevezetés – Az RSA kriptorendszer

A nyilvános kulcsú titkosítás alapötletét Diffie és Hellman vetette fel 1976-ban [1]. A rendszer alapja, hogy létrehozunk egy e_K titkosító és egy d_K dekódoló algoritmust, ahol e_K nyilvános, d_K pedig titkos, és d_K kiszámítása belátható időn belül nem lehetséges az adott e_K esetén. A fenti rendszer első megvalósítását 1977-ben adta Rivest, Shamir és Adleman, bevezetve az RSA kriptorendszert [3].

Az RSA kriptorendszer \mathbb{Z}_n -ben végez számításokat, ahol n két különböző páratlan prím p és q szorzata.

$$\varphi(n) = (p - 1) \cdot (q - 1).$$

Válasszunk két természetes számot, a -t és b -t úgy, hogy $ab \equiv 1 \pmod{\varphi(n)}$.

Ezek után hozzuk nyilvánosságra n -et és b -t. A titkosító algoritmus $e_K(x) = x^b \bmod n$.

A dekódolás az n és a ismeretében a $d_K(y) = y^a \bmod n$ dekódoló algoritmussal történik.

¹Ez a munka az Országos Tudományos Kutatási Alapprogramok támogatásával jött létre. (OTKA T038225).

Az RSA biztonsága azon a feltételezésen alapul, hogy a titkosító függvény egyirányú, azaz belátható időn belül nem tudjuk dekódolni a kódolt üzenetet. A csapóajtó, mely lehetővé teszi számunkra, hogy mégis dekódoljuk az üzenetet: n faktorainak ismerete. A p és q számok ismeretében ugyanis $\varphi(n)$ egyszerűen kiszámítható, és $\varphi(n)$ ismeretében a bővített euklideszi algoritmus segítségével könnyen ki tudjuk számolni az a titkos kulcsot.

2. Előzmény – Fermat faktORIZÁLÓ algoritmus

Az n faktorainak meghatározására jól ismert algoritmus a Fermat faktORIZÁCIÓ. Az algoritmusból több változat ismeretes, az ismertetést a Pethő Attila [2] könyvében található verzióval kezdjük. Legyen $n = pq$, p, q páratlan prímek, $1 < q \leq p < n$, legyen $a = (p + q)/2$ és legyen $b = (p - q)/2$. Ezek után $n = a^2 - b^2$, mert

$$a^2 - b^2 = ((p + q)/2)^2 - ((p - q)/2)^2 = (p^2 + q^2 + 2pq - p^2 - q^2 + 2pq)/4 = pq = n.$$

Legyen $x = 2a + 1$ és $y = 2b + 1$. Ebben az esetben $a = (x - 1)/2$, $b = (y - 1)/2$ és

$$\begin{aligned} n = a^2 - b^2 &= ((x - 1)/2)^2 - ((y - 1)/2)^2 = (x^2 - 2x - y^2 + 2y)/4 = \\ &= ((x - y)/2) \cdot ((x + y - 2)/2), \end{aligned}$$

ahol $x > 2\lfloor\sqrt{n}\rfloor$ és $y \geq 1$. Kezdjük az algoritmust az $x = 2\lfloor\sqrt{n}\rfloor + 1$ és $y = 1$ értékekkel, majd növeljük x és y értékeit, amíg meg nem kapjuk azokat az x és y értékeket, melyek megoldják az $r = ((x - y)/2) \cdot ((x + y - 2)/2) - n = 0$ egyenletet. Ha megvan a fenti egyenletet megoldó x és y , akkor könnyen meg tudjuk határozni n osztóit: $p = (x + y - 2)/2$ és $q = (x - y)/2$.

A Fermat faktORIZÁLÓ algoritmus

Input: n

1. $x \leftarrow 2\lfloor\sqrt{n}\rfloor + 1$, $y \leftarrow 1$, $r \leftarrow \lfloor\sqrt{n}\rfloor^2 - n$
2. while $r > 0$ do $\{r \leftarrow r - y, y \leftarrow y + 2\}$
3. if $r = 0$ then
 - {
 - Output:* $p = (x + y - 2)/2$, $q = (x - y)/2$
 - exit
 - }
4. $r \leftarrow r + x$, $x \leftarrow x + 2$
- goto 2

Az algoritmus bonyolultsága

Tudjuk, hogy $y = 2b + 1 = (p - q) + 1$, ami azt jelenti, hogy az algoritmus végrehajt $(p - q)/2$ összehasonlítást ($r > 0$), szintén $(p - q)/2$ kivonást ($r \leftarrow r - y$), valamint $(p - q)/2$ kettővel való növelést ($y \leftarrow y + 2$) a második lépésben.

Azt is tudjuk, hogy $x = 2a + 1 = p + q + 1$, ezért az algoritmus végrehajt $(p + q + 1 - (2\lfloor\sqrt{n}\rfloor + 1))/2 = (p + q)/2 - \lfloor\sqrt{n}\rfloor$ összehasonlítást ($r = 0$) a harmadik lépésben, valamint végrehajt $(p + q)/2 - \lfloor\sqrt{n}\rfloor$ összeadást ($r \leftarrow r + x$), és $(p + q)/2 - \lfloor\sqrt{n}\rfloor$ kettővel való növelést ($x \leftarrow x + 2$) a negyedik lépésben.

Összeadva az algoritmus által végrehajtott utasítások számát, a következőket kapjuk: az algoritmus végrehajt

$$(p - q)/2 + (p + q)/2 - \lfloor\sqrt{n}\rfloor = p - \lfloor\sqrt{n}\rfloor$$

lépést, és minden lépésben elvégez egy kivonást vagy összeadást, egy kettővel való növelést, és egy összehasonlítást.

Egy másik Fermat faktorizáló algoritmus

Benne de Weger [5] cikkében találtunk egy másik, szintén Fermat faktorizáló algoritmusnak nevezett algoritmust, amely eltér az előző algoritmustól a lépések számában csakúgy, mint az egyes lépések végrehajtásához szükséges műveletek bonyolultságában. Ezt az algoritmust a továbbiakban, a félreértések elkerülése érdekében, második Fermat faktorizáló algoritmusnak hívjuk. Ebben az esetben olyan x, y pozitív egészeket keresünk, melyek különböznek az $x = n + 1$, $y = n - 1$ számoktól, és kielégítik a $4n = x^2 - y^2$ egyenletet. Amennyiben találunk ilyen egészeket, abban az esetben egyszerű behelyettesítéssel megkaphatjuk a $p = (x + y)/2$ és $q = (x - y)/2$ egészeket, melyek nagyobbak, mint 1 és kielégítik a $pq = n$ egyenletet. Ahhoz, hogy megtaláljuk a megfelelő x és y számokat, sorba vesszük az $x = \lfloor 2\sqrt{n} \rfloor + 1, \lfloor 2\sqrt{n} \rfloor + 2, \lfloor 2\sqrt{n} \rfloor + 3, \dots$ értékeket, egészen addig, míg $x^2 - 4n$ négyzetszám lesz.

Az algoritmus bonyolultsága eltér az előzőleg ismertetett algoritmusétól. A második Fermat faktorizáló algoritmus által megtett lépések száma: $x - \lfloor 2\sqrt{n} \rfloor = p + q - \lfloor 2\sqrt{n} \rfloor$. Ez a lépésszám jóval alacsonyabb, mint az előző algoritmus lépésszáma, ami hatékonyabbá teszi a második algoritmust az előző algoritmusnál. (A lépésszámok részletes összehasonlítására a következő fejezetekben térünk ki.) Ugyanakkor a második algoritmusnak minden lépésben sokkal bonyolultabb műveleteket kell végrehajtania, mint az előző algoritmusnak, mivel minden lépésben ellenőriznie kell, hogy az $x^2 - 4n$ négyzetszám-e. Így tehát egy kisebb lépésszámú, ugyanakkor minden lépésében jóval bonyolultabb műveleteket végrehajtó algoritmust kaptunk.

A harmadik fejezetben megmutatunk egy új faktorizáló algoritmust, a φ algoritmust, mely ugyanolyan kevés lépést tesz meg, mint a második Fermat faktorizáció, és körülbelül olyan olcsó műveleteket használ, mint az elsőként ismertetett Fermat faktorizáló algoritmus. A negyedik fejezetben egy klasszikus lehetőséggel

élünk, mikor egy rövidebb előszámítás segítségével (és a tár feltöltésével) javítunk a φ algoritmus futási sebességén, még hatékonyabbá téve ezzel az új algoritmust.

3. A φ faktorizáló algoritmus

Az alábbi algoritmus egy igen egyszerű ötleten alapul. Legyenek p, q egymástól különböző páratlan prímek, $n = pq$ és $\varphi(n) = (p-1) \cdot (q-1)$. Minden egész x esetén, ahol $0 \leq x < n$, tudjuk, hogy

$$x^{\varphi(n)+1} \equiv x \pmod{n},$$

ahol $\varphi(n) + 1 = (p-1) \cdot (q-1) + 1 = n - (p+q) + 2$. Amennyiben $p = q = \lfloor \sqrt{n} \rfloor$, akkor $p+q = 2 \lfloor \sqrt{n} \rfloor$, egyébként pedig $p+q > 2 \lfloor \sqrt{n} \rfloor$. Legyen $i = x^{n-2 \lfloor \sqrt{n} \rfloor + 2} \pmod{n}$. Ebben az esetben

$$i/x^{p+q-2 \lfloor \sqrt{n} \rfloor} \equiv x \pmod{n}.$$

Rögzítsük az $x = 2$ értéket. Kezdve az $i_0 = 2^{n-2 \lfloor \sqrt{n} \rfloor + 2} \pmod{n}$ értéktől számoljuk ki az $i_{j+1} = i_j/2 \pmod{n}$ sorozatot. Mikor elérjük a $j = p+q-2 \lfloor \sqrt{n} \rfloor$ értéket, akkor $i_j = 2$. A j érték ismeretében már könnyen számítható $\varphi(n)$, a $\varphi(n) = n - 2 \lfloor \sqrt{n} \rfloor - j + 1$ formula segítségével. Felhasználva az n és $\varphi(n)$ értékeket, ki tudjuk számolni a p és q értékeit a következőképpen:

$$\varphi(n) = (p-1) \cdot (q-1) = pq - (p+q) + 1 = n - (p+q) + 1,$$

ezért

$$p+q = n - \varphi(n) + 1,$$

és $q = n/p$, így

$$p + (n/p) = n - \varphi(n) + 1,$$

$$(n/p) = n - \varphi(n) - p + 1,$$

$$n = np - \varphi(n)p - p^2 + p,$$

és végül

$$p^2 - (n+1-\varphi(n))p + n = 0.$$

Ezek után a p és q értékei:

$$p = n+1-\varphi(n) + \sqrt{(n+1-\varphi(n))^2 - 4n/2},$$

$$q = n+1-\varphi(n) - \sqrt{(n+1-\varphi(n))^2 - 4n/2}.$$

Sajnos kaphatunk $i_k = 2$ értéket olyan k esetén is, mely kisebb, mint j . Ez akkor történik meg, ha a 2 rendje modulo n kisebb, mint $p + q - 2\sqrt{n}$, ami a gyakorlatban igen ritkán fordul elő, de tipikusan előfordul például abban az esetben, ha $p = 2^r - 1$, $q = 2^s - 1$ valamely r, s egészekre. Például a $p = 2^5 - 1 = 31$, $q = 2^2 - 1 = 3$ választás esetén $n = 93$, és 2 rendje modulo $93 = 10$, ami kisebb, mint $p + q - 2\sqrt{n} = 34 - 2\sqrt{93} > 14$. Érdekes nyitott kérdés, hogy egy adott m küszöb esetén hány ilyen $n \leq m$ található.

A fentihez hasonló esetek miatt szükséges a kapott p, q értékek helyességét ellenőrizni, mielőtt leállítjuk az algoritmust. Ha a p, q értékek szorzata nem n , abban az esetben folytatni kell az algoritmust egészen addig, amíg meg nem kapjuk a megfelelő p és q értékeket. (A fenti probléma egy másik lehetséges megoldása, ha inkorrekt p, q esetén kicseréljük a rögzített $x = 2$ értéket valamely $x > 2$ egész értékre.)

A φ faktorizáló algoritmus

Input: n

1. $j \leftarrow 0, i \leftarrow 2^{n-2\lfloor\sqrt{n}\rfloor+2} \bmod n$
2. while $i \neq 2$ do
 - {
 - if *páratlan*(i) then $\{i \leftarrow i + n\}$
 - $i \leftarrow i/2, j \leftarrow j + 1$
 - }
3. $\varphi(n) \leftarrow n - 2\lfloor\sqrt{n}\rfloor - j + 1,$
 $p \leftarrow n + 1 - \varphi(n) + \left\lfloor \frac{\sqrt{(n+1-\varphi(n))^2 - 4n}}{2} \right\rfloor,$
 $q \leftarrow n + 1 - \varphi(n) - \left\lfloor \frac{\sqrt{(n+1-\varphi(n))^2 - 4n}}{2} \right\rfloor$
4. if $n = pq$ then
 - {
 - Output:* $\varphi(n), p, q$
 - exit
 - }
5. $i \leftarrow 1, j \leftarrow j + 1$
goto 2

Az algoritmus bonyolultsága

Az algoritmus elvégez $2j+1$ összehasonlítást ($i \neq 2$ és *páratlan*(i)), j kettővel való osztást ($i \leftarrow i/2$), j eggyel történő növelést ($j \leftarrow j + 1$) és körülbelül $j/2$ összeadást ($\{i \leftarrow i + n\}$, ahol $j = p + q - 2\lfloor\sqrt{n}\rfloor$). Az algoritmus szintén kiszámítja a $\varphi(n)$, p , q értékeket és ellenőrzi az $n = pq$ egyenlőséget várhatóan egy alkalommal.

Meg kell jegyeznünk, hogy az ($i \leftarrow i/2$) kifejezésben a $/2$ művelet egy jobb shift műveletnek felel meg az i szám bináris alakján, ami egy igen gyors művelet.

Megéri eltölteni egy kis időt a $p + q - 2\lfloor\sqrt{n}\rfloor$ érték vizsgálatával. Azt mondjuk, hogy az algoritmus azonnal megadja a $\varphi(n)$ értéket, ha

$$p + q - 2\lfloor\sqrt{n}\rfloor \leq 3.$$

Ez teljesül, amennyiben

$$p + q - 2\sqrt{pq} \leq 1.$$

A fenti kifejezést átalakíthatjuk a következőképpen:

$$p + q - 1 \leq 2\sqrt{pq}$$

$$p^2 + q^2 + 2pq - 2p - 2q + 1 \leq 4pq$$

$$(p - q)^2 + 1 \leq 2(p + q).$$

Ez azt jelenti, hogy azonnal megkapjuk a $\varphi(n)$ értéket, ha a $p - q$ különbség kisebb, mint $\sqrt{p + q}$. A szakértők szerint jelenleg biztonságosnak ítélt RSA 1024 bites modulust használ. Ebben az esetben, ha a $p - q$ különbség hossza kisebb, mint 256 bit, akkor a $\varphi(n)$ értéket és n faktorait azonnal szolgáltatja az algoritmus.

Itt meg kell jegyeznünk, hogy az első Fermat faktorizáció esetén nincs ilyen azonnali válasz, hiszen az első algoritmus mindenképpen megtesz legalább $(p - q)/2$ lépést. Ez azt jelenti, hogy 1024 bites RSA esetén, ahol a $p - q$ különbség 255 bit hosszú, az első Fermat algoritmusnak meg kell tennie legalább 2^{254} lépést, ami figyelembe véve a jelenlegi számítási kapacitásokat, teljes mértékben lehetetlen.

Általánosságban elmondhatjuk, hogy n bites RSA esetén, ha a $p - q < n^{1/4}$, a második Fermat faktorizáló algoritmus és a φ algoritmus azonnal szolgáltatja az n faktorait. A különbség a második Fermat faktorizáció és a φ faktorizáció között akkor válik szembetűnővé, mikor a $p - q$ különbség nagyobb, mint $n^{1/4}$. Ebben az esetben természetesen a φ algoritmus jóval hatékonyabb, mivel jóval gyorsabban számítható műveleteket használ, mint a második Fermat faktorizáló algoritmus.

A φ faktorizáló algoritmusnak van egy másik fontos tulajdonsága: egyszerűen szét tudjuk osztani a számításokat több számítógép között. Ehhez mindössze arra van szükség, hogy válasszunk egy megfelelő m egészet, és indítsuk el a φ algoritmust az $i = 2^{n-2\lfloor\sqrt{n}\rfloor+2} \bmod n$ és $j = 0$ értékekkel az első rendelkezésre álló számítógépen, majd hagyjuk futni az algoritmust a $j = m$ értékig. (Természetesen ha közben megtaláljuk n faktorait, akkor kilépünk.) Ezzel párhuzamosan elindítjuk a φ algoritmust a második számítógépen az $i = 2^{n-2\lfloor\sqrt{n}\rfloor+2-m} \bmod n$ és $j = m$ értékekkel, és addig futtatjuk, amíg el nem éri az algoritmus a $j = 2m$ értéket, (vagy meg nem találja n faktorait,) és így haladunk tovább a további rendelkezésre álló gépek esetén is.

4. A φ_2 faktorizáló algoritmus

Megfigyelhetjük, hogy a φ algoritmus mindössze kettővel oszt egy páros számot, vagy pedig hozzáadja az n értéket egy páratlan számhoz, és az eredményt osztja kettővel. Könnyen megnövelhetjük az algoritmus hatékonyságát, ha előre kiszámoljuk a $h \cdot n$ értékeket, ahol $0 \leq h < r$, $r = 2^k$, és minden lépésben azt a $h \cdot n$ értéket adjuk az i számhoz, melynek hozzáadása után a kapott összeg oszthatóvá válik 2^k -nal, majd az összeget osztjuk 2^k -nal. Az így kapott algoritmus az eredeti algoritmus k lépését hajtja végre egy lépésben, ezért közel k -szor gyorsabb, mint az eredeti φ algoritmus.

Az előkészítő részben az algoritmus kiszámolja a g vektort, melyre

$$g[(-i \cdot n) \bmod 2^k] = i \cdot n, \quad 0 \leq i < 2^k.$$

Megmutatjuk, hogy ekkor minden i esetén az $i + g[i \bmod 2^k]$ érték osztható 2^k -nal. Minden i pozitív egészre léteznek megfelelő pozitív j, h egészek úgy, hogy $i = h \cdot 2^k - j$, $0 \leq j < 2^k$. Ezt a formulát használva azt kapjuk, hogy

$$i + g[i \bmod 2^k] = h \cdot 2^k - j + g[-j \bmod 2^k] = h \cdot 2^k - j + j + o \cdot 2^k = (h + o) \cdot 2^k,$$

a megfelelő $o \geq 0$ egész esetén.

Az előkészítő rész

Input: n, k

1. $j \leftarrow 0$
2. for $i = 0$ to $2^k - 1$ do $\{g[-j \bmod 2^k] \leftarrow j, j \leftarrow j + n\}$

Output: a g vektor

Meg kell jegyeznünk, hogy bár $0 \leq -j \bmod 2^k < 2^k$ definíció szerint, ennek ellenére számos programozási nyelv az $a \bmod m$ értéket a $-m + 1, \dots, m - 1$ intervallumból veszi. Amennyiben az implementáció során ilyen programnyelvet használunk, akkor a $(2^k - (j \bmod 2^k)) \bmod 2^k$ kifejezést kell használnunk a $-j \bmod 2^k$ kifejezés helyett.

Az előkészítő lépésben az algoritmus $2^k - 1$ összeadást hajt végre.

Az előkészítő lépés után már használhatjuk a g vektort a φ_2 algoritmusban, mely a φ algoritmuson alapul, de hatékonyabb az eredeti φ algoritmustól.

A φ_2 faktorizáló algoritmus

Input: n, g, k

1. $l \leftarrow 0, i \leftarrow 2^{n-2\lfloor\sqrt{n}\rfloor+2} \bmod n, b \leftarrow \text{true}$
2. if $i \leq 2^{k-1}$ then $\{\text{for } j := 0 \text{ to } k - 1 \text{ do } \{\text{if } i = 2^j \text{ then } \{h \leftarrow j, b \leftarrow \text{false}\}\}\}$
3. while b do

$\{$
 $i \leftarrow (i + g[i \bmod 2^k]) / 2^k, l \leftarrow l + 1$
 if $i \leq 2^{k-1}$ then $\{\text{for } j := 0 \text{ to } k - 1 \text{ do } \{\text{if } i = 2^j \text{ then } \{h \leftarrow j, b \leftarrow \text{false}\}\}\}$
 $\}$

4. $\varphi(n) \leftarrow n - 2 \lfloor \sqrt{n} \rfloor - l \cdot k - h + 2,$
 $p \leftarrow n + 1 - \varphi(n) + \left\lfloor \sqrt{(n+1-\varphi(n))^2 - 4n} \right\rfloor / 2,$
 $q \leftarrow n + 1 - \varphi(n) - \left\lfloor \sqrt{(n+1-\varphi(n))^2 - 4n} \right\rfloor / 2$
5. if $n = pq$ then
 $\{$
Output: $\varphi(n), p, q$
exit
 $\}$
6. $b \leftarrow \text{true}$
goto 3

A φ_2 algoritmusban az „if $i \leq 2^{k-1}$ then {for $j := 0$ to $k-1$ do {if $i = 2^j$ then { $h \leftarrow j, b \leftarrow \text{false}$ }}}}” kifejezés ellenőrzi, hogy i egyenlő-e 2^j -nel, ahol $0 < j \leq k-1$. Először csak annyit ellenőrzünk, hogy $i < 2^k$. Ezzel az egyetlen összehasonlítással az esetek nagytöbbségében az összes többi összehasonlítás kiváltható.

Meg kell még jegyeznünk, hogy az $i \leftarrow (i + g[i \bmod 2^k]) / 2^k$ kifejezésben a $/2^k$ az $i + g[i \bmod 2^k]$ kifejezés bináris alakjának jobb shiftje k -val, ami igen gyors művelet. Az $i \bmod 2^k$ az i bináris reprezentációjának utolsó k bitje, melyet szintén nagyon könnyen megkapunk.

Az algoritmus bonyolultsága

Az algoritmus végrehajt l összeadást ($i \leftarrow (i + g[i \bmod 2^k]) / 2^k$), l jobb shiftelést k -val ($i \leftarrow (i + g[i \bmod 2^k]) / 2^k$), l növelést eggyel ($l \leftarrow l + 1$), és körülbelül $2l + 2 + k$ összehasonlítást ($b, i < 2^k$ és $i = 2^j$), ahol $l = \left\lfloor (p + q - 2 \lfloor \sqrt{n} \rfloor) / k \right\rfloor$. Az algoritmus továbbá kiszámolja a $\varphi(n)$, p , q értékeket, és ellenőrzi az $n = pq$ egyenletet nagy valószínűséggel egyszer.

Végezetül meg kell jegyeznünk, hogy a φ_2 algoritmus számításai szintén eloszthatóak több számítógép között ugyanúgy, ahogy az a φ algoritmus esetén történt.

5. Példák

Két példán keresztül mutatjuk be az algoritmusokat, az első esetben 512 bites RSA-t használunk, a második esetben pedig 1024 bites RSA-t. Az egyszerűség kedvéért mindkét esetben a $k = 16$ értéket használjuk a φ_2 algoritmusban.

1. példa

$p = 108663779352917980032051301125697885808623502719488458728870678340499747960787$

$q = 108663779352917980032051301125697885243899690106705285497282303683016829686997$

$p - q = 564723812612783173231588374657482918273790$

$n = 1180781694325964389920957163427393340751931122188902409307546704825149261$
 $25031127703285849518428528245386551464935016998209126487198025878252584342397$
 86639

$\varphi(n) = 1180781694325964389920957163427393340751931122188902409307546704825149$
 $26125028954427698791158827887219364037507224491766280864549755764348432349176$
 62138856

első Fermat faktorizáló algoritmus: kiszámíthatatlan

második Fermat faktorizáló algoritmus: 733716 lépés drága műveletekkel

φ faktorizáló algoritmus: összehasonlítások száma: 1467433 eggyel való növelések száma: 733716 összeadások száma: 366249 jobb shiftek száma: 733716

φ_2 faktorizáló algoritmus: összehasonlítások száma: 91732 eggyel való növelések száma: 45857 összeadások száma: 45857 16-tal történő jobb shiftek száma: 45857

2. példa

$p = 7603132699754291736658926489218762024177651878300432892395455802632112438$
 $31145176765685946913841581118552312946734410067337257290913748204858401647781$
 4313

$q = 7603132699754291736658926489218762024177651878300432892395455802632112438$
 $22669537827414685390102109490160586561810661573853513643074363466365564074020$
 1823

$p - q = 8475638938271261523739471628391726384923748493483743647839384738492837$
 5737612490

$n = 5780762685007298493672291802482482032798166186205941306151154876800377041$
 $63465973391828933275653837719074438420245951894603013272454309295915821772441$
 $21159606923120727177513823398360992089679195552472802295493776117270016599265$
 $10983086668304282478607721586121678676625237696865669967817950926071551353809$
 2599

$\varphi(n) = 5780762685007298493672291802482482032798166186205941306151154876800377$
 $04163465973391828933275653837719074438420245951894603013272454309295915821772$
 $44121144400657721218594040505545382554565630840248716201429708985205664752374$
 $38857168372075203650174664030977408779168080166055674899033829839254847585632$
 0076464

első Fermat faktorizáló algoritmus: kiszámíthatatlan

második Fermat faktorizáló algoritmus: 236208 lépés drága műveletekkel

φ faktorizáló algoritmus: összehasonlítások száma: 472417 eggyel való növelések száma: 236208 összeadások száma: 117702 jobb shiftek száma: 236208

φ_2 faktorizáló algoritmus: összehasonlítások száma: 29544 eggyel való növelések száma: 14763 összeadások száma: 14763 16-tal történő jobb shiftek száma: 14763

Hivatkozások

- [1] Diffie, W. and Hellman, M. E., New directions in cryptography, *IEEE Transactions on Information Theory* **22** (1976), 644–654.
- [2] Pethő, A., *Algebraische Algorithmen* (Vieweg Verlag, 1999).
- [3] Rivest, R. L., Shamir, A. and Adleman, L., A method for obtaining digital signatures and public key cryptosystems, *Communications of the ACM* **21** (1978), 120–126.
- [4] Stinson, D. R., *Cryptography Theory and Practice* (CRC Press, 1995).
- [5] Benne de Weger, Cryptanalysis of RSA with Small Prime Difference, *AAECC* **13** (2002), 17–28.

(Beérkezett: 2003. október 25.)

DEBRECENI EGYETEM
INFORMATIKAI INTÉZET
SZÁMÍTÓGÉPTUDMÁNYI TANSZÉK
4032 DEBRECEN
EGYETEM TÉR 1.
e-mail: geza@inf.unideb.hu
URL: <http://www.inf.unideb.hu/~geza>

THE φ FACTORING ALGORITHM

GÉZA HORVÁTH

RSA is the most popular public-key cryptosystem. The security of RSA is based on the difficulty of factoring large integers. A well-known factoring algorithm is the Fermat factoring algorithm, which is useful when the two divisors are close to each other. In this paper we show a new algorithm, the φ factoring algorithm, which is more effective than the Fermat factoring algorithm.

A KÖLTSÉGTERVEZÉSI „TIME-COST TRADE-OFF” FELADAT ÁLTALÁNOSÍTÁSA ÉS MEGOLDÁSA

MÁLYUSZ LEVENTE

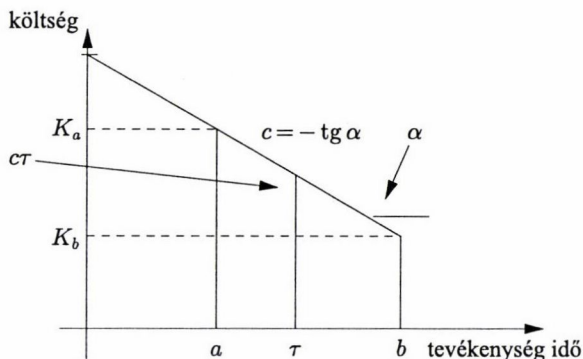
Budapest

A költségtervezési feladat először Kelley és Walker [5] munkájában jelent meg 1959-ben, ahol a problémára egy lineáris programozási feladaton alapuló megoldást is közöltek. Hálózati folyam algoritmuson alapuló megoldást adott rá 1961-ben Fulkerson [2], majd Kelley [6]. A költségtervezési feladat klasszikus formájában visszavezethető egy minimális költségű folyam feladatra. Ennek leírása megtalálható Ahuja [1]-ben. Ebben a cikkben a költségtervezési feladatot általánosítottam oly módon, hogy célként előírjuk miszerint megadott eseményeknek előírt időpontokban kell bekövetkezniük. Ha előbb következnek be, akkor bevételt hoznak, ha később akkor költséget okoznak. A modell továbbra is visszavezethető a minimális költségű folyam feladatra. A költségtervezési feladatra egy hálózati folyam algoritmuson alapuló megoldást adok amely az 1969-ben megjelent Klafszky [7]-ben ismertetett algoritmuson nyugszik.

1. A feladat ismertetése

1.1. A műszaki feladat

Egy beruházás elvégzéséhez szükséges tevékenységek és a tevékenységek közötti kapcsolatok irányított élhalmaz, háló, formájában adottak. A háló pontjai eseményeket, az élek valódi- és látszattevékenységeket vagy kapcsolatokat jelölnek. Valódi tevékenység esetén – ekkor „ a ” és „ b ” nemnegatívak – a tevékenység elvégzésének normál idejét „ b ”, illetve roham idejét „ a ” jelöli, „ τ ” pedig a tevékenységidőt. Jelölje egy tevékenységre a „ b ” időtartamhoz rendelt költséget K_b , az „ a ” időhöz tartozzon K_a . A költségfüggvényről tegyük fel, hogy lineáris, meredeksége $\frac{K_b - K_a}{b - a} = \operatorname{tg} \alpha = -c$, ahol $c \geq 0$. Ekkor egy adott tevékenységidőhöz „ τ ”-hoz tartozó költség $K_b + (b - \tau)c$. A költség a normál időnél a legkisebb a rohamidőnél a legnagyobb és közben lineárisan változik. Ha „ a ” és „ b ” nempozitívak, akkor c legyen zérus.



Az i -edik esemény bekövetkezte az előzetes tervek, szerződések szerint a kezdési időponttól számított $e_i \geq 0$ napon történik meg. Az építtető/beruházó generálkivitelezőt bíz meg a munkálatok elvégzésével, a generálkivitelező pedig több munkára alvállalkozókat fogad. Tegyük fel, hogy a szereplők közötti szerződések szerint az i -edik esemény feltételezett bekövetkeztekor előírt D_i összeget kapunk vagy kell fizetnünk a következők szerint.

Ha mi kapunk az építtetőtől akkor D_i pozitív, ha mi fizetünk az alvállalkozónak akkor D_i negatív. Az i -edik eseményhez tartozó műszaki tartalom megvalósulásának időpontját, az i -edik esemény bekövetkeztét, jelölje μ_i . Legyen a napi banki betéti kamatláb q és $d_i = D_i q$ továbbá kerekítsük d_i -t egész számmá. Így naponta d_i összeget nyerünk vagy veszünk aszerint, hogy mi fizetünk vagy nekünk fizetnének, illetve attól függően, hogy milyen irányban tér el μ_i az előre adott e_i értéktől. Alternatív értelmezés szerint a d_i jelöljön napi kötbért. A generálkivitelező szempontjából, ha d_i pozitív, akkor azt a napi kötbért fejezi ki, amit az i -edik esemény bekövetkeztének késéséért ($\mu_i > e_i$) kell fizetnie a megbízó felé vagy az az előteljesítési prémium amit a generálkivitelező kap a megbízótól ha hamarabb ($\mu_i < e_i$) teljesít. Ha d_i negatív, akkor vagy azt a napi kötbért jelöli, amit a generálkivitelező kap az alvállalkozótól ha az késik ($\mu_i > e_i$) a munka elvégzésével vagy azt az előteljesítési prémiumot jelenti, amit a vállalkozó kap ha hamarabb ($\mu_i < e_i$) teljesít. Formálisan kifejezve célunk az, hogy a $K_{bij} + (b_{ij} - \tau_{ij})c_{ij} + (\mu_i - e_i)d_i$ értékeket minden tevékenységre és eseményre összegezve az összeg minimális legyen.

1.2. A matematikai modell

Adott egy $[N, A]$ egy irányított élhalmaz, ahol N a csomópontok indexhalmaza, „ A ” az élek indexhalmaza. A hálónak egy kezdő „ s ” és egy végpontja „ t ” van. Minden csomóponton keresztül vezet út s -ből t -be. Az így definiált hálót nevezzük tervütem hálónak. Adottak a háló éleihez rendelt a_{ij} és b_{ij} egész számok, amelyekre feltesszük hogy $a_{ij} \leq b_{ij}$ továbbá vagy mindkettő nempozitív, vagy mindkettő nemnegatív. Legyen τ_{ij} olyan keresendő egész szám, amelyre $a_{ij} \leq \tau_{ij} \leq b_{ij} \forall ij \in A$ -ra. Adott továbbá minden élre egy $[a_{ij}, b_{ij}]$ szakaszon értelmezett lineáris

függvény, amelynek meredeksége $-c_{ij}$, ahol $c_{ij} \geq 0$. Az a_{ij} és b_{ij} értékekhez tartozó függvényértékeket jelölje rendre $K_{a_{ij}}$ és $K_{b_{ij}}$.

A háló pontjaihoz rendeljünk μ_i , $\forall i \in N$ értékeket. Feltétel, hogy $\tau_{ij} \leq \mu_j - \mu_i$ $\forall ij \in A$. A háló átfutási ideje, az ütemezés értéke: p , ahol $p \geq \mu_t - \mu_s$. Legyen $\mu_s = 0$. Adottak továbbá $e_i \geq 0$, $\forall i \in N$ egész értékek, és d_i , $\forall i \in N$ egész számok. Az $[N, A]$ irányított élhalmazt egészítsük ki a (t, s) éllel amelyre $a_{ts} := -p$, $b_{ts} := 0$, $c_{ts} := 0$. Az így definiált hálót a továbbiakban $[N, A]$ -val jelöljük.

Megjegyzés: Egyes éleken megköveteljük, hogy $\tau_{ij} = \mu_j - \mu_i$. Ezt úgy érjük el, hogy az ilyen éleken előírjuk, a következő feltételeket $\tau_{ij} \leq \mu_j - \mu_i$, $a_{ij} \leq \tau_{ij} \leq b_{ij}$, illetve $\tau_{ji} \leq \mu_i - \mu_j$, $-b_{ij} = a_{ji} \leq \tau_{ji} \leq b_{ji} = -a_{ij}$ és $c_{ji} = 0$. Következésképpen $a_{ij} \leq \mu_j - \mu_i \leq b_{ij}$. Mivel a célfüggvény optimumát $c_{ij} > 0$ esetén $\tau_{ij} = \min(b_{ij}, \mu_j - \mu_i)$ helyen veszi fel, ezért előbbieket szerint $\tau_{ij} = \mu_j - \mu_i$ teljesül. Ha $c_{ji} = 0$, akkor τ_{ji} tetszőleges, tehát úgy választjuk meg, hogy $\tau_{ji} = \mu_i - \mu_j$ teljesüljön.

Célunk minden lehetséges p értékre olyan τ és μ rendszerek keresése, amelyre

$$\sum_{ij \in A} [K_{b_{ij}} + (b_{ij} - \tau_{ij})c_{ij}] + \sum_{i \in N} (\mu_i - e_i)d_i \text{ minimális.}$$

A költségtervezési feladat adott p átfutási időre a következő formában írható fel.

Primál feladat. Adott az $[N, A]$ tervütem háló és háló éleihez rendelt a_{ij} , b_{ij} egész és $c_{ij} \geq 0$, nemnegatív egész értékek $\forall ij \in A$ -ra, valamint a p és d_i , $\forall i \in N$ egész számok, ahol $\sum_{i \in N} d_i = 0$.

Keresendő azon μ_i , $\forall i \in N$ -re és τ_{ij} , $\forall ij \in A$ -ra, ahol

$$(1) \quad \tau_{ij} \leq \mu_j - \mu_i, \quad \forall ij \in A$$

$$(2) \quad \tau_{ij} \leq b_{ij}, \quad \forall ij \in A$$

$$(3) \quad \tau_{ij} \geq a_{ij}, \quad \forall ij \in A$$

$$(4) \quad \mu_s = 0$$

$$(5) \quad -p \leq \mu_s - \mu_t$$

és $\sum_{ij \in A} K_{b_{ij}} + [(b_{ij} - \tau_{ij})c_{ij}] + \sum_{i \in N} (\mu_i - e_i)d_i$ legyen minimális vagy

$$\text{legyen maximális } \left\{ \sum_{ij \in A} c_{ij}\tau_{ij} - \sum_{i \in N} d_i\mu_i \right\}.$$

A fenti feladathoz rendelhető a következő duál feladat.

Tekintsük az $[N, k]$ hálózatot, ahol $k_{ij} = \infty$, ha $\forall ij \in A$ és 0 egyébként.

Duál feladat. Keresendő az $[N, k]$ hálózaton értelmezett s -ből t -be irányuló f_{ij} , $\forall ij \in A$ folyam, amelyre

$$(6) \quad \sum_{ji \in A} f_{ji} - \sum_{ij \in A} f_{ij} = d_i, \quad \forall i \in N\text{-re},$$

$$\text{és} \quad \sum_{\substack{ij \in A \\ f_{ij} < c_{ij}}} (c_{ij} - f_{ij})b_{ij} - \sum_{\substack{ij \in A \\ f_{ij} > c_{ij}}} (f_{ij} - c_{ij})a_{ij} \quad \text{legyen minimális.}$$

A két feladat közötti kapcsolatot mutatja meg az 1. lemma.

1. LEMMA. Minden a primál feladat feltételeit – (1), (2), (3), (4) és (5) feltételeket – teljesítő μ és τ vektorra valamint az $[N, k]$ hálózaton értelmezett duál megengedett – (6) feltételt teljesítő – s -ből t -be irányuló f folyamra, teljesül az alábbi egyenlőtlenség.

$$(7) \quad \sum_{ij \in A} c_{ij}\tau_{ij} - \sum_{i \in N} d_i\mu_i \leq \sum_{\substack{ij \in A \\ f_{ij} < c_{ij}}} (c_{ij} - f_{ij})b_{ij} - \sum_{\substack{ij \in A \\ f_{ij} > c_{ij}}} (f_{ij} - c_{ij})a_{ij}$$

Bizonyítás.

$$\begin{aligned} & \sum_{ij \in A} c_{ij}\tau_{ij} - \sum_{i \in N} d_i\mu_i = \\ &= \sum_{\substack{ij \in A \\ f_{ij} \leq c_{ij}}} (f_{ij} + c_{ij} - f_{ij})\tau_{ij} + \sum_{\substack{ij \in A \\ f_{ij} \geq c_{ij}}} (f_{ij} - (f_{ij} - c_{ij}))\tau_{ij} - \sum_{i \in N} d_i\mu_i = \\ &= \sum_{ij \in A} f_{ij}\tau_{ij} - \sum_{i \in N} d_i\mu_i + \sum_{\substack{ij \in A \\ f_{ij} < c_{ij}}} (c_{ij} - f_{ij})\tau_{ij} - \sum_{\substack{ij \in A \\ f_{ij} > c_{ij}}} (f_{ij} - c_{ij})\tau_{ij} \leq \\ &\leq \sum_{ij \in A} f_{ij}(\mu_j - \mu_i) - \sum_{i \in N} d_i\mu_i + \sum_{\substack{ij \in A \\ f_{ij} < c_{ij}}} (c_{ij} - f_{ij})b_{ij} - \sum_{\substack{ij \in A \\ f_{ij} > c_{ij}}} (f_{ij} - c_{ij})a_{ij}, \end{aligned}$$

ahol

$$\sum_{ij \in A} f_{ij}(\mu_j - \mu_i) - \sum_{i \in N} \mu_i d_i = \sum_{j \in N} \mu_j \sum_{\substack{i \in N \\ ij \in A}} (f_{ij} - f_{ji} - d_i) = 0.$$

Ezzel a bizonyítást befejeztük.

Következmény. Ha (7)-ben az egyenlőség áll fenn, akkor a célfüggvények optimálisak.

Optimalitási kritérium. Az egyenlőség fennállásának elégséges feltétele, hogy létezzen egy olyan folyam, amelyre:

- 1^o Ha $\tau_{ij} < \mu_j - \mu_i$ akkor $f_{ij} = 0$.
- 2^o Ha $\tau_{ij} < b_{ij}$ akkor $f_{ij} \geq c_{ij}$.
- 3^o Ha $\tau_{ij} > a_{ij}$ akkor $f_{ij} \leq c_{ij}$.

Ha ismerünk egy átfutási időhöz p -hez tartozó optimális megoldást, akkor Klafszky [7] folyamszemléletét megtartva tudunk konstruálni egy olyan algoritmust, amely egy maximális folyam feladat megoldásával p -nél kisebb átfutási időre – ha ez létezik – is optimális megoldást eredményez. De ha hálónk hurkot tartalmaz, akkor a megengedett megoldás létezése is kérdéses és általában egy kiinduló optimális megoldáshoz egy minimális költségű folyamfeladatot kell megoldanunk. Speciális esetben (pld. CPM háló, csak minimális kapcsolatokat tartalmazó MPM háló) azonban triviális módon ... a kiinduló optimális megoldás.

2. A költségtervezési feladat megoldása

Észrevételek.

1. Folyam csak olyan éleken folyhat, ahol $\tau_{ij} = \mu_j - \mu_i$.
2. A primál feladat feltételeit kielégítő optimális τ a következő értékeket veheti fel: $\tau_{ij} = \min[\mu_j - \mu_i, b_{ij}]$.
3. Ha $d_i = 0, \forall i \in N$ és a háló hurokmentes, akkor a $\tau_{ij} = b_{ij}, f_{ij} = 0, \forall ij \in A$ egy optimális megoldás. Ez az úgynevezett CMP/cost feladat. A feladat megoldása megtalálható a következő művekben Kelley-Walker [5], Fulkerson [2], Klafszky [7].
4. Ha $d_i = 0, \forall i \in N$ és a valódi tevékenységek leírásához ($\tau_{ij} = \mu_j - \mu_i$) zérus hurkot használunk, akkor a $\tau_{ij} = b_{ij}, f_{ij} = 0, \forall ij \in A$ egy optimális megoldás. Ez az úgynevezett csak minimális kapcsolatokat tartalmazó MPM/cost feladat. A feladat megoldása megtalálható Hajdu [3]-ban.
5. Ha $d_i = 0, \forall i \in N$ és a háló negatív hurkot is tartalmazhat akkor a maximális kapcsolatokat is tartalmazó MPM/cost feladatot kapjuk. Ez a feladat visszavezethető egy minimális költségű folyamproblémára lásd Ahuja [1]-ben. Mályusz [8]-ban a feladat kiinduló megoldását egy minimális költségű folyam probléma megoldásával kapjuk, majd követve Klafszky [7] szemléletét, maximális folyam feladatok sorozatos megoldásával megkapjuk a legkisebb költségű megoldást egyre kisebb átfutási időkre.
6. A költségtervezési feladat olyan általánosítása, amely MPM/cost modellben megengedi tevékenységek megszakítását is megtalálható Hajdu [4]-ben.

7. A költségtervezési feladat primál feladata a legkisebb költségű folyam feladat duálisa. Tehát általános esetben egy kiinduló optimális megoldáshoz egy minimális költségű folyam feladatot kell megoldanunk.

A feladat megoldásának algoritmikus lépései:

Keresünk egy kiinduló optimális megoldást, amelyhez tartozó átfutási idő legyen p_{\max} .

Keresünk egy optimális μ, τ, f, v rendszert, amelyre $p^* < p_{\max}, a_{ts} = -p_{\max}$.

– osztályozzuk az éleket

– konstruálunk egy szabad kapacitás hálózatot

– maximális „ g ” folyamot keresünk „ s ”-ből „ t ”-be

ha „ g ” végtelen, akkor vége,

ha véges, akkor

do

– a minimális vágásban megvizsgáljuk az éleket és módosítjuk a μ, τ, f, v rendszert: $a_{ts} = -p$.

– osztályozzuk az éleket

– konstruálunk egy szabad kapacitás hálózatot

– maximális „ g ” folyamot keresünk „ s ”-ből „ t ”-be

until maximális folyam véges;

Az optimalitási kritériumoknak megfelelően a következő osztályokba sorolhatjuk az éleket.

A_I	1^0 teljesül, (esetleg 3^0 is)	$\tau_{ij} < \mu_j - \mu_i$	$f_{ij} = 0$
A_{II}	2^0 és 3^0 teljesül,	$a_{ij} < \tau_{ij} < b_{ij}, \tau_{ij} = \mu_j - \mu_i$	$f_{ij} = c_{ij}$
A_{III}	csak 2^0 teljesül,	$\tau_{ij} < b_{ij}, \tau_{ij} = \mu_j - \mu_i = a_{ij}$	$f_{ij} \geq c_{ij}$
A_{IV}	csak 3^0 teljesül,	$a_{ij} < \tau_{ij}, \tau_{ij} = \mu_j - \mu_i = b_{ij}$	$f_{ij} \leq c_{ij}$
A_V	egyik sem teljesül,	$\tau_{ij} = a_{ij} = b_{ij} = \mu_j - \mu_i$	$f_{ij} \geq 0$

2. LEMMA. Ha valamely p -re létezik optimális μ, τ, f akkor vagy létezik $p^* < p$ amelyre van optimális μ^*, τ^*, f^* megoldás vagy p a legkisebb érték amelyre a feladat megoldható.

Bizonyítás. Készítsük el az alábbi $[N, A', r]$ szabad kapacitás hálózatot, ahol A' olyan kibővítése A -nak, ahol igaz, hogy ha $ij \in A$, de $ij \notin A$, akkor legyen $ji \in A'$ és ekkor $r_{ij} = 0$.¹

¹Az így kialakított szabad kapacitás hálózatban csak a minden egyes algoritmus lépésnek megfelelő folyamnövekményeket ábrázoljuk. Ez egy úgynevezett „residual network”.

Él csoport	Kapacitás az $ij \in A$ élen	Kapacitás a ji élen (ji nem biztos, hogy A -ba tartozik!)
$ij \in A_I$	$r_{ij} = 0,$	$r_{ji} = 0$
$ij \in A_{II}$	$r_{ij} = 0,$	$r_{ji} = 0$
$ij \in A_{III}$	$r_{ij} = \infty,$	$r_{ji} = f_{ij} - c_{ij}$
$ij \in A_{IV}$	$r_{ij} = c_{ij} - f_{ij},$	$r_{ji} = f_{ij}$
$ij \in A_V$	$r_{ij} = \infty,$	$r_{ji} = f_{ij}$

A többi él és a csúcspontok kapacitása legyen 0. A csúcspontok kapacitását már a kiinduló optimális megoldás telítette!

Ha $ij \in A_q$ és $ji \in A_l$, ahol $q, l \in (I, II, III, IV, V)$ akkor $r_{ij} = r_{ij}^q + r_{ji}^l$.

Keressünk maximális folyamot az előbb definiált több nyelövel és forrással rendelkező hálózaton. Legyen a maximális folyam g a minimális vágás (S, T) .

Legyen $f^* = g + f$. A kapacitások megválasztása miatt f^* továbbra is megfelel az optimalitási kritériumoknak.

Ha g végtelen, akkor van olyan út s -ből t -be, amelyen minden él vagy az A_{III} vagy az A_V csoportba tartozik, tehát azon az úton minden $r_{ij} = a_{ij}$, így p a legkisebb érték (átfutási idő) amelyre a feladat megoldható.

Ha g véges, akkor a vágásban lévő élek telítettek, azaz a vágásban vagy $f_{ij}^* = 0$ vagy $f_{ij}^* = c_{ij}$, ahol $ij \in (S, T)$. A vágásban csak A_I , A_{II} , A_{IV} típusú élek lehetnek, mert ezek kapacitása korlátos. A vágásban visszafelé bármilyen kapacitású él lehet. Vizsgáljuk meg a folyaminformációk segítségével, hogy a vágásban lévő és a vágásban visszafelé lévő élek milyen élcsoportba kerülhetnek az optimalitási kritériumok betartásával, ha változnak a T halmazban a potenciál értékek.

Ekkor egy élen a folyam vagy 0 vagy c .

Vágásban lévő élek $i \in S$, $j \in T$, $ij \in A$.

A_I ($f_{ij}^* = 0$): a maximális csökkenés tetszőleges c -re, minden vágásban lévő A_I típusú élt figyelembe véve

$$\delta_1 = \min_{\substack{i \in S, j \in T \\ ij \in A_I}} (\mu_j - \mu_i - b_{ij}).$$

A_{II} , A_{IV} ($f_{ij}^* = c_{ij}$): a maximális csökkenés

$$\delta_2 = \min_{\substack{i \in S, j \in T \\ ij \in A_{II}}} (\mu_j - \mu_i - a_{ij}).$$

A vágásban visszafelé bármilyen él lehet. Ekkor $i \in T$, $j \in S$, $ij \in A$ és a potenciálértékek a következőképpen változnak.

A_I , A_{IV} vagy A_V típusú élek estén a csökkenés tetszőleges nagy lehet.

A_{II} , A_{III} élek esetén a maximális csökkenés tetszőleges c -re

$$\delta_{v2} = \min_{\substack{i \in T, j \in S \\ ij \in A_{II} \text{ v } A_{III}}} (b_{ij} - \mu_j + \mu_i).$$

A (t, s) él az algoritmus folyamán mindig visszafelé menő A_{III} típusú él lesz a vágásban. A maximális csökkentés a (t, s) élen: $b_{ts} - \mu_s + \mu_t = 0 - 0 + p$.

Most csökkentjük a potenciálértékeket úgy, hogy a folyamértékek változatlanok maradnak és az optimalitási kritérium továbbra is teljesül.

$$\delta := \min(\delta_1, \delta_2, \delta_{v1}), \quad \text{ahol } \delta \text{ biztosan pozitív mennyiség.}$$

Legyenek az új potenciál értékek a következők szerint megválasztva.

$$\mu_i^* = \mu_i, \quad \text{ha } i \in S,$$

$$\mu_i^* = \mu_i - \lambda, \quad \text{ha } i \in T,$$

$$\text{ahol } \lambda = 0, 1, 2, \dots, \delta,$$

$$\text{illetve } \tau_{ij}^* := \min[\mu_j^* - \mu_i^*, b_{ij}].$$

$p^* = p - \lambda$. A p^* , μ^* , τ^* , f^* értékek az optimalitási kritériumot kielégítik.

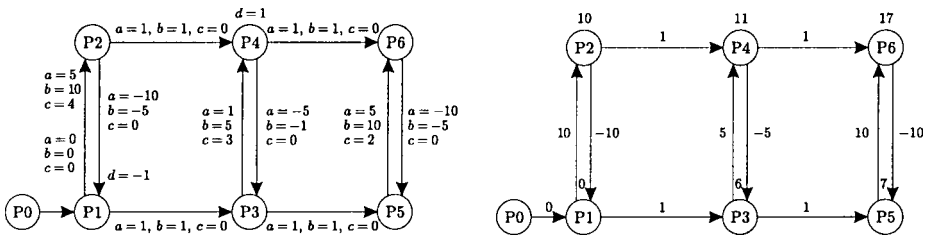
Ezzel a bizonyítást befejeztük.

Jelölje p_{\min} a legkisebb p -t, amelyre még létezik megoldása a feladatnak, és p_{\max} a kiinduló optimális megoldáshoz tartozó p értéket. A 2.lemma következménye, hogy tetszőleges p_{\min} és p_{\max} közé eső p -re létezik μ , τ , f , v optimális megoldás.

Megjegyzés. p_{\min} megkapható az adott hálózaton értelmezett maximális út minimális potenciál feladat megoldásával p_{\max} pedig egy minimális költségű folyam feladat megoldásával.

3. Az algoritmus illusztrálása egy numerikus feladaton

Határozzuk meg az alábbi tervütem hálón minden lehetséges átfutási időre a minimális költségű megoldást.



Kiinduló megoldás

$$f_{12} = f_{24} = 1, \quad \text{egyébként } f = 0 \text{ minden éle.}$$

Primál célfüggvény értéke:

$$\sum_{ij \in A} c_{ij} \tau_{ij} = c_{12} \tau_{12} + c_{34} \tau_{34} + c_{56} \tau_{56} + d_1 \mu_1 - d_4 \mu_4 = 40 + 15 + 20 + 0 - 11 = 64.$$

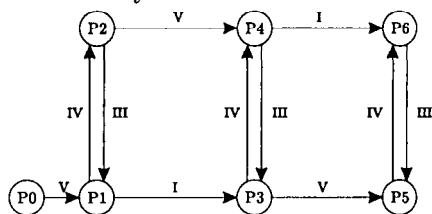
A duál célfüggvény értéke:

$$\begin{aligned} & -(f_{ts} - c_{ts})a_{ts} + (c_{12} - f_{12})b_{12} + (c_{34} - f_{34})b_{34} + (c_{56} - f_{56})b_{56} = \\ & = 0 + 30 + 14 + 20 = 64. \end{aligned}$$

A (t, s) él az algoritmus folyamán mindig visszafelé menő A_{III} típusú él lesz a vágásban. A maximális csökkentés a (t, s) élen: $b_{ts} - \mu_s + \mu_t = 0 - 0 + p$, $a_{ts} = -p$. Ezért az ábrákból az egyszerűsítés kedvéért elhagytuk.

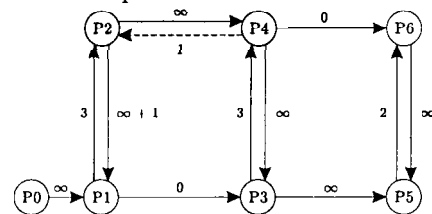
1. iterációs lépés

Élek osztályozása

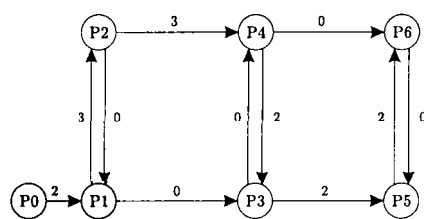
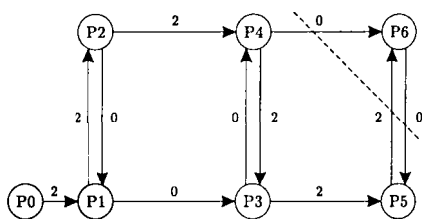


g maximális folyam, minimális vágás

szabad kapacitás hálózat



f^* folyam



$$\delta_{46} = 17 - 11 - 1 = 5$$

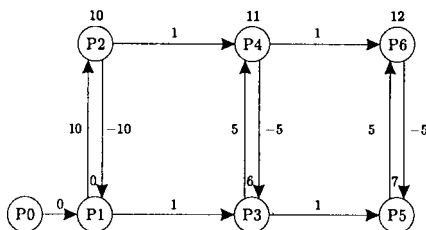
$$\delta_{56} = 17 - 7 - 5 = 5$$

a vágásban visszafelé

$$\delta_{65} = -5 - 7 + 17 = 5$$

$$\delta = 5$$

Az új potenciál értékek és tevékenységidők



Primál célfüggvény értéke:

$$\sum_{ij \in A} c_{ij} \tau_{ij} = c_{12} \tau_{12} + c_{34} \tau_{34} + c_{56} \tau_{56} + d_1 \mu_1 - d_4 \mu_4 = 40 + 15 + 10 - 11 = 54.$$

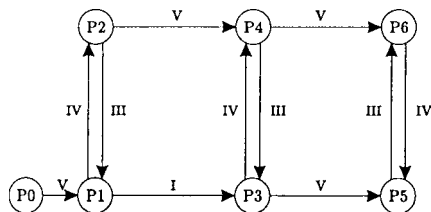
A duál célfüggvény értéke:

$$\begin{aligned} & -(f_{ts} - c_{ts})a_{ts} + (c_{12} - f_{12})b_{12} + (c_{34} - f_{34})b_{34} - \\ & - (f_{24} - c_{24})a_{24} - (f_{43} - c_{43})a_{43} - (f_{35} - c_{35})a_{35} = \\ & = 24 + 10 + 15 - 3 + 10 - 2 = 54. \end{aligned}$$

2. iterációs lépés

Élek osztályozása

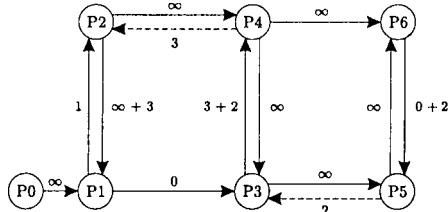
(csak a vágásban lévő élek változhattak!)



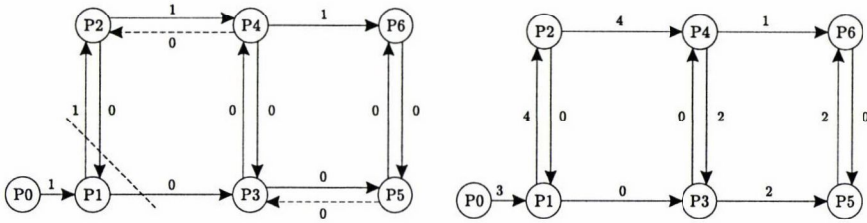
g maximális folyam, minimális vágás
(több lehetőség közül tetszés szerint választottam)

szabad kapacitás hálózat

(szaggatott vonallal jelöltem a csak a folyamszámításhoz szükséges éleket)



f^* folyam



$$\delta_{12} = 10 - 0 - 5 = 5$$

$$\delta_{13} = 6 - 0 - 1 = 5$$

a vágásban visszafelé

$$\delta_{21} = -5 - 0 + 10 = 5$$

$$\delta = 5$$

az új potenciál értékek és tevékenység idők

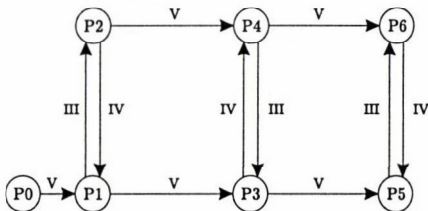
$$\sum_{ij \in A} c_{ij} \tau_{ij} = c_{12} \tau_{12} + c_{34} \tau_{34} + c_{56} \tau_{56} - d_4 \mu_4 = 20 + 15 + 10 - 6 = 39.$$

A duál célfüggvény értéke:

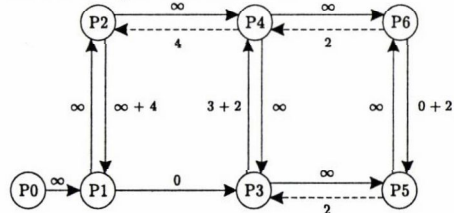
$$\begin{aligned} & -(f_{ts} - c_{ts})a_{ts} + (c_{34} - f_{34})b_{34} - (f_{24} - c_{24})a_{24} - \\ & -(f_{43} - c_{43})a_{43} - (f_{46} - c_{46})a_{46} - (f_{35} - c_{35})a_{35} = \\ & = 21 + 15 - 4 + 10 - 1 - 2 = 39. \end{aligned}$$

3. iteráció

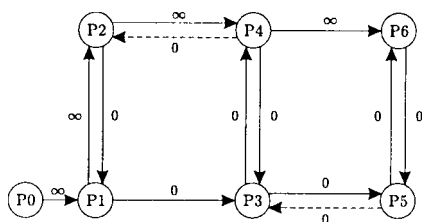
Élek osztályozása



szabad kapacitás hálózat



g maximális folyam, minimális vágás (több lehetőség közül tetszés szerint választottam)



Mivel a maximális folyam végtelen, ezért algoritmusunk leáll. 7 nap az elérhető legrövidebb átfutási idő.

A kapott eredményeket a következő táblázatban foglaljuk össze.

p_0	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	01	12	21	13	24	23	32	35	45	56	65	v	cf.
0	0	10	6	11	7	17	0	10	-10	1	1	5	-5	1	1	10	-10	0	64
0	0	10	6	11	7	12	0	10	-10	1	1	5	-5	1	1	5	-5	2	54
0	0	5	1	6	2	7	0	5	-5	1	1	5	-5	1	1	5	-5	3	39

Irodalom

- [1] Ahuja, R. K., Magnanti, T. L. and Orlin, J.B., *Network flows: Theory, Algorithms, and Applications* (Prentice Hall, 1993).
- [2] Fulkerson, R. D., A network flow computation for project cost curves, *Management Science* 2 (1961), 167-168.
- [3] Hajdu, M. and Klafszky, E., An algorithm for solving the CPM time-cost trade off problem, *Periodica Polytechnica* 37 (1993), 231-247.
- [4] Hajdu, M., PDM time-cost trade-off: activities are splittable or non-splittable, *Optimization*, 38 (1996), 155-171.
- [5] Kelley, J. E. and Walker, M. R., „Critical Path Planning and Scheduling”, in: *Proc. the Eastern Joint Computer Conference* (Boston, 1959).
- [6] Kelley, J. E., Critical Path Planning and Scheduling: Mathematical Basis, *Operation Research*, 9 (1959).
- [7] Klafszky, E., *Hálózati folyamatok* (Budapest, 1969).
- [8] Mályusz L., „An efficient network flow algorithm for MPM/PDM least cost scheduling problem”, *Proc. The 6th International Conference on Organisation, Technology and Management in Construction* (Moscenicka Draga Croatia, 17-20 September 2003).

(Beérkezett: 2003. november 3.)

BUTE DEPARTMENT OF CONSTRUCTION
TECHNOLOGY AND MANAGEMENT
lmalyusz@ekt.bme.hu

A GENERALIZATION OF MPM/PDM LEAST COST SCHEDULING
„TIME-COST TRADE-OFF” PROBLEM

LEVENTE MÁLYUSZ

Least cost scheduling techniques on CPM network (shortly CPM/cost problem) originates from James E. Kelly and Morgan Walker. It was developed in 1959. First algorithm based on network flows was published by Fulkerson D. in 1961. Classical form of time-cost trade-off originates in the minimum cost flow problem. In this paper a new construction management problem is presented that is an improvement of classical problem. Development deals with the system of contractual instalments. Events should occur at given times according to the contracts among building contractors. If events occur before those times they bring benefit if they occur later they bring outcomes. It is showed that this model also originates in the minimum cost flow problem. An algorithm is presented that follows the main steps of algorithm of CPM/cost method published by E. Klafszky in 1969. Starting from an optimal initial solution, project duration time is decreased step by step until minimum project duration time is attained. In each step only a maximum flow problem must be solved although original problem is equivalent to a minimum cost flow problem.

MAGYAR
FELSŐMÁNYOS AKADEMIKAI
KÖNYVTÁRA

A kiadásért felelős a BJMT főtítkára
Szedte és tördelte az Egyenes Bt.

Nyomta az MSZH Nyomda és Kiadó Kft., Budapest
Felelős vezető: Nagy László

Budapest, 2004
Megjelent 18 (A/5) ív terjedelemben
250 példányban
HU ISSN 0133-3399

ÚTMUTATÁS A SZERZŐKNEK

Az Alkalmazott Matematikai Lapok csak magyar nyelvű dolgozatokat közöl. A kéziratok gépelését olyan formában kérjük, hogy minden gépelt oldal 25, egyenként átlag 50 betűhelyes sort tartalmazzon. A közlésre szánt dolgozatokat e-mailen az `aml@math.elte.hu` címre kérjük elküldeni az ábrákat tartalmazó fájlokkal együtt. Előnyben részesülnek a \TeX -ben elkészített dolgozatok.

A kéziratok szerkezeti felépítésének a következő követelményeket kell kielégíteni. A fejlécnek tartalmaznia kell a dolgozat címét, a szerző teljes nevét, valamint annak a városnak a nevét, ahol a szerző dolgozik. A fejléc után egy, képletet nem tartalmazó, legfeljebb 200 szóból álló kivonatot kell minden esetben megadni. A dolgozatot címmel ellátott szakaszokra kell bontani, és az egyes szakaszokat arab sorszámozással kell ellátni. Az esetleges bevezetésnek mindig az első szakaszt kell alkotnia. Az irodalomjegyzék után, a kézirat befejezésekképpen fel kell tüntetni a szerző teljes nevét és a munkahelye (illetve lakása) pontos címét. A dolgozatban előforduló képleteket szakaszonként újrakezdődően, a képlet előtt két zárójel közé írt kettős számozással kell azonosítani. Természetesen nem szükséges minden képletet számozással ellátni. Az esetleges definíciókat és tételeket (segéd tételeket és lemmákat) ugyancsak szakaszonként újrakezdődő, kettős számozással kell ellátni. Kérjük a szerzőket, hogy ezeket, valamint a tételek bizonyítását a szövegben kellő módon emeljék ki. Minden dolgozathoz csatolni kell egy angol, német francia vagy orosz nyelvű, külön oldalra gépelt összefoglalót.

Mind az ábrákat, mind a lábjegyzeteket a dolgozat szakaszokra bontásától független, folytatolagos arab sorszámozással kell ellátni. Az ábrák elhelyezését a dolgozat megfelelő helyén, szeljegyzetként feltüntetett, ábraazonosító sorszámokkal kell megadni. A lábjegyzetekre a dolgozaton belül az azonosító sorszám felső indexkénti használatával lehet hivatkozni.

Az irodalmi hivatkozások formája a következő. Minden hivatkozást fel kell sorolni a dolgozat végén található irodalomjegyzékben, a szerzők, illetve a társszerzők esetén az első szerző neve szerint alfabetikus sorrendben úgy, hogy a cirill betűs szerzők nevét a *Mathematical Reviews* írási szabályai szerint latin betűsre kell átírni. A folyóiratban megjelent cikkekre [1], a könyvekre [5], a kötetben megjelent dolgozatokra [4], a disszertációkra [3] és a gépi program leírásokra [2] a következő minta szerint kell hivatkozni:

- [1] Farkas, J., Über die Theorie der einfachen Ungleichungen, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **124** (1902) 1–27.
- [2] Kéri, G., „DUALSIMP”, rutin a CDC 3300-ás gépekre (Magyar Tudományos Akadémia Számítástechnikai és Automatizálási Kutató Intézete, CDC 3300 felhasználói ismertető 2. 1973. május) 19–20.
- [3] Prékopa, A. „Sztochasztikus rendszerek optimalizálási problémáiról”, doktori értekezés. Magyar Tudományos Akadémia, Budapest, 1970.
- [4] Prabhu, N. U. „Recent research on the ruin problem of collective risk theory”, in: *Inventory Control and Water Storage* Ed. A. Prékopa (János Bolyai Mathematical Society and North-Holland Publishing Company, Amsterdam–London, (1973) 221–228.
- [5] Zoutendijk, G. *Methods of Feasible Directions* (Elsevier Publishing Company, Amsterdam and New York, 1960).

A dolgozatok szövegében az irodalmi hivatkozás számaikat szögletes zárójelben kell megadni, mint például [5] vagy [4, 76–78]. A szerzők a dolgozatukról 50 darab ingyenes különlenyomatot kapnak. A dolgozatok után szerzői díjat az Alkalmazott Matematikai Lapok nem fizet.

TARTALOMJEGYZÉK

Prékopa András 75 éves	181
Prékopa András tudományos munkáinak jegyzéke	195
<i>Molnár Tamás</i> , Lotka–Volterra-autokatalátor (LVA) irreverzibilis reakciólépésekkel	215
<i>Tanács Attila</i> , Kijelölt pontpárokon alapuló képregisztrációs módszerek	237
<i>Tasnádi Attila</i> , Az arányos elosztási eljárás egy karakterizációja	261
<i>Dósa György és Vizvári Béla</i> , Az LPT (k)' algoritmus egyforma párhuzamos gépek ütemezésére	269
<i>Németh Ferenc</i> , Szilárdságtani tenzorok síkgörbéi	291
<i>Horváth Alice és Prékopa András</i> , Alsó és felső korlátok a csoportos életbiztosítási aktuárius jelenértékre együttes valószínűségeloszlások figyelembevételével	301
<i>Bognár Katalin</i> , Klasszifikáció az eset alapú következtetőrendszerekben	317
<i>Ádám András</i> , A kromatikus skála tizenkét hangjából képezhető hangkészletek áttekintése	329
<i>Horváth Géza</i> , A φ faktorizáló algoritmus	355
<i>Mályusz Levente</i> , A költségtervezési „time-cost trade-off” feladat általánosítása és megoldása	365

INDEX

András Prékopa is 75 years old	181
List of Publications of András Prékopa	195
<i>T. Molnár</i> , Lotka–Volterra-autocatalator (LVA) with irreversible reaction steps	215
<i>A. Tanács</i> , Image registration methods based on interactively identified point pairs	237
<i>A. Tasnádi</i> , A characterization of the proportional probabilistic rationing method	261
<i>Gy. Dósa and B. Vizvári</i> , Algorithm LPT (k)' for scheduling identical parallel machines ..	269
<i>F. Németh</i> , Plane curves of mechanics tensors	291
<i>A. Horváth and A. Prékopa</i> , Lower and upper bounds for the actuarial present value of a group life insurance policy, using joint life time distributions	301
<i>K. Bognár</i> , A classification based approach to cased based reasoning	317
<i>A. Ádám</i> , Overview of the subsets of the set of the twelve chromatic musical notes	329
<i>G. Horváth</i> , The φ factoring algorithm	355
<i>L. Mályusz</i> , A generalization of MPM/PDM least cost scheduling “time-cost trade-off” problem	365